ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS ET GÉOMÉTRIE (R)

1. Espaces vectoriels euclidiens

1.1. **Produit scalaire.**

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :

(1) $\operatorname{Tr}(AA^{\mathrm{T}}) \geqslant 0$.
(2) $|\operatorname{Tr} A| \leqslant \sqrt{n \operatorname{Tr}(AA^{\mathrm{T}})}$.

Voir page 176 pour la définition de la trace d'une matrice.

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{I}}$
$\mathbb{R}^n$ étant muni de sa structure euclidienne canonique, montrer que $(\det A)^2 = \det(x_i.x_j)$ où les x_i sont les vecteurs colonnes de A.

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{F T}}$
Trouver le minimum de $f\ : (a,b) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} [\sin x - (ax^2+bx)]^2 \,\mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.1.4. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit E un espace vectoriel euclidien, $\|.\|$ sa norme euclidienne et $(a,b,c,d) \in E^4$.
Montrer l'égalité

$$\|b-a\|^2 + \|c-b\|^2 + \|d-c\|^2 + \|a-d\|^2 = \|c-a\|^2 + \|d-b\|^2 + \|a-b+c-d\|^2.$$

Exercice 1.1.5. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit E un espace vectoriel euclidien, $\|.\|$ sa norme euclidienne, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$.
Montrer que $\left\| \sum\limits_{i=1}^n x_i \right\|^2 \leqslant n \sum\limits_{i=1}^n \|x_i\|^2$.

Exercice 1.1.6. $\boxed{\textbf{I}}$
Résoudre l'équation $(1-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + \cdots + (x_{n-1}-x_n)^2 + x_n^2 = \dfrac{1}{n+1}$ où $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (penser à Cauchy-Schwarz).

Exercice 1.1.7. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $n \geqslant 1$ et $x_i > 0$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ tels que $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$.
Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i} \geqslant n^2$ et étudier les cas d'égalité.

Exercice 1.1.8. $\boxed{\textbf{D}}$
Soit M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $\delta_{ij} + a_i b_j + c_i d_j$. On désigne par a, b, c, d les vecteurs de coordonnées a_i, b_i, c_i, d_i.
Trouver l'expression de l'endomorphisme f associé à M en fonction de a, b, c, d. Calculer ensuite $\det M$ (on se placera dans une base adéquate et on distinguera les cas $\operatorname{Rg}(a, c) = 2,\ 1,\ 0$).

1.2. **Orthogonalité.**

Exercice 1.2.1. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient E un espace vectoriel euclidien, (e_i) et (f_j) deux bases orthonormales de E, $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $S = \sum\limits_{i,j} (u(e_i)|f_j)^2$ ne dépend pas des bases orthonormales choisies.

---

2. Géométrie affine

2.1. **Isométrie affine du plan et de l'espace.**

Exercice 2.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Dans l'espace affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ on considère l'application $f\ : M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z')$ définie par

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{1}{3}(-x + 2y + 2z - 4) \\ y' &= \dfrac{1}{3}(2x - y + 2z + 2) \\ z' &= \dfrac{1}{3}(2x + 2y - z + 2) \end{cases}.$$

Décrire géométriquement f.

Exercice 2.1.2. $\boxed{\textbf{F}}$
Dans l'espace affine euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ déterminer géométriquement les applications $f\ : M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z')$ définies par

$$(1) \begin{cases} x' &= -z + 1 \\ y' &= x \\ z' &= y - 2 \end{cases},\ (2) \begin{cases} x' &= -z + 1 \\ y' &= -x \\ z' &= y - 2 \end{cases},\ (3) \begin{cases} x' &= z + 1 \\ y' &= x \\ z' &= y - 2 \end{cases}.$$

2.2. **Automorphismes orthogonaux du plan et de l'espace.**

EXERCICE 2.2.1. **I**

Soit $S = (\alpha_{ij}) \in O(n)$, montrer que $\left|\sum_{i,j} \alpha_{ij}\right| \leqslant n$.

EXERCICE 2.2.2. **I**

Soit E un espace vectoriel euclidien, $(x_1, \dots, x_k)$ et $(y_1, \dots, y_k)$ deux familles de vecteurs de E telles que $\forall (i,j) \in [1,k]^2$, on ait $x_i.x_j = y_i.y_j$.

(1) Comparer les rangs de $(x_1, \dots, x_k)$ et $(y_1, \dots, y_k)$.
(2) Montrer qu'il existe une isométrie u de E telle que $\forall i \in [1,k]$, $u(x_i) = y_i$.

EXERCICE 2.2.3. **I**

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & x & y \\ c & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Comment choisir $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ pour qu'il existe $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ telle que M soit orthogonale.

EXERCICE 2.2.4. **F**

Trouver la matrice de la rotation d'angle $\pi/2$ autour du vecteur de coordonnées (1,1,1).

EXERCICE 2.2.5. **F**

Soit E un e.v. euclidien orienté de dimension 3 et f une application de E dans E telle que :

$$\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2 \qquad f(\overrightarrow{x}).\overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}.f(\overrightarrow{y}) = 0.$$

Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ et qu'il existe $\overrightarrow{t} \in E$ tel que : $\forall \overrightarrow{x} \in E$, $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{t} \wedge \overrightarrow{x}$.

EXERCICE 2.2.6. **I**

Soient E l'espace euclidien orienté, $f \in \mathcal{L}(E)$ non nulle et (i,j,k) une base orthonormée directe.

(1) Montrer que f est une rotation ssi

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y).$$

(2) Montrer qu'il existe une unique rotation f telle que

$$f(i+j+k) = i+j-k \text{ et } f(3i+j) = 3j-k.$$

2.3. **Géométrie euclidienne du plan et de l'espace.**

EXERCICE 2.3.1. **F**

Soient u et v 2 vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté.
On pose $p(x) = (u.x).u$ et $q(x) = (v.x).v$.
Montrer que $p + q - 2p \circ q$ est une similitude directe.

EXERCICE 2.3.2. **I**

Soit T un triangle d'un plan affine euclidien. Étant donné un point M intérieur à T, on appelle p, q, r les distances de M aux trois cotés de T.
Trouver M pour que le produit soit maximum.

EXERCICE 2.3.3. **F**

Dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormal, on note $(D_i)_{i\in\{1,2,3\}}$ les droites d'équation $t_i^2x - t_iy + a = 0$ où $a > 0$. On suppose que les t_i sont les racines de l'équation $t^3 - 3t + \lambda(1 - 3t^2) = 0$ où λ est un réel fixé non nul.
Montrer que les intersections 2 à 2 de ces 3 droites sont les sommets d'un triangle équilatéral.

EXERCICE 2.3.4. **I**

Soit $ABCD$ un tétraèdre dont les 4 faces ont la même aire, I, J les pieds sur AB et CD de la perpendiculaire commune à AB et CD. Montrer que

$$\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{IJ}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{JC}\right)^2 \text{ et } \left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{IJ}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{JD}\right)^2.$$

En déduire que les faces sont isométriques.

EXERCICE 2.3.5. **I**

Soit $f\ : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3$ où $X = x\cos\theta - y\sin\theta$, $Y = x\sin\theta + y\cos\theta$, $Z = z + t$.
On définit la suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $M_0 = (1, 0, 0)$, $M_{n+1} = f(M_n)$.
Déterminer $(\theta, t) \in \mathbb{R}^2$ pour que $M_n, M_{n+1}, M_{n+2}, M_{n+3}$ soient, pour tout n, les sommets d'un tétraèdre régulier.

EXERCICE 2.3.6. **I T**

Soit S la sphère de centre O et de rayon R. À tout point M de S, on associe la sphère S_M de centre M passant par O et A, B, C les points d'intersection de S_M avec les axes Ox, Oy et Oz.
Déterminer le lieu de l'orthocentre du triangle ABC lorsque M parcourt la sphère S.

EXERCICE 2.3.7. **I**

Soit S une sphère de $\mathbb{R}^3$ euclidien, P un point intérieur à S et A_1, A_2, A_3 des points de S tels que $\overrightarrow{PA_1}$, $\overrightarrow{PA_2}$, $\overrightarrow{PA_3}$ soient 2 à 2 orthogonaux.
Quel est le lieu du point $M = P + \overrightarrow{PA_1} + \overrightarrow{PA_2} + \overrightarrow{PA_3}$ lorsque A_1, A_2 et A_3 décrivent S.

---

1. INDICATIONS

Indication 1.1.1 En fait $\mathrm{Tr}(AB^{\mathrm{T}})$ est le produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et la deuxième question représente l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Indication 1.1.2 Remarquer que $\det(A)^2 = \det(AA^{\mathrm{T}})$.

Indication 1.1.3 Utiliser le produit scalaire $(u|v) = \int_0^\pi u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$.

Indication 1.1.4 On peut développer ou poser $x = b - a$, $y = c - a$ et $z = d - a$ et utiliser l'identité du parallélogramme.

Indication 1.1.5 Utiliser l'inégalité triangulaire et Cauchy-Schwarz.

Indication 1.1.6 Utiliser Cauchy-Schwarz avec le vecteur $(1-x_1, x_1-x_2, \dots, x_{n-1}-x_n, x_n)$.

Indication 1.1.7 Cauchy-Schwarz encore, faire intervenir $\sqrt{x_i}$ et $\frac{1}{x_i}$.

Indication 1.1.8 $f(x) = x + (b|x)a + (d|x)c$ et, selon les différents cas, on complète par une base de l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(a, c)$.

Indication 1.2.1 Exprimer S en fonction uniquement des (e_i) à l'aide de la trace d'un produit de matrices et prouver que S ne dépend pas des (e_i).

Indication 2.1.1 f est un demi-tour d'axe $(A, \overrightarrow{V})$ où $A(-1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{V}(1, 1, 1)$.

Indication 2.1.2 (1) est la composée de la symétrie orthogonale par rapport au plan passant par A, orthogonal à $\overrightarrow{U}$ (d'équation $x - y + z - \dfrac{1}{2} = 0$) et la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ autour de l'axe $(A, \overrightarrow{U})$.

(2) est la composée (commutative) de la translation de vecteur $\overrightarrow{U}$ et de la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ autour de (Δ) orienté par $\overrightarrow{U}$.

(3) est la composée de la translation de vecteur $\overrightarrow{U}$ et de la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ autour de (Δ) orienté par $\overrightarrow{U}$.

Indication 2.2.1 Écrire $\alpha_{ij} = (e_i|\varepsilon_j)$ où (e_i) et (ε_j) sont des bases orthonormales et utiliser Cauchy-Schwarz.

Indication 2.2.2 Les rangs sont égaux (extraire une famille libre de (x_i) et montrer que la famille correspondante dans les (y_i) est libre aussi). Pour l'isométrie, prendre les orthogonaux de $\mathrm{Vect}(x_i)$ et de $\mathrm{Vect}(y_i)$.

Indication 2.2.3 On exprime les 6 conditions pour que cette matrice soit orthogonale, si $bc \neq 0$, alors on peut trouver t tel que $x = c^2t - a$, $y = -bct$ et $z = b^2t - a$. La conclusion, quelque soit les cas est M orthogonale ssi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Indication 2.2.4 Écrire la rotation sous la forme $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{x}.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{x}$.

Indication 2.2.5 Montrer que la matrice de f est antisymétrique.

Indication 2.2.6

(1) Utiliser l'équivalence $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \Leftrightarrow \forall u \in E,\ (f(x \wedge y)|u) = (f(x) \wedge f(y)|u)$.
(2) Poser $I = f(i)$, $J = f(j)$, $K = f(k)$, rajouter la troisième équation en utilisant la remarque du (1) et résoudre.

Indication 2.3.1 Distinguer les cas (u, v) liée et (u, v) libre et dans ce dernier cas, faire intervenir un vecteur w directement perpendiculaire à u.

Indication 2.3.2 Faire intervenir $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ les aires respectives des triangles AMB, BMC, CMA et changer de paramètres.

Indication 2.3.3 Poser $\lambda = \tan l$ et se ramener à une équation $\tan l = \tan(3\theta)$.

Indication 2.3.4 Remarquer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC}$ et $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ}).(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC}) = 0$. Prouver ensuite que J est le milieu de CD.

Indication 2.3.5 Remarquer que $M_pM_{p+1} = M_qM_{q+1}$ pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. La C.N.S. s'écrit $3t^2 = 2(\cos 2\theta - \cos\theta) = 6\cos 2\theta(\cos\theta - 1)$.

Indication 2.3.6 L'équation du lieu de H est : $(X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2)(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = (2RXYZ)^2$

Indication 2.3.7 On trouve $\overrightarrow{OM}^2 = 3R^2 - 2\overrightarrow{OP}^2$.

2. Solutions

Solution 1.1.1

(1) Si $A = (a_{ij})$ alors $\operatorname{Tr}(AA^{\mathrm{T}}) = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geqslant 0$ ($\operatorname{Tr}(AA^{\mathrm{T}}) = 0 \Leftrightarrow A = 0$).

(2) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$|\operatorname{Tr}(A)|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} 1.\sum_{i=1}^{n} |a_{ii}|^2 \leqslant n \operatorname{Tr}(AA^{\mathrm{T}})$$

avec égalité ssi $A = \lambda I$.

On pouvait aussi remarquer que $(A, B) \mapsto \operatorname{Tr}(AB^{\mathrm{T}})$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solution 1.1.2 Si $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ (où (e_i) est la base canonique de $\mathbb{R}^n$) alors $A^{\mathrm{T}}A = (b_{ij})$ avec $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$. On a donc $A^{\mathrm{T}}A = (x_i.x_j)$ d'où $\det(A^{\mathrm{T}}A) = (\det A)^2 = \det(x_i.x_j)$.

Solution 1.1.3 $(u|v) = \displaystyle\int_0^{\pi} u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire dans l'ensemble des fonctions continues sur $[0, \pi]$.

Si on pose $E = \operatorname{Vect}(x, x^2)$, il s'agit de calculer le minimum de $\|u - \sin\|^2$, $u \in E$. On sait (cf proposition 3.1.11 page 63-63) qu'il est obtenu pour la projection orthogonale u de sin sur E.

Si on pose $u = \alpha x + \beta x^2$, on obtient

$$\alpha = \frac{240}{\pi^4} - \frac{12}{\pi^2} \text{ et } \beta = \frac{20}{\pi^3} - \frac{320}{\pi^5}.$$

Solution 1.1.4

- Première solution : on développe les normes avec les produits scalaires.
- Deuxième solution : on pose $x = b - a$, $y = c - a$ et $z = d - a$ et on utilise l'identité du parallélogramme 3 fois

$$\begin{aligned}
2(\|x\|^2 + \|y - x\|^2 + \|z - y\|^2 + \|z\|^2) &= 2(\|x\|^2 + \|z - y\|^2) + 2(\|y - x\|^2 + \|z\|^2) \\
&= \|x + z - y\|^2 + \|x - z + y\|^2 \\
&\qquad + \|y - x + z\|^2 + \|y - x - z\|^2 \\
&= (\|y + (x - z)\|^2 + \|y - (x - z)\|^2) + 2\|y - x - z\|^2 \\
&= 2(\|y\|^2 + \|x - z\|^2 + \|y - x - z\|^2)
\end{aligned}$$

d'où la relation demandée en divisant par 2 et en remplaçant x, y, z par leur expression.

Solution 1.1.5 On a $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|$ et on utilise Cauchy-Schwarz en écrivant que $\|x_i\| = 1.\|x_i\|$ d'où

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} 1.\|x_i\|\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Solution 1.1.6 On utilise Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}1^2 &= [(1-x_1)+(x_1-x_2)+\cdots+(x_{n-1}-x_n)+x_n]^2\\ &\leqslant (n+1)\left[(1-x_1)^2+(x_1-x_2)^2+\cdots+(x_{n-1}-x_n)^2+x_n^2\right]\end{aligned}$$

et le cas d'égalité n'est obtenu que lorsque $(1-x_1, x_1-x_2, \dots, x_{n-1}-x_n, x_n)$ est un vecteur colinéaire à $(1,1,\dots,1,1)$ soit $1-x_1 = x_1-x_2 = \ldots = x_{n-1}-x_n = x_n$.
Il reste à résoudre cette récurrence : la relation générale s'écrit $x_{p-1}-x_p = x_p - x_{p+1}$. Ceci est une suite récurrente double, les solutions sont données par $x_p = \lambda p + \mu$. Or $x_2 = 2x_1 - 1$ donc on obtient $x_p = px_1 + 1 - p$ pour $p \in [\![1,n]\!]$. Or la dernière relation est $x_{n-1} = 2x_n$ soit $2nx_1 + 2 - 2n = (n-1)x_1 + 2 - n$ soit $(n+1)x_1 = n$ i.e. $x_1 = \dfrac{n}{n+1}$ d'où la solution générale $x_p = 1 - \dfrac{p}{n+1}$.

Solution 1.1.7 On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $u = (\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n})$ et $v = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}})$.
On a égalité ssi la famille (u,v) est liée soit $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ et comme $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$ on a égalité ssi $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \dfrac{1}{n}$.

Solution 1.1.8 On trouve $f(x) = x + (b|x)a + (d|x)c$.
Pour calculer le déterminant de f, on distingue donc les cas :

- $\mathrm{Rg}(a,c) = 2$, on complète pour avoir une base dans l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(a,c)$ par ε_3,..., ε_n et dans cette base, f admet la matrice

$$\begin{pmatrix} 1+(b|a) & (b|c) & \multirow{2}{*}{C} \\ (d|a) & 1+(d|c) & \\ \multicolumn{2}{c}{0} & I_{n-2}\end{pmatrix}$$

  d'où $\det M(f) = \det f = (1+(b.a))(1+(d.c)) - (d.a)(b.c)$.
- $\mathrm{Rg}(a,c) = 1$ et soit par exemple $c = \lambda a$, on complète comme dans le premier cas par une base de l'orthogonal de a par ε_2,..., ε_n. $f(a) = a + (b|a)a + (d|a)c = a + (b|a)a + (d|c)a$ d'où la matrice de f :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1+(b|a)+(d|c) & 0 \\ 0 & I_{n-1}\end{pmatrix}$$

  d'où $\det f = 1 + (b|a) + (d|c) = (1+(b.a))(1+(d.c)) - (d.a)(b.c)$ car $(b|c)(d|a) = (b|a)(d|c)$.
- $a = c = 0$ alors $f = \mathrm{Id}$ et $\det f = 1$

Conclusion : dans tous les cas, on a $\det f = (1+(b.a))(1+(d.c)) - (d.a)(b.c)$.

Solution 1.2.1 On a $S_i = \sum\limits_{j=1}^{n} (u(e_i)|f_j)^2 = \|u(e_i)\|^2$ indépendant de la base orthonormale (f_j) choisie.
Soit A la matrice de u dans la base (e_i) alors $S = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}A)$.
Si B est la matrice de u dans une autre base orthonormale alors $B = P^{\mathrm{T}}AP$ (P, la matrice de passage, est une matrice orthogonale) et $B^{\mathrm{T}}B = P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AP = P^{-1}A^{\mathrm{T}}AP$ d'où $\mathrm{Tr}(B^{\mathrm{T}}B) = \mathrm{Tr}(A^{\mathrm{T}}A)$ donc S est bien indépendant des bases orthonormales choisies.

Solution 2.1.1

- La partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f admet $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ comme matrice. On remarque que M est orthogonale, $\det M = 1$ et $M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle d'axe $\mathbb{R}(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$.
- $\mathrm{Tr}(M) = -1$ donc cette rotation est d'angle π.
- La recherche des points invariants de f nous donne la droite (D) d'équations $\begin{cases} x - 2y + z + 1 & = 0 \\ x + y - 2z + 1 & = 0 \end{cases}$ que l'on peut caractériser comme étant la droite passant par $A(-1, 0, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{V}(1, 1, 1)$.

Conclusion : f est le demi-tour d'axe (D).

Solution 2.1.2

(1) La partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f admet $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comme matrice. On remarque que M est orthogonale, $\det M = -1$. La résolution de l'équation $MX = -X$ donne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dans le plan (P) orthogonal à $\overrightarrow{U}(1, -1, 1)$ et orienté par $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{f}$ induit une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
Le seul point invariant de f est la point $A(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.
Conclusion : f est la composée de la symétrie orthogonale par rapport au plan passant par A, orthogonal à $\overrightarrow{U}$ (d'équation $x - y + z - \dfrac{1}{2} = 0$) et la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ autour de l'axe $(A, \overrightarrow{U})$ (cette composée est commutative).

(2) La partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f admet $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comme matrice. On remarque que M est orthogonale, $\det M = 1$. La résolution de l'équation $MX = X$ donne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dans le plan (P) orthogonal à $\overrightarrow{U}(1, -1, -1)$ et orienté par $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{f}$ induit une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
f n'admet pas de point invariant, c'est donc un vissage. L'axe de ce vissage est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{Mf(M)}$ et $\overrightarrow{U}$ soient liés. On trouve la droite (Δ) passant par le point $A(0, 1, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{U}$.
Conclusion : f est la composée (commutative) de la translation de vecteur $\overrightarrow{U}$ et de la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ autour de (Δ) orienté par $\overrightarrow{U}$.

(3) La partie linéaire $\overrightarrow{f}$ de f admet $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ comme matrice. On remarque que M est orthogonale, $\det M = 1$. La résolution de l'équation $MX = X$ donne $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Dans le plan (P) orthogonal à $\overrightarrow{U}(1,1,1)$ et orienté par $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{f}$ induit une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.
f n'admet pas de point invariant, c'est donc un vissage. L'axe de ce vissage est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{Mf(M)}$ et $\overrightarrow{U}$ soient liés. On trouve la droite (Δ) passant par le point $A(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{U}$.
Conclusion : f est la composée (commutative) de la translation de vecteur $\overrightarrow{U}$ et de la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ autour de (Δ) orienté par $\overrightarrow{U}$.

Solution 2.2.1 On sait que l'on peut écrire $\alpha_{ij} = (e_i|\varepsilon_j)$ où (e_i) et (ε_j) sont des bases orthonormales et donc

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} = \left(\sum_{i=1}^{n} e_i | \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \right)$$

et donc, par Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{i,j} \alpha_{ij} \right| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\| . \left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \right\| \leqslant n$$

car $\left\| \sum_{i=1}^{n} e_i \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \right\| = \sqrt{n}$.

Solution 2.2.2

(1) On remarque que, si $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i = 0$ alors $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i . x_j = 0$ pour $j \in [1, r]$ et, grâce à la propriété des familles (x_i) et (y_i), on aura $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i . y_j = 0$. Ce qui donne $\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i \right)^2 = 0$ (donc $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i y_i = 0$).
Si $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est une base de $\mathrm{Vect}(x_i)$ alors $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ est une famille libre (raisonner par l'absurde en utilisant la propriété démontrée). On a donc $\mathrm{Rg}(y_i) \geqslant \mathrm{Rg}(x_i)$ et par raison de symétrie, on peut dire que $\mathrm{Rg}(x_i) = \mathrm{Rg}(y_i)$.

(2) Soit $X = \mathrm{Vect}(x_i)$ et $Y = \mathrm{Vect}(y_i)$ alors, on sait que $\dim X = \dim Y$. On suppose que $(x_1, \ldots, x_p)$ est une base de X, on la complète en une base de E en choisissant les vecteurs $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ orthonormés dans le supplémentaire orthogonal de X ; on fait de même avec le supplémentaire orthogonal de Y que l'on munit de la b.o.n. $(f_{p+1}, \ldots, f_n)$.
On définit alors u par $u(x_i) = y_i$ pour $i \leqslant p$ et $u(e_i) = f_i$ pour $i \geqslant p + 1$. Il n'est pas difficile alors de vérifier que $u(x_i) = y_i$ pour tout i et que u est une isométrie (on utilise ici la proposition 3.1.12 page 63).

Solution 2.2.3 On écrit les 6 conditions pour que M soit orthogonale :

$$\begin{array}{ll}(1) & ab+bx+cy=0\\ (2) & ac+by+cz=0\\ (3) & bc+xy+yz=0\\ (4) & a^2+b^2+c^2=1\\ (5) & b^2+x^2+y^2=1\\ (6) & c^2+y^2+z^2=1.\end{array}$$

- Si $bc\neq 0$, alors $x=c^2t-a$, $y=-bct$ et $z=b^2t-a$ grâce à (1) et (2). En utilisant (3) on arrive alors à :

$$(7)\qquad (b^2+c^2)t^2-2at-1=0.$$

  Cette équation du second degré admet les racines $t=\dfrac{a+\varepsilon}{b^2+c^2}=-\dfrac{1}{a-\varepsilon}$ (en tenant compte de (4)). On obtient ainsi 2 points de $\mathbb{R}^3$: A et B de coordonnées (x,y,z) correspondant aux deux valeurs de t trouvées. On vérifie alors qu'en prenant (a,b,c) sur la sphère unité, (x,y,z) en A ou en B, les conditions (5) et (6) sont vérifiées.
- Si $c=0$, $b\neq 0$ alors on arrive à la même conclusion.

Conclusion finale : si $a^2+b^2+c^2=1$, il existe (x,y,z) tels que M soit orthogonale. La réciproque à cette propriété est immédiate.

Remarque : on a $\det M=axz+2bcy-c^2x-b^2z-ay^2=-t(b^2+c^2)+a=\varepsilon$.

Solution 2.2.4 Si on pose $\overrightarrow{u}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1))$ alors la rotation vectorielle f cherchée s'écrit

$$\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})=(\overrightarrow{x}.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{x}$$

(cf question (i) page 66 en prenant $\alpha=0$ car on a une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$) ce qui donne matriciellement

$$M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3}\\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1\end{pmatrix}.$$

Solution 2.2.5 On écrit $\forall(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\in E^2$, $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\forall z\in E$:

$$(f(\lambda\overrightarrow{x}+\mu\overrightarrow{y})-\lambda f(\overrightarrow{x})-\mu f(\overrightarrow{y})).\overrightarrow{z}=-(\lambda\overrightarrow{x}+\mu\overrightarrow{y}-\lambda\overrightarrow{x}-\mu\overrightarrow{y}).f(\overrightarrow{z})=0.$$

Donc, si A est la matrice de f, A est antisymétrique : $A=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{pmatrix}$ et on a alors : $\overrightarrow{t}=-c\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}-a\overrightarrow{k}$.

Solution 2.2.6

(1) On a l'équivalence $f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)\Leftrightarrow\forall u\in E,\ (f(x\wedge y)|u)=(f(x)\wedge f(y)|u)$.

($\Rightarrow$) Si f est une rotation alors f est bijective, on pose alors $u=f(z)$ et donc la propriété à démontrer est équivalente à $\forall(x,y,z)$, $(f(x\wedge y)|f(z))=[f(x),f(y),f(z)]$ (produit mixte).
D'une part, comme f est orthogonale, $(f(x\wedge y)|f(z))=(x\wedge y|z)=[x,y,z]$. D'autre part $[f(x),f(y),f(z)]=\det f[x,y,z]=[x,y,z]$ car $\det f=1$.
On a bien $\forall(x,y)\in E^2,\ f(x\wedge y)=f(x)\wedge f(y)$.

($\Leftarrow$) Soit $I = f(i)$, $J = f(j)$, $K = f(k)$ alors $K = f(k) = f(i) \wedge f(j) = I \wedge J$ et, de même, $J = K \wedge I$, $I = J \wedge K$. Si $I = 0$ alors $J = K = 0$ ce qui est exclu ($f \neq 0$). La famille (I, J, K) est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, c'est une base. Soit $\alpha = \|I\|$, $\beta = \|J\|$ et $\gamma = \|K\|$, on a $\alpha\beta = \gamma$, $\beta\gamma = \alpha$ et $\gamma\alpha = \beta$. donc $(\alpha\beta\gamma)^2 = \alpha\beta\gamma$ en faisant le produit donc $\alpha\beta\gamma = 1$ (car ce produit est non nul). On en déduit $\gamma^2 = 1$ (avec la première équation) donc $\gamma = 1$ car $\gamma > 0$, de même $\alpha = \beta = 1$.

Conclusion : $(f(i), f(j), f(k))$ est une base orthonormée directe donc f est une rotation.

(2) On pose $I = f(i)$, $J = f(j)$ et $K = f(k)$ alors, comme

$$\begin{aligned} f(i+j+k) \wedge f(3i+j) &= (I+J+K) \wedge (3I+J) = -I + 3J - 2K \\ &= (i+j-k) \wedge (3j-k) = 2i + j + 3k \end{aligned}$$

on a les équations

$$\begin{cases} I + J + K & = i + j - k \\ 3I + J & = 3j - k \\ -I + 3J - 2K & = 2i + j + 3k \end{cases}$$

qui admettent comme unique solution $I = \dfrac{1}{7}(-2i + 6j - 3k)$, $J = \dfrac{1}{7}(6i + 3j + 2k)$ et $K = \dfrac{1}{7}(3i - 2j - 6k)$. L'unique solution possible a donc pour matrice $M = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.

On vérifie alors que l'endomorphisme ainsi défini est bien une rotation et qu'il vérifie les 2 conditions imposées.

Solution 2.3.1

- Si u et v sont colinéaires : $p + q - 2p \circ q = 0$ (p et q sont 2 projections).
- Sinon, soit w un vecteur directement orthogonal à u : $v = cu + sw$ où $c = u.v$ et $s = \sqrt{1 - c^2}$ alors la matrice de $p + q - 2p \circ q$ dans (u, w) est $s\begin{pmatrix} s & -c \\ c & s \end{pmatrix}$ qui est la matrice d'une similitude directe.

Solution 2.3.2 Appelons $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ les aires respectives des triangles AMB, BMC, CMA alors $pAB = 2\mathcal{A}_1$, $qBC = 2\mathcal{A}_2$ et $rCA = 2\mathcal{A}_3$ (l'aire d'un triangles est la moitié du produit de la hauteur par la base).

Comme M est intérieur au triangle ABC, on a $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}$ aire du triangle ABC.

Posons $\mathcal{A}_1 = x\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_2 = y\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_3 = z\mathcal{A}$ alors $pqr = 8xyz\mathcal{A}^3$ et le problème est ramené à la recherche du maximum de $f(x, y, z) = xyz$ sachant que $x + y + z = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

C'est un problème d'extrema liés, on peut s'en tirer en ramenant le problème à deux variables (en remplaçant z en fonction de x et y). La réponse de toutes façons est $x = y = z = \dfrac{1}{3}$. Le maximum est atteint lorsque les 3 aires sont égales. Le point M sera alors l'isobarycentre du triangle ABC.

Solution 2.3.3 $3t - t^3 = \lambda(1 - 3t^2)$ est équivalent à $\lambda = \dfrac{3t - t^3}{1 - 3t^2}$ car $t = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ n'est pas racine. On pose alors $\lambda = \tan l$ et $t = \tan\theta$ et l'équation est équivalente à $\tan l = \tan(3\theta)$ soit $\theta = \dfrac{l}{3} + k\dfrac{\pi}{3}$. On obtient alors les 3 racines distinctes $t_1 = \tan\dfrac{l}{3}$, $t_2 = \tan\dfrac{l + \pi}{3}$ et

$t_3 = \tan \dfrac{l+2\pi}{3}$. $\lambda \neq 0$ entraîne que les t_i sont non nuls i.e. $\sin \frac{l+k\pi}{3} \neq 0$ donc l'équation des 3 droites s'écrit

$$x \sin \frac{l+k\pi}{3} - y \cos \frac{l+k\pi}{3} + a \frac{\cos^2 \frac{l+k\pi}{3}}{\sin \frac{l+k\pi}{3}} = 0.$$

Ces 3 droites forment un triangle équilatéral vu que leur angle 2 à 2 vaut $k\dfrac{\pi}{3}$.

Solution 2.3.4

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC}$$

car $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AI} = 0$ et

$$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ}).(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC}) = \overrightarrow{AB}.[\overrightarrow{IJ} \wedge (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC})] = 0$$

car $\overrightarrow{IJ}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC}$. D'où

$$\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{IJ}\right)^2 + \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC}\right)^2$$

on en déduit que : $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{JD}\right\|$; donc $JC = JD$ soit : J milieu de CD. De même, I milieu de AB i.e. $AD = BC$ (en écrivant $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$ et $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$) etc...

Solution 2.3.5 f est un vissage d'axe Oz, d'angle θ et de vecteur $t\,\overrightarrow{k}$. Si on note r la rotation associée, on peut écrire $M_n = O + r(n\theta) + nt\,\overrightarrow{k}$.
Le tétraèdre $(M_n, M_{n+1}, M_{n+2}, M_{n+3})$ est régulier ssi $M_nM_{n+1} = M_nM_{n+2} = M_nM_{n+3} = M_{n+1}M_{n+2} = M_{n+1}M_{n+3} = M_{n+2}M_{n+3}$. Mais, les 3 dernières égalités ne sont pas nécessaires car, vu que f est une isométrie, $M_pM_{p+1} = M_qM_{q+1}$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.
On a alors $M_nM_{n+i}^2 = 4\sin^2 \dfrac{i\theta}{2} + i^2t^2$ et la C.N.S. s'écrit

$$3t^2 = 2(\cos 2\theta - \cos\theta) = 6\cos 2\theta(\cos\theta - 1).$$

Écartons le cas $\cos\theta = 1$, $t = 0$, on doit avoir alors $\cos\theta = -\dfrac{2}{3}$ et $t^2 = \dfrac{5}{27}$. Ceci donne 4 solutions (selon les signes de t et θ).

Solution 2.3.6 Soient (a,b,c) les coordonnées de M, l'équation de la sphère S_M s'écrit : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = 0$ et donc $A(2a,0,0)$, $B(0,2b,0)$, $C(0,0,2c)$. On suppose que A, B, C est un vrai triangle (i.e. un seul des nombres a, b, c peut être nul).
Soit H la projection orthogonale de O sur le plan ABC. AB est orthogonale à OH et à OC donc à CH et par symétrie, on constate que H est l'orthocentre du triangle ABC. Comme l'équation du plan ABC s'écrit $bcx + cay + abz = 2abc$, les coordonnées de H se mettront sous la forme $X = \lambda bc$, $Y = \lambda ca$ et $Z = \lambda ab$. Comme H appartient au triangle ABC, on aura de plus : $\lambda(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) = 2abc$ (et vu la condition du premier paragraphe, λ peut se calculer ainsi).
On obtient alors, après calculs, l'équation du lieu de H : $(X^2Y^2 + Y^2Z^2 + Z^2X^2)(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = (2RXYZ)^2$
(poser $K = \dfrac{2(abc)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$, on a alors $a = \dfrac{K}{X}$, $b = \dfrac{Y}{y}$, $c = \dfrac{K}{Z}$ d'où

$$\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} = \frac{R^2}{K^2}$$

puis, en revenant à l'expression de K et en remplaçant a, b, c en fonction de X, Y, Z, on obtient $K = \dfrac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2}$ ce qui donne la relation annoncée. En supposant $abc \neq 0$, il n'est pas très difficile de prouver qu'il y a équivalence.)

Solution 2.3.7 Si O est le centre de la sphère, on peut écrire $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{OA}_i - 2\overrightarrow{OP}$ d'où

$$\overrightarrow{OM}^2 = \sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{OA}_i^2 + 2\sum_{i<j} \overrightarrow{OA}_i \overrightarrow{OA}_j - 4\sum_{i=1}^{4} \overrightarrow{OA}_i.\overrightarrow{OP} + 4\overrightarrow{OP}^2.$$

Or $\overrightarrow{OA}_i^2 = R^2$ et $0 = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OP}^2 - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$, donc $\overrightarrow{OM}^2 = 3R^2 - 2\overrightarrow{OP}^2$.
