ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS ET GÉOMÉTRIE (R)

1. Espaces vectoriels euclidiens

1.1. **Produit scalaire.**

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{F C}}$
Soit E un espace vectoriel euclidien de dim 3, $(u,v,w,t) \in E^4$:

(1) Montrer que (u,v,w) libre $\Leftrightarrow$ $(u \wedge v, u \wedge w)$ libre.
(2) Montrer que :

$$(u \wedge v).(w \wedge t) = (u.w)(v.t) - (u.t)(v.w),$$
$$(u \wedge v) \wedge (w \wedge t) = (u,v,t)w - (u,v,w)t,$$
$$(v \wedge w, w \wedge u, u \wedge v) = (u,v,w)^2.$$

(3) Montrer que $q(x) = x.(v \wedge (w \wedge x)) \in Q(E,\mathbb{R})$; trouver une base orthonormée de E qui soit orthogonale pour q (se ramener au cas où v et w sont unitaires) ; q est-elle définie, est-elle positive ?

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit E un espace euclidien
Montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$$

où $\alpha_i \in \mathbb{R}$ et $x_i \in E$.

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure ou égale à 2, a, b, c dans E tels que $\|b-a\| = \|a-c\| = \|c-b\|$.

(1) Montrer que si $\|x-a\| = \|x-b\| = \|x-c\|$ alors $x - \dfrac{a+b+c}{3}$ est orthogonal aux vecteurs $b-a$, $a-c$, $c-b$.
(2) Si, de plus $\|x-a\| = \dfrac{\|b-a\|}{\sqrt{3}}$ montrer alors que $x = \dfrac{a+b+c}{3}$.
(3) Généralisation.

Exercice 1.1.4. $\boxed{\textbf{I C}}$
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension p. Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, on définit

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \det[(x_i|x_j)].$$

(1) Montrer que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liée $\Leftrightarrow$ $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.
Montrer que si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre : $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$
G est appelé *déterminant de Gramm.*

(2) Si on pose $x'_1 = x_1 + \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i x_i$, montrer que $G(x'_1, x_2, \ldots, x_n) = G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et calculer $G(\lambda x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en fonction de $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

(3) Si $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre, on pose : $H = \text{Vect}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, montrer que :

$$\mathrm{d}(x, H)^2 = \frac{G(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Exercice 1.1.5. $\boxed{\textbf{I}}$

Soient E un espace euclidien, f et g 2 endomorphismes de E qui commutent. On suppose que les matrices de f et g dans une base orthogonale sont respectivement symétrique et antisymétrique. Montrer que $\forall x \in E$, $(f(x)|g(x)) = 0$ et $\|(f-g)(x)\| = \|(f+g)(x)\|$.

Exercice 1.1.6. $\boxed{\textbf{I}}$

Soient E l'espace euclidien orienté de dimension 3, a et b des vecteurs non nuls de E. On définit $f \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\forall x \in E,\ \ f(x) = (a|x)a + b \wedge x.$$

Quel est le rang de f ?

1.2. **Orthogonalité.**

Exercice 1.2.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit $(e_1(t), e_2(t), \ldots, e_n(t))$ n fonctions de classe C^1 sur I intervalle de $\mathbb{R}$ telles que la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ soit orthonormale pour tout t.

Montrer que l'opérateur dérivation se traduit par une matrice antisymétrique

(i.e. $\begin{pmatrix} e'_1(t) \\ \vdots \\ e'_n(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1(t) \\ \vdots \\ e_n(t) \end{pmatrix}$ où A est une matrice dépendant de t, antisymétrique).

Exercice 1.2.2. $\boxed{\textbf{I C}}$

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel euclidien.

Montrer que p est un projecteur orthogonal ssi $(p^2 = p)$ et $(\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|)$.

---

2. Géométrie affine

2.1. **Isométrie affine du plan et de l'espace.**

Exercice 2.1.1. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit f un antidéplacement du plan (i.e. une isométrie dont la partie linéaire est un endomorphisme orthogonal indirect).

(1) Montrer que si f admet au moins un point fixe alors f est une réflexion.

(2) Dans le cas où f n'a pas de point fixe, montrer qu'il existe un unique couple (t, s) où s est une réflexion affine et t une translation dont le vecteur est dans la direction de l'axe s et tel que $f = t \circ s = s \circ t$.

Exercice 2.1.2. **I**
Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ 2 droites non coplanaires dans $\mathbb{R}^3$ de direction respectives D_1 et D_2. Soient f_1 et f_2 2 retournements d'axe respectifs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
Montrer que $f_1 \circ f_2$ est un vissage d'axe $\mathcal{D}$ où $\mathcal{D}$ est la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice 2.1.3. **I**
Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé, on considère le carré $OABC$ de coordonnées $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et $(0,1)$. Soit LMN un triangle équilatéral orienté positivement tel que $L \in [0,A]$, $M \in [A,B]$, $N \in [C,O]$.
Montrer que le milieu de MN a pour coordonnées $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

2.2. **Automorphismes orthogonaux du plan et de l'espace.**

Exercice 2.2.1. **F**
Soient n réels $(b_i)_{i\in[1,n]}$ tels que : $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 = 1$, on pose $A = (a_{ij})$ où $a_{ij} = b_i b_j$.
Montrer que la matrice $2A - I_n$ est orthogonale.

Exercice 2.2.2. **F**
Dans E^3 euclidien orienté, étudier les endomorphismes représentés dans une base orthonormée par :

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & \sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\phi\cos\theta & -\sin\phi\sin\theta & \cos\phi \end{pmatrix}$$

S'il s'agit de rotations, en déterminer l'axe et l'angle.

Exercice 2.2.3. **D C**
Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Montrer que M est une matrice de rotation dans une base orthonormée directe ssi α, β, γ sont les racines d'une équation de la forme $x^3 - x^2 + k$ où $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{4}{27}$.
En posant $k = \dfrac{4\sin^2\theta}{27}$, expliciter les matrices M correspondantes ainsi que les axes et les angles des rotations qu'elles représentent.

Exercice 2.2.4. **I C**
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure ou égale à deux, soit $f \in \mathrm{GL}(E)$ vérifiant $x.y = 0 \Rightarrow f(x).f(y) = 0$.
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\dfrac{1}{\alpha} f \in \mathrm{O}(E)$ (on dit que f est une *similitude*). On pourra montrer que y étant fixé, il existe $\mu(y)$ réel tel que $\forall x \in E$, $f(x).f(y) = \mu(y) x.y$.

Exercice 2.2.5. **F**
Soit $A \in \mathrm{O}(n)$ telle que $I + A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Montrer alors qu'il existe Q dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = (I_n + Q)^{-1}(I_n - Q) = (I_n - Q)(I_n + Q)^{-1}.$$

Réciproque ?

Exercice 2.2.6. **F**
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère les 3 propriétés suivantes :

a) $f \in \mathrm{O}(E)$,
b) $f \circ f = -id$
c) $\forall x \in E$, $(x|f(x)) = 0$.

Montrer que 2 de ces 3 propriétés entraînent la troisième.

Exercice 2.2.7. **F**
Soit E un espace euclidien de dimension 3, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$. On définit $f \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\forall x \in E,\ f(x) = x + \lambda(x|u)u.$$

Donner une C.N.S. sur λ et u pour que f soit un automorphisme orthogonal. Décrire alors f.

Exercice 2.2.8. **F**
Soit E un espace euclidien de dimension 3 et $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Donner la matrice dans une base orthonormée directe de E de

(1) la réflexion par rapport au plan d'équation $ax + by + cz = 0$,
(2) la rotation autour de la droite dirigée et orientée par $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$, d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

2.3. **Géométrie euclidienne du plan et de l'espace.**

Exercice 2.3.1. **I**
Dans le plan affine, on définit un triangle par l'équation de ses 3 cotés :

$$\begin{cases} D = ux + vy + w = 0 \\ D' = u'x + v'y + w' = 0 \\ D'' = u''x + v''y + w'' = 0 \end{cases}$$

et on pose $\Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} \neq 0$. Calculer l'aire de ce triangle et l'exprimer à l'aide des quantités : Δ, $d = \begin{vmatrix} u' & v' \\ u'' & v'' \end{vmatrix}$, $d' = \begin{vmatrix} u'' & v'' \\ u & v \end{vmatrix}$ et $d'' = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$ (en supposant $dd'd'' \neq 0$).

Exercice 2.3.2. **F T**

Dans le plan, reconnaître la courbe d'équation : $(ax+by+c)^2 = a'x+b'y+c'$ (les formes linéaires $ax+by$ et $a'x+b'y$ sont supposées linéairement indépendantes).
Trouver une équation de son axe.

Exercice 2.3.3. **F T**

On considère l'ensemble des coniques d'équation :

$$x^2\sin^2\theta - xy\sin 2\theta + y^2(1+\cos^2\theta) = a^2\sin^2\theta.$$

Étudier l'ensemble des foyers puis l'ensemble des sommets de ces coniques.

Exercice 2.3.4. **F C**

Soient (A, B, C) 3 points d'une hyperbole équilatère (H), K l'orthocentre du triangle ABC et M l'intersection de (H) et du cercle circonscrit à ABC.

(1) Montrer que K appartient à (H).
(2) Préciser la position de M par rapport à K.

Exercice 2.3.5. **F C**

Soient E l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ et A, B, C trois points de cette ellipse.
Déterminer les positions de A, B et C sur (E) pour que l'aire du triangle ABC soit maximale.

Exercice 2.3.6. **D T**

Soit ABC un triangle, Γ une conique propre (i.e. une ellipse, une parabole ou une hyperbole).
On suppose que Γ est tangente en P à BC, en Q à CA et en R à AB.
Montrer que les droites AP, BQ, CR sont concourantes ou parallèles.

Exercice 2.3.7. **D**

Soit ABC un vrai triangle du plan affine euclidien.

(1) Montrer qu'il y a une et une seule ellipse Γ circonscrite au triangle ABC renfermant un domaine d'aire minimale (ellipse de Steiner).
(2) Montrer qu'il y a une et une seule ellipse γ inscrite dans le triangle ABC renfermant un domaine d'aire maximale. Comparer Γ et γ.

Exercice 2.3.8. **F**

Soient D_1, D_2 et D_3 3 droites de l'espace affine euclidien.
On définit : $f\ : M \in D_1 \mapsto f(M) \in D_1$ où $f(M)$ est obtenu en composant les projections orthogonales sur D_2, D_3 et D_1.
Quelle est la nature de f ?

Exercice 2.3.9. **F**

Trouver le symétrique de Oz par rapport au plan (P) d'équation : $x+2y+3z-1=0$.

1. Indications :

Indication 1.1.1

(1) Démontrer l'équivalence des propriétés contraires.
(2) Poser $W = w \wedge t$: $(u, v, W) = u.(v \wedge W)$ et utiliser la formule de Gibbs.
(3) La forme bilinéaire associée B est donnée par $B(x, y) = \frac{1}{2}[y.(v\wedge(w\wedge x))+x.(v\wedge(w\wedge y))]$, q n'est ni définie, ni positive.

Indication 1.1.2 Prendre $\phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i u + \lambda x_i)^2$ où $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ et procéder comme avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Indication 1.1.3

(1) L'interprétation géométrique permet de se guider, poser $g = \frac{a+b+c}{3}$ et montrer que $(b - a|x - g) = 0$, $(c - b|x - g) = 0$ et $(a - c|x - g) = 0$.
(2) Utiliser la relation de Pythagore.
(3) La généralisation se fait avec n points a_1, a_2, ..., a_n sommets d'un polygone régulier, $x - \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ est orthogonal aux vecteurs $a_i - a_j$.

Indication 1.1.4

(1) $(\Rightarrow)$ si $x_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ alors montrer que la dernière colonne est combinaison linéaire des autres.
$(\Leftarrow)$ si (x_i) est libre prendre (e_i) une base orthonormée de $V = \mathrm{Vect}(x_i)$ et montrer que $\mathrm{Mat}[(x_i|x_j)] = AA^{\mathrm{T}}$.
(2) Retrancher à la première colonne la somme des $\lambda_i \times C_i$ pour $i \geqslant 2$ et faire de même avec les lignes, on trouve $G(\lambda x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda^2 G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
(3) Écrire $x = \lambda e_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ où $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ est la projection de x sur H.

Indication 1.1.5 Si A et B sont les matrices de f et g dans des bases orthonormales alors $(f(x)|g(x)) = (AX)^{\mathrm{T}}BX = -X^{\mathrm{T}}BAX = -(f(x)|g(x))$, ensuite développer les carrés $\|(f - g)(x)\|^2$ et $\|(f + g)(x)\|^2$.

Indication 1.1.6 Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(a)^{\perp} \cap \mathrm{Vect}\, b$ et en conclure que, si $(b|a) = 0$ alors $\mathrm{Rg}\, f = 2$, si $(b|a) \neq 0$ alors $\mathrm{Rg}\, f = 3$.

Indication 1.2.1 Exprimer $e'_k(t)$ dans la b.o.n. $(e_1, \ldots, e_n)$ et dériver les égalités $e_h.e_k = \delta_{hk}$.

Indication 1.2.2 $(\Rightarrow)$ Évident. $(\Leftarrow)$ Un dessin peut ici être d'un grand secours, si $x \in E$, prendre $y = p(x)+\lambda(x-p(x))$, et montrer que $\|y\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2$ pour en déduire $p(x)(x-p(x)) = 0$. Prendre enfin $x \in \mathrm{Ker}\, p$ et $y \in \mathrm{Im}\, p$ et développer $(p(x + y)|x + y - p(x + y))$.

Indication 2.1.1 La partie linéaire de f est une symétrie par rapport à une droite vectorielle D.

(1) Soit A le point fixe de f alors f est la réflexion par rapport à la droite $A + D$.
(2) Se placer dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où D est l'axe des x et $D^{\perp}$ l'axe des y.

Indication 2.1.2 Se placer dans un repère où les équations de ces 2 droites s'écrivent $\mathcal{D}_1$: $y = \tan\theta x$, $z = h$, $\mathcal{D}_2$: $y = -\tan\theta x$, $z = -h$ (penser à la perpendiculaire commune) ou faire un raisonnement géométrique.

Indication 2.1.3 Prendre H le milieu de MN et s la similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{\sqrt{3}}{2}$ telle que $\overrightarrow{HL} = s(\overrightarrow{MN})$.

Indication 2.2.1 Par symétrie, il suffit de montrer que les 2 premiers vecteurs colonnes de A forment une famille orthogonale.

Indication 2.2.2 Première matrice : axe : $\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\cos\theta = -\frac{5}{6}$, et on prenant $x = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ on a $\sin\theta > 0$. Deuxième matrice : axe : $\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\cos\theta = \frac{7}{18}$, $\sin\theta < 0$. Troisième matrice : axe : $\begin{pmatrix}\sin\phi\sin\frac{\theta}{2}\\-\sin\phi\cos\frac{\theta}{2}\\(1+\cos\phi)\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$ et $\cos = \cos\phi\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$, le sinus est du signe de $-\cos\frac{\theta}{2}$.

Indication 2.2.3 M matrice orthogonale entraîne que $\alpha+\beta+\gamma = \pm 1$ et $\sigma_2 = 0$, puis M est la matrice d'une rotation donne $\alpha+\beta+\gamma = 1$ et on a équivalence. On obtient la condition α, β, γ racines réelles de $x^3 - x^2 + k = 0$ avec les fonctions symétriques des racines. On a alors $\sin\theta = \sin(3\varphi)$, $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ détermine l'axe de la rotation, l'angle vaut $\psi = \frac{2\theta}{3} + \frac{2k\pi}{3}$ en orientant l'axe de rotation par $\overrightarrow{n}$.

Indication 2.2.4 Montrer que $f(x).f(y) = x.z_y$ puis prendre $x \perp y$ pour en déduire que $z_y = \mu(y)y$ et finalement que μ est constante et strictement positive.

Indication 2.2.5 Partir du résultat : $Q = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$, la réciproque est immédiate.

Indication 2.2.6 a+b $\Rightarrow$ c : prendre $(f(x)|f\circ f(x))$, a+c $\Rightarrow$ b : développer $(x+y|f(x+y)) = 0$, b+c $\Rightarrow$ a : écrire $(x + f(y)|f(x) + f\circ f(y)) = 0$.

Indication 2.2.7 f est un automorphisme orthogonal ssi $\lambda = 0$ ou $u = 0$ ou $2 + \lambda\|u\|^2 = 0$, si $\lambda = 0$ ou $u = 0$ alors f est l'identité, si $2 + \lambda\|u\|^2 = 0$ alors f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}u^\perp$.

Indication 2.2.8

(1) $\begin{pmatrix}1-2a^2 & -2ab & -2ac\\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc\\ -2ac & -2bc & 1-2c^2\end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix}a^2 & ab-c & ac+b\\ ab+c & b^2 & bc-a\\ ac-b & bc+a & c^2\end{pmatrix}$.

Indication 2.3.1 Reconnaître, à une permutation près des lignes et des colonnes, le déterminant de la matrice des cofacteurs. On trouve $\frac{\Delta^2}{2|dd'd''|}$.

Indication 2.3.2 Poser $X = \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $Y = \frac{-bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$, on reconnaît une parabole, une équation de son axe est donnée par $ax + by + c - \frac{aa'+bb'}{2(a^2+b^2)} = 0$.

Indication 2.3.3 Les sommets décrivent 2 cercles.

Indication 2.3.4

(1) Si $xy = 1$ est l'équation de (H) on trouve $x_K = \frac{-1}{x_A x_B x_C}$.
(2) M est le symétrique de K par rapport au centre de l'hyperbole.

Indication 2.3.5 Faire une affinité pour se ramener à un cercle.

Indication 2.3.6 Si Γ est une ellipse, se ramener par une affinité au cas d'un cercle. Si Γ est une parabole ou un hyperbole, faire un changement de repère pour que la droite BC soit l'axe Ox, P l'origine. Dans ce cas, l'équation s'écrit $x^2 - 2y - \rho y^2$. Avec $B(b,0)$, $C(c,0)$ on trouve les coordonnées de R $(\frac{2b}{1-\rho b^2}, \frac{2b^2}{1-\rho b^2})$, celles de Q et celles de A sont $(\frac{b+c}{1-\rho bc}, \frac{2bc}{1-\rho bc})$.

Indication 2.3.7 Par une application affine, on se ramène au cas où ABC est un triangle équilatéral.

Soit ABC un triangle, on note a, b, c la longueur des côtés opposés à A, B, C, p le demi-périmètre et S son aire. Montrer les résultats suivants : $S^3 \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{64}(abc)^2$, $S \leqslant \frac{1}{3\sqrt{3}}p^2$, avec égalité (dans les deux cas) ssi le triangle est équilatéral.

Indication 2.3.8 f est une homothétie sauf si les 3 droites sont parallèles.

Indication 2.3.9 On obtient la droite d'équations $2x - y = 0, y - 3z + 1 = 0$.

1. Solutions

Solution 1.1.1

(1) On démontre l'équivalence des propriétés contraires :

($\Rightarrow$) Si $u = \lambda v$: c'est vérifié, si $u \wedge v \neq 0$ alors $w = \lambda u + \mu v \Rightarrow u \wedge w = \mu u \wedge v$ ce qui est aussi vérifié.

($\Leftarrow$) Si $u \wedge v = \lambda u \wedge w$ alors $u \wedge (v - \lambda w) = 0 \Rightarrow v - \lambda w = \mu u$ c.q.f.d.

(2) On pose : $W = w \wedge t$: $(u, v, W) = u.(v \wedge W)$ et on utilise la formule de Gibbs (de même pour la $2^{ième}$ propriété (cf. page 26). Ensuite

$$(v\wedge w, w\wedge u, u\wedge v) = (v\wedge w)((w\wedge u)\wedge(u\wedge v)) = (v\wedge w)[((w\wedge u).v)u-((w\wedge u).u)v] = (u, v, w)^2.$$

(3) La forme bilinéaire associée B est donnée par : $B(x, y) = \dfrac{1}{2}[y.(v\wedge(w\wedge x))+x.(v\wedge(w\wedge y))]$.

On pose $v = \lambda e_1, w = \mu e_2$ où $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$ alors $q(e_1) = q(e_2) = 0$

Si (e_1, e_2) est liée, $q = 0$, si $e_1 \wedge e_2 \neq 0$ alors $q(e_1 \wedge e_2) = -\lambda\mu e_1.e_2(e_1 \wedge e_2)^2$. Donc q n'est ni définie, ni positive.

Solution 1.1.2 On fait une démonstration qui s'apparente à la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$.

On considère $\phi(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i u + \lambda x_i)^2$ où $u = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. En développant, $\phi(\lambda)$ est un trinôme du $2^{ième}$ degré

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right).u + \|u\|^2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2$$

qui garde un signe constant donc $\Delta' \leqslant 0$ donne l'inégalité :

$$\begin{aligned}\Delta' &= \left[\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right).u\right]^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)\|u\|^2\\ &= \|u\|^2\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)\right] \geqslant 0.\end{aligned}$$

Si $u = 0$, l'inégalité est immédiate et si $u \neq 0$, on peut simplifier par $\|u\|^2 > 0$.

Solution 1.1.3

(1) L'interprétation géométrique de ce résultat permet de simplifier et de guider les calculs. Le triangle abc est équilatéral, on pose $g = \dfrac{a+b+c}{3}$. Soit $x \in E$ tel que $\|x-a\|^2 = \|x-b\|^2$ alors en faisant la demi-différence, on trouve $(b-a|x-\frac{a+b}{2}) = 0$. Comme $\|g-a\|^2 = \|g-b\|^2$, on a la même relation en remplaçant x par g et donc $(b-a|x-g) = 0$. On a de même $(c-b|x-g) = 0$ et $(a-c|x-g) = 0$.

(2) On utilise la relation de Pythagore : $\|x-a\|^2 = \|x-g\|^2 + \|g-a\|^2$ et comme, dans un triangle équilatéral, $\|g-a\| = \dfrac{\|b-a\|}{\sqrt{3}}$ alors $x - g = 0$.

(3) La généralisation se fait avec n points a_1, a_2, ..., a_n sommets d'un polygone régulier. Si $\|x-a_1\| = \ldots = \|x-a_n\|$ alors $x - \dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ est orthogonal aux vecteurs $a_i - a_j$ (en fait, il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs).

On peut aussi envisager la généralisation au cas d'un polyèdre régulier en dimension $\geqslant n-1$...

Solution 1.1.4

(1) ($\Rightarrow$) si (par exemple) : $x_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j$ alors : $(x_i|x_n) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (x_i|x_j)$: la dernière colonne est combinaison linéaire des autres $\Rightarrow G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.
($\Leftarrow$) si (x_i) est libre, dans $V = \mathrm{Vect}(x_i)$ soit (e_i) une base orthonormée alors, en écrivant $x_i = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} e_h$ on a $(x_i|x_j) = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} a_{jh}$ et $\mathrm{Mat}[(x_i|x_j)] = AA^{\mathrm{T}}$ avec $A = \mathrm{Mat}(a_{ij})$ donc $G = (\det A)^2 > 0$ car A est inversible.

(2) On s'interesse à la première colonne :

$$(x_1'|x_j) = \sum_{i\geqslant 2} (x_1|x_j) + \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i (x_i|x_j) \text{ et } (x_1'|x_1') = (x_1|x_1') + \sum_{i\geqslant 2} \lambda_i (x_i|x_1'),$$

on retranche à la première colonne la somme des $\lambda_i \times C_i$ pour $i \geqslant 2$ (où C_i désigne la $i$ème colonne), on fait ensuite la même opération avec les lignes pour trouver :

$$G(x_1', x_2, \ldots, x_n) = G(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

On trouve aussi : $G(\lambda x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lambda^2 G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en mettant λ en facteur sur la première ligne et sur la première colonne.

(3) T¿out vecteur x de E s'écrit

$$x = \lambda e_0 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

où $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ est la projection de x sur H et e_0 est un vecteur unitaire orthogonal à H.
En utilisant les propriétés du 2. on obtient :

$$\begin{aligned} G(x, x_1, x_2, \ldots, x_n) &= G(\lambda e_0, x_1, \ldots, x_n) \text{ première propriété} \\ &= \lambda^2 G(e_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ deuxième propriété} \\ &= \lambda^2 G(x_1, x_2, \ldots, x_3) \text{ car } (e_0|x_i) = 0. \end{aligned}$$

Or $|\lambda| = \mathrm{d}(x, H)$

Solution 1.1.5 Soient A et B les matrices de f et g dans des bases orthonormales. On a

$$\begin{aligned} (f(x)|g(x)) &= (AX)^{\mathrm{T}} BX = X^{\mathrm{T}} ABX = (BX)^{\mathrm{T}} AX \\ &= -X^{\mathrm{T}} BAX = -X^{\mathrm{T}} ABX = -(f(x)|g(x)) \end{aligned}$$

donc $(f(x)|g(x)) = 0$.
Ensuite il suffit de développer les carrés $\|(f - g)(x)\|^2$ et $\|(f + g)(x)\|^2$.

Solution 1.1.6 On cherche le noyau de f : $(x|f(x)) = (x|a)^2$ donc $f(x) = 0 \Rightarrow (x|a)^2 = 0$ puis $f(x) = 0 \Rightarrow b \wedge x = 0$ donc $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Vect}(a)^{\perp} \cap \mathrm{Vect}\, b$.
On vérifie que l'on a l'égalité $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(a)^{\perp} \cap \mathrm{Vect}\, b$.

- Si $(b|a) = 0$ alors $\mathrm{Rg}\, f = 2$.
- Si $(b|a) \neq 0$ alors $\mathrm{Rg}\, f = 3$.

Solution 1.2.1 En fait, il suffit d'écrire que $e'_k(t)$ s'exprime dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ puis de dériver les égalités : $e_h.e_k = \delta_{hk}$. Si on écrit, pour un t donné, $e'_k = \lambda_{k,1}e_1 + \cdots + \lambda_{k,n}e_n$ alors

$$(e_h.e_k)' = e'_h.e_k + e_h.e_k = \lambda_{hk} + \lambda_{kh} = 0$$

d'où, si $k \neq h$, $\lambda_{hk} = -\lambda_{kh}$ et $\lambda_{hh} = 0$ ce qui prouve bien que la matrice (λ_{hk}) est antisymétrique.

Solution 1.2.2
($\Rightarrow$) Évident car $\|p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - p(x)\|^2 \leqslant \|x\|^2$.
($\Leftarrow$) Un dessin peut ici être d'un grand secours.
Soit $x \in E$, on prend $y = p(x) + \lambda(x - p(x))$ alors :

$$\|y\|^2 = \|p(x)\|^2 + 2\lambda p(x)(x - p(x)) + \lambda^2\|x - p(x)\|^2 \geqslant \|p(y)\|^2 = \|p(x)\|^2$$

et ceci pour tout λ donc

$$p(x)(x - p(x)) = 0$$

Soit $x \in \operatorname{Ker} p$ et $y \in \operatorname{Im} p$ alors

$$\begin{aligned}(p(x+y)|x+y-p(x+y)) &= 0 \\ &= (p(y)|x) = (y|x) \qquad \text{en développant.}\end{aligned}$$

donc p est un projecteur orthogonal.

Solution 2.1.1 La partie linéaire de f est donc une symétrie par rapport à une droite vectorielle D.

(1) Soit A le point fixe de f alors f est la réflexion par rapport à la droite $A + D$.

(2) On se place dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où D est l'axe des x et $D^\perp$ l'axe des y. $f(x, y) = (x+a, -y+b)$ donc f est la composée de la translation t de vecteur $a\overrightarrow{i}$ et de la symétrie s par rapport à l'axe $\frac{b}{2}\overrightarrow{j} + Ox$. On a bien $t \circ s = s \circ t$.
Montrons maintenant l'unicité de cette décomposition : $f \circ f = t \circ t = 2t$ (t est une translation) d'où l'unicité de t, celle de s est alors immédiate.

Solution 2.1.2 On se place dans un repère où l'axe Oz est la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, O est le milieu de l'intersection de Oz avec ces 2 droites, Ox et Oy étant les bissectrices des projections de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sur le plan perpendiculaire à Oz passant par O. Les équations de ces 2 droites s'écrivent

$$\mathcal{D}_1 \ : \begin{cases} y = \tan\theta x \\ z = h \end{cases} \quad , \ \mathcal{D}_2 \ : \begin{cases} y = -\tan\theta x \\ z = -h \end{cases}$$

Le retournement par rapport à $\mathcal{D}_1$ s'écrit $\begin{cases} x' &= \cos(2\theta)x + \sin(2\theta)y \\ y' &= \sin(2\theta)x - \cos(2\theta)y \\ z' &= 2h - z \end{cases}$ (on utilise les formules classiques dans le plan xOy). Pour avoir l'expression du retournement par rapport à $\mathcal{D}_2$, il suffit de changer θ en $-\theta$ et h en $-h$. On fait ensuite le calcul de $f_1 \circ f_2$. Dans le plan xOy on a une rotation d'angle 4θ et sur l'axe Oz on a une translation de vecteur $4h\overrightarrow{k}$.
Remarque : on aurait pu donner une solution purement géométrique.

Solution 2.1.3 Soit H le milieu de MN, $\overrightarrow{HL} = s(\overrightarrow{MN})$ où s est la similitude d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et de rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Les composantes de $\overrightarrow{MN}$ sont de la forme $(-1, x)$ donc celles de $\overrightarrow{HL}$ sont données par

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ x\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix}-x\\ -1\end{pmatrix}$$

l'ordonnée de H est donc $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, son abscisse est par construction égale à $\dfrac{1}{2}$.

Solution 2.2.1 Montrons que les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée (cf. remarque 9.1.7 (*ii*) page 167). Par symétrie, on ne s'interesse qu'aux 2 premiers, on a :

$$(2b_1^2 - 1)^2 + 4(b_1b_2)^2 + \cdots + 4(b_1b_n)^2 = 4b_1^4 - 4b_1^2 + 1 + 4b_1^2(1 - b_1^2) = 1$$

et :

$$(2b_1^2 - 1)2b_1b_2 + 2b_1b_2(2b_2^2 - 1) + 4b_1b_2b_3^2 + \cdots + 4b_1b_2b_n^2 = 0$$

ce qui permet de conclure.

Solution 2.2.2

On utilise ici la détermination des éléments d'une rotation vue page 167 et le fait que le cosinus de l'angle de la rotation vaut $\dfrac{\mathrm{Tr}(A) - 1}{2}$.

- Première matrice : axe : $\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$ et $\cos\theta = -\dfrac{5}{6}$, et on prenant $x = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ on a $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{11}}{6} > 0$.
- Deuxième matrice : axe : $\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ et $\cos\theta = \dfrac{7}{18}$, $\sin\theta < 0$.
- Troisième matrice : axe : $\begin{pmatrix}\sin\phi\sin\dfrac{\theta}{2}\\ -\sin\phi\cos\dfrac{\theta}{2}\\ (1+\cos\phi)\sin\dfrac{\theta}{2}\end{pmatrix}$ et $\cos = \cos\phi\cos^2\dfrac{\theta}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2}$, le sinus est du signe de $-\cos\dfrac{\theta}{2}$.

Solution 2.2.3 M est une matrice orthogonale ssi

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \text{ et } \sigma_2 = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$$

i.e. : $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\sigma_2 = 1$.

On a donc $\alpha + \beta + \gamma = \pm 1$ et $\sigma_2 = 0$.

Maintenant, M est la matrice d'une rotation ssi $\det M = 1$ i.e. $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 1$ ce qui est encore équivalent (en factorisant) à $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\sigma_2) = 1$ i.e. : $\alpha+\beta+\gamma = 1$.

On aura donc l'équivalence suivante : M est la matrice d'une rotation ssi α, β, γ sont les racines réelles de $x^3 - x^2 + k = 0$ (on connaît les fonctions symétriques élémentaires de ces racines) et la condition pour que ces racines soient réelles est $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{4}{27}$ (on utilise les formules de Cardan ou l'étude de $f(x) = x^3 - x^2 + k$).

On pose alors $k = \dfrac{4\sin^2\theta}{27}$ et $x = \dfrac{\sin\theta}{3\sin\varphi}$, après quelques simplifications, on obtient $\sin\theta = \sin(3\varphi)$, d'où les solutions suivantes pour α, β, γ (en écartant le cas où $\sin\theta = 0$—qui donne une matrice de permutation pour M—) :

$$\frac{\sin\theta}{3\sin(\theta/3)},\ \frac{\sin\theta}{3\sin(\theta/3+2\pi/3)},\ \frac{\sin\theta}{3\sin(\theta/3+4\pi/3)}.$$

$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vep associé à la vap 1, il détermine l'axe de la rotation, pour avoir le cosinus de l'angle, il suffit de calculer $\operatorname{Tr} M$ i.e. $\cos\psi = \dfrac{3\alpha-1}{2}$; on va ainsi trouver $\psi = \dfrac{2\theta}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}$ en orientant l'axe de rotation par $\overrightarrow{n}$.

Remarque : On peut directement chercher les solutions de l'équation du troisième degré sous la forme $x = \dfrac{2\cos\varphi+1}{3}$ où φ est l'angle de la rotation. Après simplifications et réduction, on trouve l'équation $\cos 3\varphi = \cos 2\theta$.

Solution 2.2.4 D'une part, l'application $x \mapsto f(x).f(y)$ est une forme linéaire, on sait donc qu'il existe z_y tel que $f(x).f(y) = x.z_y$.

D'autre part, $x \perp y \Rightarrow x \perp z_y$, si on prend tous les x orthogonaux à y, on aura $z_y = \mu(y)y$. Par raison de symétrie, si $x.y \neq 0$, on a $\mu(x) = \mu(y)$. Si $x.y = 0$, on écrit que $\mu(x) = \mu(x+y) = \mu(y)$ donc μ est constante et strictement positive. On pose $\mu = \alpha^2$ c.q.f.d.

Remarque : On peut aussi se placer dans une base orthonormale (e_i) et chercher la matrice de f dans cette base : $f(e_i).f(e_j) = 0$ car $e_i.e_j = 0$ puis, si $i \neq j$,

$$(f(e_i) + f(e_j)).(f(e_i) - f(e_j)) = 0$$

car $(e_i + e_j).(e_i - e_j) = 0$ donc $\|f(e_i)\| = \alpha$ ne dépend pas de i. Conclusion : si $\alpha \neq 0$, $\dfrac{1}{\alpha}f$ est une isométrie.

Solution 2.2.5 On part du résultat ce qui donne comme seul choix possible

$$Q = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$$

(les matrices commutent). On a alors

$$Q^{\mathrm{T}} = -Q \text{ et } A = (I_n + Q)^{-1}(I_n - Q) = (I_n - Q)(I_n + Q)^{-1}.$$

La réciproque est immédiate.

Solution 2.2.6

$\boxed{\text{a+b} \Rightarrow \text{c}}$: on a $(f(x)|f\circ f(x)) = (x|f(x)) = -(x|f(x)) = 0$,

$\boxed{\text{a+c} \Rightarrow \text{b}}$: en développant $(x+y|f(x+y)) = 0$ on obtient $(x|f(y)) = -(y|f(x)$ d'où

$$(f\circ f(x) + x|f\circ f(x) + x) = 2(x|x) + 2(x|f\circ f(x))$$

or $(x|f(f(x))) = -(f(x)|f(x)) = -(x|x)$ d'où $(f\circ f(x) + x|f\circ f(x) + x) = 0$ soit $f\circ f(x) + x = 0/$

$\boxed{\text{b+c} \Rightarrow \text{a}}$: $(x + f(y)|f(x) + f\circ f(y)) = 0 \Rightarrow (x|f(y)) - (y|f(x)) = 0$.

Solution 2.2.7 f est un automorphisme orthogonal ssi $(f(x)|f(y)) = (x|y)$ pour tout couple (x, y) de E ce qui est équivalent à

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \lambda(x|u)(y|u)(2 + \lambda\|u\|^2) = 0.$$

f est donc un automorphisme orthogonal ssi $\lambda = 0$ ou $u = 0$ ou $2 + \lambda\|u\|^2 = 0$.

- Si $\lambda = 0$ ou $u = 0$ alors f est l'identité.
- Si $2 + \lambda\|u\|^2 = 0$ alors $f(x) = x - 2\dfrac{(x|u)}{\|u\|^2}u$, f est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}u^{\perp}$.

Solution 2.2.8

(1) La réflexion par rapport à $\mathbb{R}\overrightarrow{u}^{\perp}$ s'écrit $s(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - 2(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{u})\overrightarrow{u}$ donc sa matrice s'écrit $\begin{pmatrix} 1-2a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & 1-2b^2 & -2bc \\ -2ac & -2bc & 1-2c^2 \end{pmatrix}$.

(2) On a $r(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{x})\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x}$ donc sa matrice s'écrit $\begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}$.

Solution 2.3.1 On trouve $\dfrac{\Delta^2}{2|dd'd''|}$:

En effet, si $A'' \in D \cap D'$: $A'' \begin{pmatrix} a_1'' \\ a_2'' \end{pmatrix}$ avec $a_1'' = \dfrac{d_1''}{d''}$, $a_2'' = \dfrac{d_2''}{d''}$ où $d_1'' = \begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix}$ et $d_2'' = \begin{vmatrix} w & u \\ w' & u' \end{vmatrix}$.
L'aire du triangle est donnée par

$$\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1'' & a_1' & a_1 \\ a_2'' & a_2' & a_2 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2|dd'd''|}|\Delta'|$$

où $\Delta' = \begin{vmatrix} d'' & d' & d \\ d_1'' & d_1' & d_1 \\ d_2'' & d_2' & d_2 \end{vmatrix}$ (cf. question (i) page 27) ; on reconnaît, à une permutation près des lignes et des colonnes, le déterminant de la matrice des cofacteurs.

Solution 2.3.2 On reconnaît une parabole : on pose

$$X = \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ Y = \frac{-bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

l'équation devient $X^2 = \alpha Y + \beta X + \gamma$ avec $\alpha \neq 0$ car on a supposé que les formes linéaires $ax+by$ et $a'x+b'y$ étaient indépendantes. En posant successivement $X' = X - \frac{\beta}{2}$, $Y' = Y + \frac{4\gamma+\beta^2}{4\alpha}$ on obtient l'équation $X'^2 = \alpha Y'$.

Une équation de son axe est donnée par :

$$ax + by + c - \frac{aa' + bb'}{2(a^2 + b^2)} = 0.$$

Solution 2.3.3 Les sommets décrivent la courbe d'équation polaire $r = \pm a\sqrt{2}\cos\theta$ i.e. 2 cercles.

Solution 2.3.4

(1) Soit $xy = 1$ l'équation de (H) (on a fait une similitude). On cherche l'intersection de la hauteur issue de A avec (H) : on trouve $x_K = \dfrac{-1}{x_A x_B x_C}$ expression symétrique en A, B, C et, par raison de symétrie, on trouve le même résultat en prenant les hauteurs issues de B et C donc K appartient bien à (H).

(2) Ensuite, on cherche l'intersection de (H) avec (C) : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \Rightarrow x^4 - 2ax^3 + cx^2 - 2bx + 1 = 0$; le produit des racines vaut $x_A x_B x_C x_M = 1 \Rightarrow M$ est le symétrique de K par rapport au centre de l'hyperbole.

Remarque : cet exercice illustre bien le fait que les calculs en géométrie peuvent être considérablement simplifiés en utilisant l'algèbre (et ici les relations entre coefficient et racines— cf proposition 8.3.9 page 141—).

Solution 2.3.5 La nature du problème n'est pas changée si l'on fait une affinité, on peut donc se ramener au cas où (E) est un cercle et dans ce cas, il faut et il suffit que le triangle ABC soit équilatéral : on fixe A et B alors le triangle d'aire maximale est obtenu en prenant C à l'intersection du cercle et de la médiatrice (2 choix possibles). Le triangle doit être isocèle et par raison de symétrie, équilatéral.

Cet exercice très classique permet d'apprécier comment des considérations géométriques simplifient les calculs.

Solution 2.3.6

- Si Γ est une ellipse, par une affinité, on se ramène au cas d'un cercle, dans ce cas la propriété se démontre en utilisant le théorème de Céva.
- Si Γ est une parabole ou un hyperbole, on fait un changement de repère pour que la droite BC soit l'axe Ox, P l'origine. Dans ce cas, l'équation de la conique peut s'écrire $x^2 - 2y - \rho y^2$ (voir à la fin). On prend $B(b, 0)$, $C(c, 0)$. De B, on peut mener deux tangentes à Γ, la première est l'axe Ox, la deuxième est la droite $y = \dfrac{2b}{1 + \rho b^2}(x - b)$ qui coupe Γ en R de coordonnées $(\dfrac{2b}{1 - \rho b^2}, \dfrac{2b^2}{1 - \rho b^2})$.

  Les coordonnées de Q s'obtiennent par symétrie, celles de A sont $(\dfrac{b + c}{1 - \rho bc}, \dfrac{2bc}{1 - \rho bc})$.

  L'équation de la droite AP est $y = \dfrac{2bc}{b + c}x$, après calculs, celle de la droite BQ s'écrit $y = \dfrac{2c^2}{2c - b + \rho bc^2}(x - b)$.

  L'intersection de ces deux droites est le point d'abscisse $x = \dfrac{bc(b + c)}{b^2 + c^2 - bc - \rho b^2 c^2}$ qui est symétrique en b et c ce qui prouve la propriété dans ce cas.

Réduction de l'équation de la conique : si on prend pour origine P tel que l'axe Ox soit tangent à la conique, alors, l'équation de cette conique sera: $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dy = 0$. a est non nul (sinon, on aurait une conique dégénérée en 2 droites), on peut alors s'arranger pour que $a = 1$ pour obtenir : $(x + by)^2 + (c - b^2)y^2 + dy = 0$. Faisons alors le changement de repère défini par: $X = \alpha(x + by)$, $Y = \beta dy$ avec $\alpha\beta d = 1$ on obtient: $\dfrac{X^2}{\alpha^2} - \dfrac{\rho}{\alpha^2}Y^2 + \dfrac{Y}{\beta} = 0$. Puis en imposant la condition: $\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{2}{\alpha^2}$ on trouve le résultat demandé

Solution 2.3.7 Par une application affine, on se ramène au cas où ABC est un triangle équilatéral (une application affine dans le plan est déterminée de manière unique par l'image de 3 points non alignés). Ensuite, pour des raisons de symétrie (ARNAQUE), l'ellipse en question dans les 2 cas est un cercle qui est respectivement le cercle circonscrit au triangle ABC et le cercle inscrit.
Indications de preuve (méthode due à Steiner) Soit ABC un triangle, on note a, b, c la longueur des côtés opposés à A, B, C, p le demi-périmètre et S son aire. On commence par montrer les résultats suivants :

- $S^3 \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{64}(abc)^2$,
- $S \leqslant \dfrac{1}{3\sqrt{3}}p^2$,

avec égalité (dans les deux cas) ssi le triangle est équilatéral.
On en déduit alors, en notant R et r les rayons des cercles circonscrits et inscrits, que $S \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{4}R^2$ et $3\sqrt{3}r^2 \leqslant S$ avec égalité (dans les deux cas) ssi le triangle est équilatéral.
Il en résulte alors, par transformation affine d'un triangle équilatéral en un triangle quelconque, de par la conservation du rapport d'aire par une transformation affine les deux résultats suivant :

- Soit E une ellipse, d'aire S_E, circonscrite à un triangle T d'aire S_T. Le rapport S_E/S_T est supérieur ou égal à $\dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ avec égalité ssi le centre de l'ellipse est l'isobarycentre du triangle.
- Soit E une ellipse, d'aire S_E, inscrite à un triangle T d'aire S_T. Le rapport S_E/S_T est inférieur ou égal à $\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$ avec égalité ssi le centre de l'ellipse est l'isobarycentre du triangle.

De ces deux résultats découlent l'existence et l'unicité des deux ellipses de Steiner.

Solution 2.3.8 f est une transformation affine de D_1 car la composée de deux transformations affines est une transformation affine.

Soient $\vec{u}_i$ les vecteurs unitaires directeurs de D_i. Posons $\cos\theta_1 = \vec{u}_1.\vec{u}_2$, $\cos\theta_2 = \vec{u}_2.\vec{u}_3$, $\cos\theta_3 = \vec{u}_3.\vec{u}_1$. On a $\vec{f}(\vec{u}_1) = \cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\vec{u}_1$ ($\vec{f}(\vec{u}_1) = \lambda\vec{u}_1$) donc f est une homothétie. Si les 3 droites sont parallèles alors f est une translation.

Solution 2.3.9 La droite cherchée est déterminée si on en connaît 2 points : $C \in (P) \cap Oz$: $C(0, 0, \dfrac{1}{3})$ et O' symétrique de $O/(P)$; on obtient alors : $2x - y = 0, y - 3z + 1 = 0$ comme équations.
