10.03M

SESSION 2010

Filière MP (groupes MP/MPI et groupe I)

Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan

MATHÉMATIQUES MPI 2

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit.

Notations

Dans tout le problème $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On note $\Re(z)$ et $\Im(z)$ les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire et $\|.\|$ la norme usuels sur $\mathbb{C}^N$,

$$\langle X, Y \rangle := \sum X_k \overline{Y}_k, \quad \|X\| := \sqrt{\langle X, X \rangle}, \quad \text{pour tous } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_N \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_N \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^N.$$

On note $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille N, à coefficients complexes,

$$M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant N}.$$

Pour $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, on note M^* l'adjoint de M, c'est-a-dire la matrice $M^* = (M^*_{i,j})_{1 \leqslant i,j, \leqslant N}$ définie par

$$M^*_{i,j} := \overline{M_{j,i}}, \text{ pour tout } i, j \in \{1, ..., N\}.$$

On a alors, pour tous $X, Y \in \mathbb{C}^N$, $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$,

$$\langle X, Y \rangle = \overline{\langle Y, X \rangle}, \quad \langle MX, Y \rangle = \langle X, M^*Y \rangle, \quad \langle X, MY \rangle = \langle M^*X, Y \rangle.$$

On dit que M est hermitienne lorsque $M^* = M$ et que M est antihermitienne lorsque $M^* = -M$. On note I_N la matrice identité de taille N et $|||.|||$ la norme sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ subordonnée à la norme $\|.\|$, c'est-à-dire

$$|||M||| := \mathrm{Sup}\{\|MX\|; X \in \mathbb{C}^N, \|X\| \leqslant 1\}.$$

Pour $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, on note $\exp(M)$ l'exponentielle de M, c'est-à-dire la matrice définie par

$$\exp(M) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k.$$

Lorsque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et 2π périodique, on note $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier, qui sont les nombres complexes définis par

$$c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Lorsque $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$ est continue et 2π périodique, on note $(c_k(F))_{k \in \mathbb{Z}}$ la suite de ses coefficients de Fourier, qui sont les vecteurs de $\mathbb{C}^N$ définis par

$$c_k(F) := \begin{pmatrix} c_k(F_1) \\ c_k(F_2) \\ \dots \\ c_k(F_N) \end{pmatrix}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

où $F_1, ..., F_N : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont les composantes de F, c'est-à-dire

$$F(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \dots \\ F_N(t) \end{pmatrix}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Les sommes infinies indexées par $\mathbb{Z}$ sont à comprendre comme la somme de deux sommes infinies indexées par $\mathbb{N}$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k + \sum_{k=1}^{+\infty} x_{-k}.$$

La série indexée par $\mathbb{Z}$ converge lorsque les deux séries indexées par $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ convergent et on a alors l'égalité précédente.

Les parties ne sont pas indépendantes. Les résultats de questions non traitées peuvent être admis et utilisés dans les réponses aux questions suivantes, mais cela doit être clairement indiqué dans la copie.

Partie I

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geqslant 2$ et n nombres complexes $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts.

1. On définit le déterminant $V(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ par

$$V(\lambda_1, ..., \lambda_n) := \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

   (a) Montrer que

$$V(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \dots & \lambda_n - \lambda_1 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2 & \dots & (\lambda_n - \lambda_1)\lambda_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2^{n-2} & \dots & (\lambda_n - \lambda_1)\lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

   (b) En déduire que

$$V(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (\lambda_k - \lambda_j).$$

2. Soit $T > 0$. Pour $k \in \{1, ..., n\}$, on définit la fonction f_k par

$$f_k : \begin{array}{ccc} [0, T] & \rightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\lambda_k t}. \end{array}$$

Déduire de la question précédente que la famille $(f_1, ..., f_n)$ est libre sur $\mathbb{C}$.

Partie II

Dans cette partie, on fixe deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Le but de cette partie est d'étudier les relations entre les énoncés **[a]**, **[b]**, **[c]** et **[d]** suivants.

[a] : Il n'y a pas de vecteur propre de A dans le noyau de B.

[b] : Pour tout $y \in \mathbb{C}^N - \{0\}$, l'application suivante n'est pas identiquement nulle,

$$\begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{C}^N \\ t & \mapsto & B\exp(At)y. \end{array}$$

[c] : Pour tout $y \in \mathbb{C}^N - \{0\}$, il existe $k \in \{0, ..., N-1\}$ tel que $BA^k y \neq 0$.

[d] : La matrice rectangulaire K de taille $N^2 \times N$ définie ci-dessous est de rang N,

$$K := \begin{pmatrix} B \\ BA \\ \dots \\ BA^{N-1} \end{pmatrix}.$$

1. On suppose que l'énoncé **[c]** est vérifié. Démontrer l'énoncé **[d]**.
2. On suppose que l'énoncé **[d]** est vérifié. Démontrer l'énoncé **[a]**.
3. (a) Montrer que, pour tout $k \geqslant N$ il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $(N-1)$ tel que $A^k = P_k(A)$.
   (b) On suppose que l'énoncé **[b]** est vérifié. Démontrer l'énoncé **[c]**.
4. On suppose que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que l'énoncé **[a]** est vérifié. En utilisant la question 2 de la Partie I, démontrer l'énoncé **[b]**.
5. Quelle relation entre les énoncés **[a]**, **[b]**, **[c]**, **[d]** peut-on en déduire ?

Partie III

Dans cette partie, on fixe deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ et un vecteur $X_0 \in \mathbb{C}^N$. On suppose que A est antihermitienne. On admettra que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $\Re\langle AX, X\rangle = 0$ pour tout $X \in \mathbb{C}^N$ et que les valeurs propres de A sont imaginaires pures.
2. Montrer qu'il existe une unique fonction $X \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{C}^N)$ solution de l'équation différentielle
$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = (A - B^*B)X(t), \forall t \in [0, +\infty[, \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{1}$$
Donner son expression explicite, en utilisant l'exponentielle de matrice.
3. Montrer que
$$\frac{d}{dt}\|X(t)\|^2 = -2\|BX(t)\|^2, \forall t \in [0, +\infty[.$$
En déduire que l'application $t \in [0, +\infty) \mapsto \|X(t)\|^2$ est décroissante et que, pour tout $t \in [0, +\infty)$,
$$|\!|\!| \exp[(A - B^*B)t] |\!|\!| \leqslant 1.$$
4. Montrer que l'application $t \mapsto \|X(t)\|$ admet une limite $L \in [0, \|X_0\|]$ quand $t \to +\infty$.
5. On suppose que A et B vérifient la propriété **[a]** (cf Partie II) et que $t \mapsto \|X(t)\|^2$ est constante.
   (a) Montrer que $BX(t) = 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.
   (b) Montrer que $X_0 = 0$. En déduire que $L = 0$.
6. On suppose que A et B vérifient la propriété **[a]** (cf Partie II). Soit $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels dans $[0, +\infty[$ telle que $\lim_{k\to+\infty} t_k = +\infty$.
   (a) Montrer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(X(t_{\varphi(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un point ξ_0 de $\mathbb{C}^N$.
   (b) On considère la solution $\xi \in C^1([0, +\infty[, \mathbb{C}^N)$ de l'équation différentielle
$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt}(t) = (A - B^*B)\xi(t), \forall t \in [0, +\infty[, \\ \xi(0) = \xi_0. \end{cases}$$
   Montrer que, pour tout $t \in [0, +\infty[$, on a
$$\lim_{k\to+\infty} X(t_{\varphi(k)} + t) = \xi(t).$$
   (c) En déduire que $\|\xi(t)\| = L, \forall t \in [0, +\infty[$ et que $L = 0$.
7. On suppose que A et B vérifient la propriété **[a]** (cf Partie II).
   (a) Déduire des questions précédentes que
$$|\!|\!| \exp[(A - B^*B)t] |\!|\!| \to 0, \text{ quand } t \to +\infty. \tag{2}$$

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

(b) Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de $M := (A - B^*B)$ (deux à deux distinctes). Montrer que $\Re(\lambda_k) < 0$ pour $k = 1, ..., n$.

(c) Montrer qu'il existe des constantes $K > 0$ et $c > 0$ telles que, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\| \exp[(A - B^*B)t] \| \leqslant K e^{-ct}.$$

<u>Indication</u> : On pourra admettre la décomposition

$$\mathbb{C}^N = Ker[(M - \lambda_1 I_N)^{m_1}] \oplus ... \oplus Ker[(M - \lambda_n I_N)^{m_n}]$$

où $m_1, ..., m_n$ sont des entiers $\geqslant 1$ et montrer que, pour $Y \in Ker[(M - \lambda_k I_N)^{m_k}]$, on a $\exp(Mt)Y = e^{\lambda_k t} Q_k(t) Y$ où $Q_k(t)$ est un polynôme en t, à valeurs matricielles, indépendant de Y.

8. Si A et B ne vérifient pas la propriété **[a]** (cf Partie II), a-t-on toujours la convergence (2) ?

Partie IV

Dans cette partie, on fixe deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. On suppose que A est hermitienne et que A et B vérifient la propriété **[a]** (cf Partie II). On admettra que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. On fixe également une application $w_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$, de classe C^2, 2π-périodique, telle que $c_0(w_0) = 0$.

1. Montrer que iA est antihermitienne.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, on a

$$c_k(w_0) = -\frac{1}{k^2} c_k\left(\frac{d^2 w_0}{dt^2}\right).$$

En déduire que la série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|k c_k(w_0)\|$$

converge.

3. Montrer que l'expression

$$w(t, x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp[(ikA - B^*B)t] c_k(w_0) e^{ikx} \tag{3}$$

définit une fonction $w : [0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}^N$ dérivable par rapport à t et par rapport à x qui vérifie

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t}(t,x) = A\frac{\partial w}{\partial x}(t,x) - B^*Bw(t,x), \forall (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}, \\ w(t,x) = w(t,x+2\pi), \forall (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}, \\ \int_0^{2\pi} w(t,x)dx = 0, \forall t \in [0,+\infty[, \\ w(0,x) = w_0(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4}$$

4. Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{2\pi} \|w(t,x)\|^2 dx = 0. \tag{5}$$

Partie V

Dans cette partie, on fait les mêmes hypothèses que dans la partie IV. On suppose de plus que $N = 2$, c'est-à-dire que les matrices A et B sont de taille 2×2.

Le but de cette partie est de démontrer que la convergence (5) est exponentielle, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $K, c > 0$, ne dépendant que de A et B, telles que

$$\left(\int_0^{2\pi} \|w(t,x)\|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant Ke^{-ct} \left(\int_0^{2\pi} \|w_0(x)\|^2 dx\right)^{1/2}, \forall t \in [0,+\infty).$$

1. Montrer qu'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ ne dépendant que de A et B, telles que, pour tout $Y \in \mathbb{C}^N$,

$$C_1\|Y\|^2 \leqslant \|BY\|^2 + \|BAY\|^2 \leqslant C_2\|Y\|^2.$$

2. Pour $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ et $\varepsilon > 0$, on note $X_k(t) := \exp[(ikA - B^*B)t]c_k(w_0)$ et

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{L}_{\varepsilon,k} : & \mathbb{C}^N & \to & \mathbb{R} \\ & Y & \mapsto & \mathcal{L}_{\varepsilon,k}[Y] := \|Y\|^2 + \frac{\varepsilon}{k}\Im\langle BAY, BY\rangle. \end{array}$$

   (a) Quelle problème de Cauchy résout X_k ?

   (b) Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0[$, pour tout $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ et pour tout $Y \in \mathbb{C}^N$,

$$\frac{1}{2}\|Y\|^2 \leqslant \mathcal{L}_{\varepsilon,k}(Y) \leqslant \frac{3}{2}\|Y\|^2.$$

   (c) Soit $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)] \end{array}$$

   est dérivable et calculer sa dérivée.

(d) Soit $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Montrer que, pour tout $t \in [0, +\infty[$

$$\frac{d\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]}{dt} \leqslant -2\|BX_k(t)\|^2 - \varepsilon\|BAX_k(t)\|^2 + \varepsilon C_3\|X_k(t)\|\|BX_k(t)\|,$$

où C_3 est une constante qui ne dépend que de A et B (par exemple, $C_3 = \|\!|BAA|\!\| + \|\!|BAB^*B|\!\| + \|\!|BB^*BA|\!\|$).

(e) Montrer qu'il existe $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon_0[$ et $C_4 > 0$ ne dépendant que de A et B tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_1[$ et pour tout $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$

$$\frac{d\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]}{dt} \leqslant -\varepsilon C_4 \mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)].$$

(f) En déduire que

$$\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)] \leqslant \mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(0)]e^{-\varepsilon C_4 t}, \forall t \in [0, +\infty[.$$

3. Déduire des questions précédentes qu'il existe des constantes $K > 0$ et $c > 0$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\|X_k(t)\| \leqslant Ke^{-ct}\|c_k(w_0)\|.$$

4. Conclure.

Dans ce problème, on a démontré que, sous la condition de Kalman sur la paire de matrices (A, B) (i.e. la propriété **[d]** *de la Partie II), le système hyperbolique linéaire (4) est hypocoercif : ses solutions ne vérifient pas forcément une inégalité de coercivité, c'est-à-dire*

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|_2^2 \leqslant -c\|w(t)\|_2^2, \forall t \in [0, +\infty), \text{ avec } c > 0,$$

(où $\|.\|_2$ désigne la norme usuelle sur $L^2(0, 2\pi)$) mais elles convergent néanmoins exponentiellement vite vers zéro dans $L^2(0, 2\pi)$. La preuve de la convergence exponentielle repose sur la recherche d'une norme N, équivalente à la norme $\|.\|_2$, pour laquelle on a l'inégalité

$$\frac{dN[w(t)]^2}{dt} \leqslant -cN[w(t)]^2, \forall t \in [0, +\infty), \text{ avec } c > 0.$$

Fin de l'épreuve