

# Classe préparatoire PTSI

## Programme de mathématiques

### Table des matières

<b>Objectifs de formation</b>	<b>2</b>
Description et prise en compte des compétences	2
Unité de la formation scientifique	3
Architecture et contenu du programme	4
Organisation du texte	4
Usage de la liberté pédagogique	5
 <b>Premier semestre</b>	 <b>6</b>
Raisonnement et vocabulaire ensembliste	6
Nombres complexes et trigonométrie	7
Calculs algébriques	9
Techniques fondamentales de calcul en analyse	9
A - Inégalités dans $\mathbb{R}$	9
B - Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes	10
C - Primitives et équations différentielles linéaires	11
Nombres réels et suites numériques	12
Limites, continuité et dérivabilité	13
A - Limites et continuité	13
B - Dérivabilité	15
Systèmes linéaires et calcul matriciel	16
A - Systèmes linéaires	16
B - Calcul matriciel	17
Entiers naturels et dénombrement	19
A - Rudiments d'arithmétique dans $\mathbb{N}$	19
B - Dénombrement	19
 <b>Deuxième semestre</b>	 <b>20</b>
Géométrie du plan et de l'espace	20
A- Géométrie du plan	20
B- Géométrie de l'espace	21
C- Exemples de transformations vectorielles du plan ou de l'espace	22
Polynômes	22
Espaces vectoriels et applications linéaires	23
A - Espaces vectoriels	23
B - Espaces vectoriels de dimension finie	24
C - Applications linéaires	25
Matrices et déterminants	26
A - Matrices	26
★ B - Déterminants	27
Intégration	28
Analyse asymptotique	29
Séries numériques	30
Probabilités	31
A - Généralités	31
B - Variables aléatoires sur un univers fini	32

Le programme de mathématiques de PTSI s'inscrit entre deux continuités : en amont avec les programmes rénovés du lycée, en aval avec les enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études universitaires. Il est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, et aussi pour leur permettre de se former tout au long de la vie.

Le programme du premier semestre est conçu de façon à viser trois objectifs majeurs :

- assurer la progressivité du passage aux études supérieures, en tenant compte des nouveaux programmes du cycle terminal de la filière S, dont il consolide et élargit les acquis ;
- consolider la formation des étudiants dans les domaines de la logique, du raisonnement et des techniques de calcul, qui sont des outils indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines scientifiques ;
- présenter des notions nouvelles riches, de manière à susciter l'intérêt des étudiants.

## Objectifs de formation

La formation mathématique en classe préparatoire scientifique vise deux objectifs :

- l'acquisition d'un solide bagage de connaissances et de méthodes permettant notamment de passer de la perception intuitive de certaines notions à leur appropriation, afin de pouvoir les utiliser à un niveau supérieur, en mathématiques et dans les autres disciplines. Ce degré d'appropriation suppose la maîtrise du cours, c'est-à-dire des définitions, énoncés et démonstrations des théorèmes figurant au programme ;
- le développement de compétences utiles aux scientifiques, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs ou enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour les résoudre, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.

Pour répondre à cette double exigence, et en continuité avec les programmes de mathématiques du lycée, les programmes des classes préparatoires définissent un corpus de connaissances et de capacités, et explicitent six grandes compétences qu'une activité mathématique bien conçue permet de développer :

- **s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer à l'écrit et à l'oral** : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

## Description et prise en compte des compétences

### S'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies

Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.

Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

### Modéliser

Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement

qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie ou des probabilités. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles, mathématiques et informatique).

### **Représenter**

Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique ; un problème de probabilités peut recourir à un arbre, un tableau, des ensembles. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

### **Raisonnement, argumenter**

La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

### **Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique**

Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.

Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

### **Communiquer à l'écrit et à l'oral**

La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

## **Unité de la formation scientifique**

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les probabilités utilisent le vocabulaire ensembliste et illustrent certains résultats d'analyse.

Selon Galilée, fondateur de la science expérimentale, le grand livre de la nature est écrit en langage mathématique. Il n'est donc pas surprenant que les mathématiques interagissent avec des champs de connaissances partagés par d'autres disciplines. La globalité et la complexité du réel exigent le croisement des regards disciplinaires. Aussi le programme valorise-t-il l'interprétation des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire, de la géométrie et des probabilités en termes

de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure de grandeurs, incertitudes...)

La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il peut s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un contexte historique et social donné, une problématique spécifique et la construction, pour la résoudre, d'outils mathématiques.

## Architecture et contenu du programme

L'année est découpée en deux semestres. À l'intérieur de chaque semestre, un équilibre est réalisé entre les différents champs du programme : analyse, algèbre, géométrie. S'y ajoute, au deuxième semestre, une introduction limitée d'un enseignement de probabilités visant à consolider les notions figurant dans le programme de Terminale S et à préparer celles qui seront ultérieurement introduites dans les grandes écoles ou les universités.

L'étude de chaque domaine permet de développer des aptitudes au raisonnement et à la modélisation et d'établir des liens avec les autres disciplines.

En cohérence avec l'introduction d'un enseignement d'algorithmique au lycée, le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants. Ceux-ci doivent également savoir utiliser les fonctionnalités graphiques des calculatrices et des logiciels.

Afin de contribuer au développement des compétences de modélisation et de représentation, le programme préconise le recours à des figures géométriques pour aborder l'algèbre linéaire, les espaces euclidiens, les fonctions de variable réelle. Les notions de géométrie affine et euclidienne étudiées au lycée sont reprises dans un cadre plus général.

Le programme d'algèbre comprend deux volets. Le premier est l'étude de l'arithmétique des entiers naturels et des polynômes à une indéterminée. Le second, nettement plus volumineux, est consacré aux notions de base de l'algèbre linéaire, pour laquelle un équilibre est réalisé entre les points de vue géométrique et numérique. Il importe de souligner le caractère général des méthodes linéaires, notamment à travers leurs interventions en analyse et en géométrie.

Le programme d'analyse est centré autour des concepts fondamentaux de fonction et de suite. Les interactions entre les aspects discret et continu sont mises en valeur. Le programme d'analyse combine l'étude de problèmes qualitatifs et quantitatifs, il développe conjointement l'étude du comportement global de suite ou de fonction avec celle de leur comportement local ou asymptotique. À ce titre, les méthodes de l'analyse asymptotique font l'objet d'un chapitre spécifique, qui est exploité ultérieurement dans l'étude des séries. Pour l'étude des solutions des équations, le programme allie les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact et les méthodes d'approximation.

La pratique de calculs simples permet aux étudiants de s'approprier de manière effective les notions du programme. Le choix a donc été fait d'introduire très tôt un module substantiel visant à consolider les pratiques de calcul (dérivation des fonctions, calcul de primitives, résolution de certains types d'équations différentielles). Les théories sous-jacentes sont étudiées ultérieurement, ce qui doit en faciliter l'assimilation.

Les étudiants doivent savoir mettre en œuvre directement (c'est-à-dire sans recourir à un instrument de calcul), sur des exemples simples, un certain nombre de méthodes de calcul, mais aussi connaître leur cadre d'application et la forme des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

L'enseignement des probabilités se place dans le cadre des univers finis. Il a vocation à interagir avec le reste du programme. La notion de variable aléatoire permet d'aborder des situations réelles nécessitant une modélisation probabiliste.

Le volume global du programme a été conçu pour libérer des temps dédiés à une mise en activité effective des étudiants, quel que soit le contexte proposé (cours, travaux dirigés).

## Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement que des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.

À l'intérieur de chaque semestre, le programme est décliné en chapitres. Chaque chapitre comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. À l'intérieur de chaque semestre, le professeur conduit en toute liberté, dans le respect de la cohérence de la formation globale, l'organisation de son enseignement et le choix de ses méthodes. En particulier,

la chronologie retenue dans la présentation des différents chapitres de chaque semestre ne doit pas être interprétée comme un modèle de progression. Cependant, la progression retenue au cours du premier semestre doit respecter les objectifs de l'enseignement dispensé au cours de cette période. Ces objectifs sont détaillés dans le bandeau qui suit le titre « Premier semestre ».

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents chapitres ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux ou dans la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit en particulier des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme.

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.

Au deuxième semestre, les paragraphes et les phrases situées entre ★ concernent uniquement les étudiants ayant choisi de suivre l'option PSI, qui bénéficient d'une heure en complément. Cela concerne notamment la totalité du sous-chapitre « Déterminants ».

Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, il convient d'en aborder l'enseignement en coordination avec les autres disciplines scientifiques.

Les liens avec les disciplines scientifiques et technologiques sont identifiés par le symbole  $\Leftrightarrow$  PC pour la physique et la chimie,  $\Leftrightarrow$  SI pour les sciences industrielles de l'ingénieur et  $\Leftrightarrow$  I pour l'informatique.

On pourra aussi se reporter à l'appendice aux programmes *Outils mathématiques pour la physique-chimie*.

## Usage de la liberté pédagogique

Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :

- pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants. Le choix des problématiques et des méthodes de résolution favorise cette mise en activité;
- didacticien, il choisit le contexte favorable à l'acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective d'une problématique avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, mais aussi des questions d'actualité ou des débats d'idées, permet de motiver son enseignement.

# Premier semestre

Le premier semestre vise deux objectifs majeurs :

- aménager un passage progressif de la classe de Terminale à l'enseignement supérieur en commençant par consolider et approfondir les connaissances des bacheliers. À ce titre, le chapitre « Raisonnement et vocabulaire ensembliste » regroupe des notions de logique et d'algèbre générale dont la plupart ont été mises en place au lycée. Il s'agit de les consolider et de les structurer afin qu'elles soient maîtrisées par les étudiants à la fin du premier semestre. Ce chapitre n'a pas vocation à être enseigné d'un seul tenant et en tout début de semestre.

Le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse » prend lui aussi appui sur les acquis de Terminale. Il est axé sur la *pratique* des techniques de l'analyse réelle, basée sur l'application de théorèmes qui sont admis à ce stade.

- susciter la curiosité et l'intérêt des étudiants en leur présentant un spectre suffisamment large de problématiques et de champs nouveaux. À ce titre, les chapitres « Nombres réels et suites numériques » et « Limites, continuité, dérivabilité », plus théoriques que les précédents, instaurent les fondements de l'analyse réelle. Y sont en particulier démontrés les théorèmes qui justifient les techniques présentées dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse ».

Le chapitre « Systèmes linéaires et calcul matriciel » a pour objectif d'introduire l'algèbre linéaire en initiant les étudiants aux aspects algorithmiques de l'algèbre linéaire matricielle. La maîtrise de la méthode du pivot de Gauss-Jordan et du calcul matriciel sont des capacités attendues en fin de semestre. Ces notions seront réinvesties avec profit lors du cours d'algèbre linéaire du second semestre (familles libres ou génératrices de  $\mathbb{K}^n$ , calcul du rang...). Le chapitre « Entiers naturels et dénombrement » est une introduction à la combinatoire. Il trouvera un prolongement naturel dans l'étude des probabilités traitée au second semestre.

Les ensembles de nombres usuels  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  sont supposés connus.

## Raisonnement et vocabulaire ensembliste

*Ce chapitre regroupe le vocabulaire, les notations et les modes de raisonnement nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'un texte mathématique. Ils doivent être introduits de manière progressive et être acquis en fin de premier semestre.*

*Le programme se limite à une approche naïve des notions d'ensemble et d'application. En particulier, toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est exclue. L'algèbre générale ne figure pas au programme. Plusieurs groupes classiques étant rencontrés en algèbre linéaire, la terminologie associée peut être utilisée mais aucune connaissance théorique sur cette structure n'est exigible.*

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Rudiments de logique

Quantificateurs.

Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclu.

Implication, contraposition, équivalence.

Modes de raisonnement : raisonnement par récurrence, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.

Toute construction et toute axiomatique de  $\mathbb{N}$  sont hors programme. Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et de condition suffisante.

#### b) Ensembles

Appartenance, inclusion.

Sous-ensembles (ou parties) d'un ensemble, ensemble vide.

Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, complémentaire.

Notations  $\mathbb{C}_E^A$ ,  $\overline{A}$ ,  $E \setminus A$ .

Les étudiants doivent maîtriser le lien entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes.

Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles.

Ensemble des parties d'un ensemble.

**c) Applications et relations d'équivalence**

Application d'un ensemble non vide $E$ dans un ensemble non vide $F$ ; graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de $E$ dans $F$ associe à tout élément de $E$ un unique élément de $F$ . Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et $F^E$ pour l'ensemble des applications de $E$ dans $F$ .
Famille d'éléments d'un ensemble $E$ indexée par un ensemble fini.	
Fonction indicatrice d'une partie $A$ d'un ensemble $E$ .	Notation $\mathbb{1}_A$ .
Restriction.	Notation $f _A$ .
Image directe.	Notation $f(A)$ .
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$ .
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	
Relation d'équivalence, classes d'équivalence.	La notion d'ensemble quotient est hors programme.

**Nombres complexes et trigonométrie**

*L'objectif de ce chapitre est de consolider et d'approfondir les acquis du cycle terminal. Le programme combine plusieurs aspects :*

- équations algébriques (équations du second degré, racines  $n$ -ièmes d'un nombre complexe);
- interprétation géométrique des nombres complexes, utilisation des nombres complexes en géométrie plane;
- exponentielle complexe et applications à la trigonométrie.

*Il est recommandé d'illustrer le cours de nombreuses figures.*

**a) Nombres complexes**

Parties réelle et imaginaire.	La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible.
Opérations sur les nombres complexes.	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point du plan, affixe d'un vecteur du plan.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.

**b) Module d'un nombre complexe**

Module.	Interprétation géométrique de $ z - z' $ , cercles et disques.
Relation $ z ^2 = z \bar{z}$ , module d'un produit, d'un quotient.	
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	

**c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie**

Cercle trigonométrique. Paramétrisation par les fonctions circulaires.	Notation $\cup$ . Les étudiants doivent savoir retrouver des formules du type $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et résoudre des équations et inéquations trigonométriques en s'aidant du cercle trigonométrique.
Définition de $e^{it}$ pour $t$ réel.	
Si $t$ et $t'$ sont deux réels, alors : $e^{i(t+t')} = e^{it} e^{it'}$ .	Factorisation de $1 \pm e^{it}$ . Les étudiants doivent savoir factoriser des expressions du type $\cos(p) + \cos(q)$ .
Formules exigibles : $\cos(a \pm b)$ , $\sin(a \pm b)$ , $\cos(2a)$ , $\sin(2a)$ , $\cos(a) \cos(b)$ , $\sin(a) \sin(b)$ , $\cos(a) \sin(b)$ .	
Fonction tangente.	Notation $\tan$ .
Formule $\tan(a \pm b)$ .	

Formules d'Euler :

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Linéarisation, calcul de  $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ , de  $\sum_{k=1}^n \sin(kt)$ .

Formule de Moivre.

**d) Arguments d'un nombre complexe non nul**Écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme  $re^{i\theta}$  avec  $r > 0$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Arguments d'un nombre complexe non nul.

Relation de congruence modulo  $2\pi$  sur  $\mathbb{R}$ .

Argument d'un produit, d'un quotient.

Transformation de  $a \cos(t) + b \sin(t)$  en  $A \cos(t - \varphi)$ . $\Leftrightarrow$  PC et SI : amplitude et phase.**e) Équation du second degré**

Racines carrées d'un nombre complexe.

Résolution des équations du second degré, discriminant.

Somme et produit des racines d'une équation du second degré.

**f) Racines  $n$ -ièmes**Description des racines  $n$ -ièmes de l'unité.Notation  $\mathbb{U}_n$ .Équation  $z^n = a$ .

Représentation géométrique des solutions.

**g) Exponentielle complexe**Définition de  $e^z$  pour  $z$  complexe:  $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$ .Notations  $\exp(z)$ ,  $e^z$ . $\Leftrightarrow$  PC et SI : définition d'une impédance complexe en régime sinusoïdal.

Exponentielle d'une somme.

Pour tous  $z$  et  $z'$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\exp(z) = \exp(z')$  si et seulement si  $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$ .**h) Nombres complexes et géométrie plane**

Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité au moyen d'affixes.

Transformation  $z \mapsto e^{i\theta} z$ ; rotation plane de centre  $O$  et d'angle  $\theta$ .

Il s'agit d'introduire le concept de transformation du plan, dont l'étude ne figure pas aux programmes des classes antérieures.

Transformation  $z \mapsto z + b$ ; interprétation en termes de translation.Transformation  $z \mapsto kz$ , ( $k \in \mathbb{R}^*$ ); homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$ .Transformation  $z \mapsto \bar{z}$ ; interprétation en termes de symétrie axiale.



## Calculs algébriques

Ce chapitre a pour but de présenter quelques notations et techniques fondamentales de calcul algébrique, notamment en vue de l'enseignement de la combinatoire et des probabilités.

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes.

Notations  $\sum_{i \in I} a_i$ ,  $\sum_{i=1}^n a_i$ ,  $\prod_{i \in I} a_i$ ,  $\prod_{i=1}^n a_i$ .

Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.

Somme d'une progression arithmétique ou géométrique finie de nombres complexes.

Factorisation de  $a^n - b^n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.

Sommes triangulaires.

#### b) Coefficients binomiaux et formule du binôme

Factorielle. Coefficients binomiaux.

Notation  $\binom{n}{p}$ .

Relation  $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ .

Formule et triangle de Pascal.

Lien avec la méthode d'obtention des coefficients binomiaux utilisée en classe de Première.

Formule du binôme dans  $\mathbb{C}$ .

## Techniques fondamentales de calcul en analyse

Le point de vue adopté dans ce chapitre est principalement pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre des techniques de l'analyse, en particulier celles de majoration. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul différentiel ou intégral utilisées sont différées à un chapitre ultérieur. Cette appropriation en deux temps est destinée à faciliter les apprentissages.

Les objectifs de formation sont les suivants :

- une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités ;
- l'introduction de fonctions pour établir des inégalités ;
- la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;
- le calcul de dérivées et de primitives ;
- la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;
- l'application des deux points précédents aux équations différentielles.

Les étudiants doivent connaître les principales techniques de calcul et savoir les mettre en pratique sur des cas simples. Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

### A - Inégalités dans $\mathbb{R}$

#### CONTENUS

Relation d'ordre sur  $\mathbb{R}$ . Compatibilité avec les opérations.

Intervalles de  $\mathbb{R}$ .

Valeur absolue. Inégalité triangulaire.

Parties majorées, minorées, bornées.

Majorant, minorant ; maximum, minimum.

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients.

Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type  $|x - a| \leq b$ .

## B - Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.

Représentation graphique d'une fonction  $f$  à valeurs réelles.

Graphes des fonctions  $x \mapsto f(x) + a$ ,  $x \mapsto f(x + a)$ ,  
 $x \mapsto f(a - x)$ ,  $x \mapsto f(ax)$ ,  $x \mapsto af(x)$ .

Résolution graphique d'équations et d'inéquations du type  $f(x) = \lambda$  et  $f(x) \leq \lambda$ .

Interprétation géométrique de ces propriétés.

Parité, imparité, périodicité.

Somme, produit, composée.

Monotonie.

Bijektivité, réciproque d'une bijection.

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Graphe d'une réciproque.

Traduction géométrique de ces propriétés.

Une fonction  $f$  est bornée si et seulement si  $|f|$  est majorée.

#### b) Dérivation

Équation de la tangente en un point.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.

Ces résultats sont admis à ce stade.

$\Leftrightarrow$  SI : étude cinématique.

$\Leftrightarrow$  PC : exemples de calculs de dérivées partielles. À ce stade, toute théorie sur les fonctions de plusieurs variables est hors programme.

Tableau de variation.

Dérivée d'une réciproque.

Interprétation géométrique de la dérivabilité et du calcul de la dérivée d'une bijection réciproque.

Dérivées d'ordre supérieur.

#### c) Étude d'une fonction

Détermination des symétries et des périodicités afin de réduire le domaine d'étude, tableau de variations, asymptotes verticales et horizontales, tracé du graphe.

Application à la recherche d'extremums et à l'obtention d'inégalités.

#### d) Fonctions usuelles

Étude des fonctions exponentielle, cosinus et sinus hyperboliques, logarithme népérien, puissances.

Dérivée, variation et graphe.

Les fonctions puissances sont définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur  $\mathbb{R}_-^*$ .

Relations  $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ ,  $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ ,  $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ .

Fonction logarithme décimal.

Notation  $\log$  ou  $\log_{10}$ .

$\Leftrightarrow$  PC : pH.

$\Leftrightarrow$  SI : représentation des diagrammes de Bode.

Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Fonctions sinus, cosinus, tangente.

$\Leftrightarrow$  PC et SI.

Fonctions circulaires réciproques.

Notations Arcsin, Arccos, Arctan.

La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme.

#### e) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.

La dérivée est définie via les parties réelle et imaginaire.

Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.

Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

Dérivée de  $\exp(\varphi)$  où  $\varphi$  est une fonction dérivable à valeurs complexes.

$\Leftrightarrow$  PC et SI : électrocinétique.

**a) Calcul de primitives**

Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes.

Primitives des fonctions puissances, cosinus, sinus, tangente, exponentielle, logarithme,

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dérivée de  $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$  où  $f$  est continue.

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.

Intégration par parties pour des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Changement de variable : si  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et si  $f$  est continue sur  $\varphi(I)$ , alors pour tous  $a$  et  $b$  dans  $I$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles.

Les étudiants doivent savoir utiliser les primitives de  $x \mapsto e^{\lambda x}$  pour calculer celles de  $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$  et  $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$ .

$\Leftrightarrow$  PC et SI : cinématique.

Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type

$$x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

et reconnaître les dérivées de fonctions composées.

Résultat admis à ce stade.

On définit à cette occasion la classe  $\mathcal{C}^1$ . Application au calcul de primitives.

**b) Équations différentielles linéaires du premier ordre**

Notion d'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions continues définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles ou complexes.

Résolution d'une équation homogène.

Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Principe de superposition.

Méthode de la variation de la constante.

Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Équation homogène associée.

Cas particulier où la fonction  $a$  est constante.

$\Leftrightarrow$  PC : régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.

$\Leftrightarrow$  PC et SI : modélisation des circuits électriques RC, RL et de systèmes mécaniques linéaires.

**c) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants**

Notion d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

où  $a$  et  $b$  sont des scalaires et  $f$  est une application continue à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Résolution de l'équation homogène.

Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

Équation homogène associée.

Si  $a$  et  $b$  sont réels, description des solutions réelles.

Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme  $x \mapsto Ae^{\lambda x}$  avec  $(A, \lambda) \in \mathbb{C}^2$ ,  $x \mapsto B \cos(\omega x)$  et  $x \mapsto B \sin(\omega x)$  avec  $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$ .

$\Leftrightarrow$  PC : régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.

Principe de superposition. Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme. ⇔ PC et SI : modélisation des circuits électriques LC, RLC et de systèmes mécaniques linéaires.
--	--

## Nombres réels et suites numériques

*L'objectif est d'énoncer les propriétés fondamentales de la droite réelle, et de les appliquer à l'étude des suites, qui interviennent en mathématiques tant pour leur intérêt pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximation de nombres réels). On distingue les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).*

### a) Ensembles usuels de nombres

Entiers naturels, entiers relatifs, nombres décimaux, rationnels. Droite réelle. La relation d'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}$ : majorant, minorant, maximum, minimum. Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ . Partie entière. Approximations décimales.	La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme.  Notation $\lfloor x \rfloor$ . Valeurs décimales approchées à la précision $10^{-n}$ par défaut et par excès.
Une partie $X$ de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si, pour tous $a$ et $b$ dans $X$ , on a $[a, b] \subset X$ .	

### b) Généralités sur les suites réelles

Modes de définition d'une suite. Monotonie. Suite minorée, majorée, bornée.	De façon explicite, implicite ou par récurrence. Une suite $(u_n)$ est bornée si et seulement si $( u_n )$ est majorée. Exemples d'étude de la monotonie d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ .
Suites stationnaires. Suites arithmétiques, suites géométriques.	Les étudiants doivent connaître une méthode de calcul du terme général d'une suite définie par $u_{n+1} = au_n + b$ . La démonstration sera faite dans le cours d'algèbre linéaire.
Suites récurrentes linéaires d'ordre deux.	

### c) Limite d'une suite réelle

Limite finie ou infinie d'une suite.	Notation $u_n \rightarrow \ell$ . Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Lien avec la définition vue en classe de Terminale. Les étudiants doivent savoir démontrer l'existence d'une limite réelle $\ell$ en majorant $ u_n - \ell $ .
Unicité de la limite. Suite convergente, suite divergente. Toute suite réelle convergente est bornée. Opérations sur les limites : combinaisons linéaires, produit, quotient. Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.	Notation $\lim u_n$ .

**d) Théorèmes d'existence d'une limite**

Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.  
Théorème de la limite monotone.  
Théorème des suites adjacentes.

**e) Suites extraites**

Suites extraites d'une suite.	La notion de valeur d'adhérence est hors programme. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est hors programme.
Si une suite possède une limite (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation des suites extraites pour montrer la divergence d'une suite.

**f) Brève extension aux suites complexes**

Convergence d'une suite complexe. Suites complexes bornées ; toute suite complexe convergente est bornée. Opérations sur les suites convergentes : combinaisons linéaires, produit, quotient.	Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.
---	---

**Limites, continuité et dérivabilité**

*Ce chapitre est divisé en deux parties, consacrées aux limites et à la continuité pour la première, au calcul différentiel pour la seconde. On y formalise les résultats qui ont été utilisés d'un point de vue calculatoire dans le premier chapitre d'analyse.*

*Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.*

*Les fonctions sont définies sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point et, sauf dans les paragraphes A-d) et B-d), sont à valeurs réelles.*

*Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction  $f$  définie sur  $I$  est vraie au voisinage de  $a$  si elle est vraie sur l'intersection de  $I$  avec un intervalle ouvert centré sur  $a$  si  $a$  est réel, avec un intervalle  $[A, +\infty[$  si  $a = +\infty$ , avec un intervalle  $]-\infty, A]$  si  $a = -\infty$ .*

**A - Limites et continuité**

*L'essentiel du paragraphe a) consiste à adapter au cadre continu les notions déjà abordées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.*

*Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de pouvoir disposer d'outils efficaces (développements limités).*

**a) Limite d'une fonction en un point**

Étant donné un point $a$ appartenant à $I$ ou extrémité de $I$ , limite finie ou infinie d'une fonction en $a$ . Limite finie ou infinie d'une fonction en $\pm\infty$ .	Notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ , $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \ell$ . Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Les étudiants doivent savoir démontrer l'existence d'une limite réelle $\ell$ en majorant $ f(x) - \ell $ .
Unicité de la limite. Si $f$ admet une limite finie en $a$ alors $f$ est bornée au voisinage de $a$ . Limite à droite, limite à gauche.	Notation $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .
Extension de la notion de limite en $a$ lorsque la fonction est définie sur $I \setminus \{a\}$ . Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en $a$ .	Notations $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .
	Adaptation des énoncés relatifs aux suites.

Image d'une suite de limite  $a$  par une fonction admettant une limite en  $a$ .

Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.

Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite  $+\infty$ ) et de majoration (limite  $-\infty$ ).

Théorème de la limite monotone.

Démonstration non exigible.

### b) Continuité en un point

Continuité de  $f$  en un point  $a$  de  $I$ .

La fonction  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si elle admet une limite finie en  $a$ .

Continuité à droite et à gauche.

Prolongement par continuité en un point.

Si  $a$  est une extrémité de  $I$  n'appartenant pas à  $I$ ,  $f$  admet une limite finie en  $a$  si et seulement si elle est prolongeable par continuité en  $a$ .

Image d'une suite de limite  $a$  par une fonction continue en  $a$ .

Application aux suites définies par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient, composition.

### c) Continuité sur un intervalle

Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient, composée.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Image d'un intervalle par une fonction continue.

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Toute fonction  $f$  continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $f(I)$ , et sa réciproque est continue et strictement monotone sur l'intervalle  $f(I)$ , et de même monotonie que  $f$ .

$\Leftrightarrow$  I : application de l'algorithme de dichotomie à la recherche d'un zéro d'une fonction continue.

La démonstration est hors programme.

### d) Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Limite de  $f$  en  $a$ , continuité de  $f$  en  $a$ , continuité de  $f$  sur un intervalle  $I$ .

Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Fonctions bornées au voisinage de  $a$ .

Toute fonction admettant une limite finie en  $a$  est bornée au voisinage de  $a$ .

Opérations sur les fonctions admettant une limite finie en  $a$ , continues en  $a$  ou continues sur un intervalle  $I$  : combinaisons linéaires, produit, quotient.

**a) Nombre dérivé, fonction dérivée**

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.

Développement limité à l'ordre 1.

Interprétation géométrique.  $\Leftrightarrow$  SI: identification d'un modèle de comportement au voisinage d'un point de fonctionnement.

$\Leftrightarrow$  SI: représentation graphique de la fonction sinus cardinal au voisinage de 0.

$\Leftrightarrow$  I: méthode de Newton.

La dérivabilité entraîne la continuité.

Dérivabilité à gauche, à droite.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.

Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées: combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.

Tangente au graphe d'une réciproque.

La dérivabilité entraîne la continuité.

À ce stade, on peut écrire le reste sous la forme  $(x - a)\varepsilon(x - a)$  et n'introduire la notation  $o$  que plus tard.

Tangente au graphe de  $f$  au point d'abscisse  $a$ .

Dérivabilité à droite, à gauche.

Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.

Opérations sur les fonctions dérivables en un point, dérivables sur un intervalle: combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque.

**b) Propriétés des fonctions dérivables**

Extremum local. Condition nécessaire en un point intérieur.

Théorème de Rolle.

Égalité des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis: si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $|f'|$  est bornée par  $M$  sur  $I$ , alors  $f$  est  $M$ -lipschitzienne sur  $I$ .

Interprétations géométrique et cinématique.

La notion de fonction lipschitzienne est introduite à ce stade; elle n'appelle aucun développement supplémentaire.

Application aux suites définies par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

$\Leftrightarrow$  I: algorithme de recherche du point fixe pour une fonction contractante.

Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes parmi les fonctions dérivables.

Théorème de la limite de la dérivée: si  $f$  est dérivable sur  $I \setminus \{a\}$ , continue sur  $I$  et si  $f'(x)$  tend vers  $\ell$  (réel ou infini) lorsque  $x$  tend vers  $a$ , alors  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  tend vers  $\ell$  lorsque  $x$  tend vers  $a$ .

Interprétation géométrique.

Si  $\ell$  est un nombre réel, alors  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) = \ell$ .

**c) Fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$**

Pour  $k$  dans  $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ , fonction de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ .

Opérations sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ : combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composée, réciproque.

Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

**d) Fonctions complexes**

Brève extension des définitions et résultats précédents.

Caractérisation de la dérivabilité en termes de partie réelle et imaginaire.

Interprétation cinématique.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Le résultat, admis à ce stade, sera justifié dans le chapitre « Intégration ».  
Il convient de montrer par un contre-exemple que le théorème de Rolle ne s'étend pas.

## Systèmes linéaires et calcul matriciel

*Ce chapitre est à concevoir comme une initiation aux structures algébriques et une préparation à l'algèbre linéaire « abstraite » qui sera étudiée au second semestre.*

*La problématique de départ est la résolution des systèmes linéaires. Elle est à la fois familière des étudiants – ils l'ont pratiquée dans l'enseignement secondaire pour de petites dimensions, par exemple en géométrie – et motivante par le nombre important de problèmes se ramenant à la résolution d'un système linéaire (méthode des différences finies, méthode des moindres carrés, etc). L'objectif majeur du sous-chapitre « A - Systèmes linéaires » est la justification et la mise en œuvre de l'algorithme de Gauss-Jordan de résolution d'un système linéaire.*

*La recherche d'une méthode systématique de résolution d'un système linéaire par cet algorithme conduit naturellement au calcul matriciel qui recèle à la fois des propriétés inhabituelles pour les étudiants (existence de diviseurs de 0, non commutativité) et des propriétés analogues à celles des ensembles de nombres (distributivité, etc.) qu'il convient de mettre en évidence.*

*L'ordre d'exposition choisi ci-dessous n'est nullement impératif. On pourra aussi bien commencer par introduire le calcul matriciel puis l'appliquer à la théorie des systèmes linéaires. On veillera à respecter les objectifs de formation suivants :*

- Familiariser les étudiants avec les différentes représentations des solutions d'un système linéaire.
- Entraîner au calcul matriciel. On évitera cependant tout excès de technicité et on se limitera à des systèmes et des matrices de taille raisonnable dans les applications numériques.
- Consolider la formation à l'algorithmique.

*Dans ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $n$  et  $p$  appartiennent à  $\mathbb{N}^*$ .*

### A - Systèmes linéaires

#### a) Généralités sur les systèmes linéaires

Équation linéaire à  $p$  inconnues. Système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues.

Système homogène associé à un système linéaire.

Matrice  $A$  d'un système linéaire; matrice augmentée  $(A|B)$  où  $B$  est la colonne des seconds membres.

Opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice : échange des lignes  $L_i$  et  $L_j$ , ajout de  $\lambda \cdot L_j$  à  $L_i$  pour  $i \neq j$ , multiplication de  $L_i$  par  $\lambda \neq 0$ .

Deux systèmes sont dits équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Deux systèmes équivalents ont le même ensemble de solutions.

Deux matrices sont dites équivalentes par lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes.

Si l'on passe d'un système  $\mathcal{S}$  à un autre système  $\mathcal{S}'$  par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes, la matrice augmentée de  $\mathcal{S}'$  s'obtient en effectuant la même suite d'opérations élémentaires sur la matrice augmentée de  $\mathcal{S}$ .

Interprétations géométriques dans le plan et dans l'espace.

On introduit les matrices comme tableaux rectangulaires de nombres appartenant à  $\mathbb{K}$ .

On emploiera les notations suivantes:  $L_i \leftrightarrow L_j$ ,  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  et  $L_i \leftarrow \lambda L_i$ .

Notation  $A \underset{L}{\sim} A'$ .

Ce résultat justifie la présentation matricielle de la résolution d'un système linéaire.



**b) Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss-Jordan**

Une matrice est dite échelonnée par lignes si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- i. Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes le sont aussi;
- ii. À partir de la deuxième ligne, dans chaque ligne non nulle, le premier coefficient non nul à partir de la gauche est situé à droite du premier coefficient non nul de la ligne précédente.

On appelle pivot le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Une matrice échelonnée en lignes est dite échelonnée réduite par lignes si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

Un schéma « en escalier » illustre la notion de matrice échelonnée.

La démonstration de l'unicité n'est pas exigible.

$\Leftrightarrow$  I : algorithme du pivot de Gauss-Jordan.

Pour des systèmes de taille  $n > 3$  ou  $p > 3$ , on utilise l'outil informatique. On met en évidence sur un exemple l'instabilité numérique de la méthode due aux erreurs d'arrondis.

**c) Ensemble des solutions d'un système linéaire**

Inconnues principales, inconnues secondaires ou paramètres.

Système incompatible. Système compatible.

Rang d'un système linéaire.

Le nombre de paramètres est égal à la différence du nombre d'inconnues et du rang.

Expression des solutions d'un système linéaire.

Application aux problèmes d'intersection en géométrie du plan et de l'espace.

$\Leftrightarrow$  PC et SI : résolution dans le cas  $n = p = 2$ .

Le rang est défini comme nombre de pivots de la réduite échelonnée par lignes de la matrice du système homogène associé.

Description des solutions au moyen d'une solution particulière et des solutions du système homogène associé.

**B - Calcul matriciel**

*L'objectif visé est la décomposition de toute matrice rectangulaire  $A$  en un produit de la forme  $A = ER$  où  $R$  est échelonnée réduite par lignes et  $E$  est un produit de matrices élémentaires.*

**a) Ensembles de matrices**

Ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

Opérations sur les matrices : combinaison linéaire, multiplication matricielle.

Application à l'écriture matricielle d'un système linéaire. Propriétés des opérations matricielles.

Si  $X$  est une matrice colonne,  $AX$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$ .

La  $j$ -ème colonne de  $AB$  est le produit de  $A$  par la  $j$ -ème colonne de  $B$  et la  $i$ -ème ligne de  $AB$  est le produit de la  $i$ -ème ligne de  $A$  par  $B$ .

Il existe des matrices non nulles dont le produit est nul.

Ensemble  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  
 Puissances d'une matrice carrée.  
 Formule du binôme.  
 Matrices diagonales, triangulaires.

Notation  $I_n$  pour la matrice identité.  
 Le produit matriciel n'est pas commutatif.  
 Stabilité par les opérations.

### b) Opérations élémentaires de pivot et calcul matriciel

Matrices élémentaires: matrices de transvection, de transposition et de dilatation. Inversibilité des matrices élémentaires.

Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice au moyen des matrices élémentaires.

Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan: pour toute matrice rectangulaire  $A$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ , il existe une matrice  $E$  produit de matrices élémentaires et une unique matrice échelonnée réduite  $R$  telles que  $A = ER$ .

Brève extension des définitions et des résultats aux opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice.

Notation  $A \underset{C}{\sim} A'$ .

### c) Matrices carrées inversibles

Matrices carrées inversibles. Inverse.

On introduit la terminologie « groupe linéaire », et la notation  $GL_n(\mathbb{K})$ , pour désigner l'ensemble des matrices inversibles de taille  $n$ , mais tout développement sur la notion de groupe est hors programme.

Inverse d'un produit de matrices inversibles.

Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , équivalences des propriétés suivantes:

- i.  $A$  est inversible;
- ii.  $A \underset{L}{\sim} I_n$ ;
- iii. Le système  $AX = 0$  n'admet que la solution nulle;
- iv. Pour tout  $B$ , le système  $AX = B$  admet une unique solution;
- v. Pour tout  $B$ , le système  $AX = B$  admet au moins une solution.

Calcul de l'inverse d'une matrice carrée par résolution d'un système linéaire et par la méthode du pivot de Gauss-Jordan.

### d) Transposition

Transposée d'une matrice.  
 Transposée d'une somme, d'un produit, d'un inverse.

Notations  $A^T$ ,  ${}^t A$ .  
 Matrices symétriques et antisymétriques.

## Entiers naturels et dénombrement

### A - Rudiments d'arithmétique dans $\mathbb{N}$

Ce sous-chapitre a pour objectif de consolider la connaissance des nombres entiers et de mettre en œuvre des algorithmes élémentaires. L'ensemble  $\mathbb{N}$  est supposé connu. Toute axiomatique de  $\mathbb{N}$  est hors programme.

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Multiples et diviseurs d'un entier. Division euclidienne dans  $\mathbb{N}$ .

PGCD de deux entiers naturels non nuls.

PPCM.

Définition d'un nombre premier. Existence et unicité de la décomposition d'un entier supérieur ou égal à 2 en produit de facteurs premiers.

$\Leftrightarrow$  I : algorithme d'Euclide.

Les démonstrations de l'existence et de l'unicité sont hors programme.

$\Leftrightarrow$  I : crible d'Eratosthène.

### B - Dénombrement

Ce sous-chapitre a pour but de présenter les bases du dénombrement, notamment en vue de l'étude des probabilités. Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- on adopte un point de vue intuitif pour la définition d'un ensemble fini et la notion de cardinal ;
- parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration ;
- l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas attendu du programme.

Ce chapitre est également l'occasion d'aborder les coefficients binomiaux sous un autre angle que celui du chapitre « Calculs algébriques ».

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Cardinal d'un ensemble fini

Cardinal d'un ensemble fini.

Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité.

Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective, si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque de deux ensembles finis, complémentaire et produit cartésien.

Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini.

Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.

Notations  $|A|$ ,  $\text{Card}(A)$ ,  $\#A$ .

La formule du crible est hors programme.

#### b) Listes et combinaisons

Nombre de  $p$ -listes (ou  $p$ -uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal  $n$ . Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal  $p$  dans un ensemble de cardinal  $n$ .

Nombre de permutations d'un ensemble de cardinal  $n$ .

Nombre de parties à  $p$  éléments (ou  $p$ -combinaisons) d'un ensemble de cardinal  $n$ .

Démonstrations combinatoires des formules de Pascal et du binôme.

## Deuxième semestre

Le deuxième semestre est organisé autour de quatre grands pôles (géométrie du plan et de l'espace, algèbre linéaire, analyse réelle et probabilités). À l'intérieur du semestre, le professeur a la liberté d'organiser son enseignement de la manière qui lui paraît la mieux adaptée.

### Géométrie du plan et de l'espace

À l'issue de la Terminale, les étudiants connaissent le plan géométrique euclidien et l'espace géométrique euclidien de dimension 3 en tant qu'ensembles de points, la façon d'associer à deux points  $A$  et  $B$  le vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , ainsi que les propriétés opératoires usuelles. À ce titre, on pourra utiliser la notation  $B = A + \vec{u}$ , équivalente à  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ .

Dans le prolongement des connaissances acquises dans le cycle terminal du lycée, ce chapitre permet d'illustrer géométriquement la théorie des systèmes linéaires et de renforcer l'intuition géométrique en lien avec l'étude des espaces vectoriels abstraits.

#### A- Géométrie du plan

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<b>a) Modes de repérage</b>	
Coordonnées cartésiennes. Coordonnées polaires d'un point du plan supposé muni d'un repère orthonormal (ou orthonormé).	$\Leftrightarrow$ PC et SI
<b>b) Produit scalaire</b>	
Définition géométrique du produit scalaire: si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors	Interprétation en termes de projection orthogonale. $\Leftrightarrow$ PC et SI
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\  \ \vec{v}\  \cos(\vec{u}, \vec{v})$	
et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ sinon.	
Bilinéarité, symétrie, expression dans une base orthonormale.	Démonstrations non exigibles.
Caractérisation de l'orthogonalité de deux vecteurs.	$\Leftrightarrow$ PC et SI
<b>c) Produit mixte dans le plan orienté</b>	
Définition géométrique: si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors	Interprétation en terme d'aire orientée d'un parallélogramme. La notion d'orientation du plan est admise. $\Leftrightarrow$ PC et SI
$[\vec{u}, \vec{v}] = \ \vec{u}\  \ \vec{v}\  \sin(\vec{u}, \vec{v})$	
et $[\vec{u}, \vec{v}] = 0$ sinon.	
Bilinéarité, antisymétrie, expression dans une base orthonormale directe.	Démonstrations non exigibles.
Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs.	$\Leftrightarrow$ PC et SI
<b>d) Droites</b>	
Paramétrage et équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, par un point et un vecteur normal.	Notations $\text{Vect}(\vec{u})$ et $A + \text{Vect}(\vec{u})$ . Application à des problèmes de régionnement du plan.
Projeté orthogonal d'un point sur une droite.	Application à des calculs de distances. $\Leftrightarrow$ PC et SI
<b>e) Cercles</b>	
Équation cartésienne d'un cercle en repère orthonormal.	Caractérisation du cercle de diamètre $[AB]$ par l'équation $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ . Exemples de problèmes d'intersection.

## B- Géométrie de l'espace

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Modes de repérage

Coordonnées cartésiennes. Coordonnées cylindriques.  $\Leftrightarrow$  PC et SI

#### b) Produit scalaire

Définition géométrique du produit scalaire. Démonstrations hors programme.  
Bilinéarité, symétrie, expression dans une base orthonormale.  $\Leftrightarrow$  PC et SI.

#### c) Produit vectoriel dans l'espace orienté

Définition géométrique du produit vectoriel de deux vecteurs : si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non colinéaires, alors le produit vectoriel de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur  $\vec{n}$  orthogonal au plan  $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ , de norme  $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\vec{u}, \vec{v})|$ , tel que  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$  soit une base directe ; sinon le produit vectoriel est le vecteur nul. Notation  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ .  
La notion d'orientation de l'espace, reposant sur les conventions physiques usuelles, est admise.  $\Leftrightarrow$  PC et SI.  
Interprétation de  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$  comme aire du parallélogramme construit sur  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .  
Bilinéarité, antisymétrie. Démonstrations hors programme.  
Expression dans une base orthonormale directe.  $\Leftrightarrow$  PC et SI.  
Condition de colinéarité de deux vecteurs.

#### d) Produit mixte dans l'espace orienté

Définition du produit mixte de trois vecteurs :  
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$
Interprétation de  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  comme volume orienté du parallélépipède construit sur les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$ .  $\Leftrightarrow$  PC et SI.  
Trilinéarité, antisymétrie. Démonstrations hors programme.  
Expression dans une base orthonormale directe.  
Condition de coplanarité de trois vecteurs.

#### e) Plans et droites

Différents modes de définition d'un plan : par un point et deux vecteurs non colinéaires, un point et un vecteur normal, trois points non alignés. Notations  $\text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$  et  $A + \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ .  $\Leftrightarrow$  PC et SI.  
Représentation paramétrique et équation cartésienne. Application à des problèmes d'intersection et de régionalisation de l'espace.  
Différents modes de définition d'une droite : par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, comme intersection de deux plans. Notations  $\text{Vect}(\vec{u}), A + \text{Vect}(\vec{u})$   
Représentation paramétrique et équations cartésiennes. Application à des calculs de distances.  
Projeté orthogonal d'un point sur une droite ou un plan.  $\Leftrightarrow$  PC et SI.  
Orientation d'une droite et d'un plan de l'espace orienté.

#### f) Sphères

Équation cartésienne d'une sphère en repère orthonormal. Exemples de problèmes d'intersection.

## C- Exemples de transformations vectorielles du plan ou de l'espace

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Exemples dans le plan euclidien

Rotation vectorielle. Matrice dans une base orthonormée directe. Composée de deux rotations, rotation inverse.  
Symétrie orthogonale vectorielle. Matrice dans une base orthonormée directe. Composée de deux symétries orthogonales.

La classification des isométries vectorielles du plan n'est pas au programme.

#### b) Exemples dans l'espace euclidien

Rotation vectorielle d'axe orienté et d'angle donnés. Réflexion. Matrices dans une base adaptée.

$\Leftrightarrow$  PC et SI.  
Toute autre étude est hors programme.

## Polynômes

*L'objectif de ce chapitre est double : manipuler des objets formels et interagir avec l'enseignement de l'algèbre linéaire. Le programme se limite au cas où le corps de base  $\mathbb{K}$  est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .*

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

L'ensemble  $\mathbb{K}[X]$ .  
Opérations : somme, produit, composée.  
Degré d'un élément de  $\mathbb{K}[X]$  ; coefficient dominant et terme de plus haut degré d'un polynôme non nul, polynôme unitaire.  
Degré d'une somme, d'un produit.  
Fonction polynomiale associée à un polynôme.

La construction n'est pas exigible.  
On convient que le degré de 0 est  $-\infty$ .  
Ensemble  $\mathbb{K}_n[X]$  des polynômes de degré au plus  $n$ .

#### b) Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Divisibilité dans  $\mathbb{K}[X]$  ; diviseurs et multiples.  
Division euclidienne d'un élément  $A$  de  $\mathbb{K}[X]$  par un élément  $B$  de  $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ .

#### c) Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Dérivée formelle d'un élément de  $\mathbb{K}[X]$ .  
Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit.  
Dérivée  $k$ -ième d'un polynôme.  
Formule de Taylor.

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , lien avec la dérivée de la fonction polynomiale.

#### d) Racines

Racines (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité.  
Le nombre de racines d'un polynôme  $P$  non nul est majoré par le degré de  $P$ .  
Multiplicité d'une racine. Caractérisation par les dérivées successives.  
Polynôme scindé sur  $\mathbb{K}$ .

**e) Décomposition en produit d'irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  et  $\mathbb{R}[X]$** 

Théorème de d'Alembert-Gauss. Irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$ .  
 Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{C}[X]$ .  
 Description des irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ .  
 Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ .

La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme.

**f) Somme et produit des racines d'un polynôme**

Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.  
 Cas des polynômes du second degré.

Les autres fonctions symétriques élémentaires sont hors programme.  
 Calcul de deux nombres connaissant leur somme et leur produit.

**Espaces vectoriels et applications linéaires**

*Le programme se limite à l'algèbre linéaire sur les corps  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$ . Après l'approche numérique du chapitre « Systèmes linéaires et calcul matriciel » on passe à une vision plus géométrique. Les trois grands thèmes traités sont les espaces vectoriels, la théorie de la dimension finie et les applications linéaires.*

*Dans le sous-chapitre « A - Espaces vectoriels » on généralise les objets de la géométrie du plan et de l'espace : vecteurs, bases, droites, plans, ...*

*Le second sous-chapitre « B - Espaces vectoriels de dimension finie » vise à définir la dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie et en présente plusieurs méthodes de calcul. La notion de dimension interprète le nombre de degrés de liberté pour un problème linéaire.*

*L'étude des applications linéaires suit naturellement celle des espaces vectoriels au sous-chapitre « C - Applications linéaires ». Son objectif est de fournir un cadre aux problèmes linéaires.*

*Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à une dimension supérieure.*

*Au moins deux approches pédagogiques sont possibles :*

- *Traiter ce chapitre selon l'ordre présenté ci-dessous, en l'illustrant notamment sur les espaces  $\mathbb{K}^n$  à l'aide des techniques de pivot développées dans le chapitre « Systèmes linéaires et calcul matriciel ».*
- *Mettre en place les différentes notions (sous-espaces vectoriels, familles de vecteurs, dimension, applications linéaires) dans le cas particulier des espaces  $\mathbb{K}^n$  avant de les étendre aux espaces vectoriels généraux.*

*Il est attendu des étudiants qu'ils sachent reconnaître une situation se prêtant à une modélisation linéaire conduisant à une représentation adaptée dans un espace bien choisi.*

*Dans tout le chapitre, le corps  $\mathbb{K}$  est égal à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .*

**A - Espaces vectoriels****a) Espaces et sous-espaces vectoriels**

Structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.  
 Exemples de référence :  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathbb{K}^\Omega$  (cas particulier des suites) et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .  
 Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.  
 Sous-espaces d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, caractérisation.

Exemples : ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ou d'une équation différentielle linéaire homogène.

Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.  
 Intersection de sous-espaces vectoriels.

Somme de deux sous-espaces vectoriels.  
Somme directe. Caractérisation par l'intersection.  
Sous-espaces supplémentaires.

### b) Familles finies de vecteurs

Famille libre, famille liée.

Cas des vecteurs colinéaires, coplanaires.  
Vecteurs linéairement indépendants.

Toute famille finie de polynômes non nuls à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et de degrés échelonnés est libre.

La famille  $(P_0, \dots, P_n)$  est dite de degrés échelonnés si  $\deg(P_0) < \dots < \deg(P_n)$ .

Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.

Base, coordonnées d'un vecteur dans une base.

Matrice colonne des coordonnées.

Bases canoniques des espaces  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$  et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Base adaptée à une somme directe.

Si  $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$  est une famille libre d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  alors  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  et  $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$  sont en somme directe.

## B - Espaces vectoriels de dimension finie

### a) Dimension finie

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul  $E$ , on peut extraire une base de  $E$ .

Tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  non nul de dimension finie admet une base.

Théorème de la base incomplète : toute famille libre de  $E$  peut être complétée en une base.

Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.

Dans un espace engendré par  $n$  vecteurs, toute famille de  $n + 1$  vecteurs est liée.

Dimension.

Droites et plans vectoriels.

Dimensions de  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Si  $E$  est dimension  $n$  et  $\mathcal{F}$  est une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ , alors  $\mathcal{F}$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\mathcal{F}$  est libre, si et seulement si  $\mathcal{F}$  est génératrice de  $E$ .

Rang d'une famille finie de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension quelconque.

Caractérisation des familles finies libres par le rang.

### b) Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

Si  $F$  est un sous-espace d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim(F) \leq \dim(E)$ . De plus,  $F = E$  si et seulement si les deux dimensions sont égales.

Supplémentaires d'un sous-espace : existence, dimension commune, caractérisation par l'intersection et les dimensions.

Dimension de la somme de deux sous-espaces (formule de Grassmann).



## C - Applications linéaires

Le paragraphe d) est au programme du module PSI.

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Généralités

Applications linéaires, endomorphismes.  
Opérations et règles de calcul sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composée.  
Image directe d'un sous-espace vectoriel.  
Image et noyau.  
Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau.

#### b) Isomorphismes

Isomorphismes, automorphismes.  
Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes.  
Caractérisation des isomorphismes par les bases.  
Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension.  
Si  $E$  et  $F$  ont même dimension finie alors une application linéaire de  $E$  dans  $F$  est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.

Le groupe linéaire  $GL(E)$ .

Application à la dimension de l'espace des suites récurrentes linéaires d'ordre deux, détermination d'une base.  
Cas particulier des endomorphismes.

#### c) Modes de définition d'une application linéaire

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.  
Une application linéaire définie sur  $E = E_1 \oplus E_2$  est entièrement déterminée par ses restrictions à  $E_1$  et  $E_2$ .

#### d) Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel

★ Identité et homothéties.  
Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires.  
Caractérisations :  $p \circ p = p$ ,  $s \circ s = \text{id}_E$ . ★

Notation  $\text{Id}_E$

#### e) Rang d'une application linéaire

Applications linéaires de rang fini.  
Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme.  
Théorème du rang : si  $E$  est de dimension finie et si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $u$  est de rang fini et

$\text{rg}(v \circ u) \leq \min\{\text{rg}(u), \text{rg}(v)\}$

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u).$$

#### f) Équations linéaires

Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

Exemples des systèmes linéaires et des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux.  
La notion de sous-espace affine est hors programme.

## Matrices et déterminants

Cette dernière partie du programme d'algèbre linéaire fait le lien entre la représentation géométrique (les espaces vectoriels et les applications linéaires) et la représentation numérique (les matrices) dans le cadre de la dimension finie. Bien que naturellement liées à l'algorithme de Gauss-Jordan et aux changements de bases, les notions d'équivalence et de similitude matricielles ne sont pas au programme. D'une manière générale, les problématiques de classification géométrique des endomorphismes sont hors programme.

Dans un premier sous-chapitre intitulé « A - Matrices », on expose la représentation matricielle des applications linéaires en dimension finie au moyen de bases. Il en résulte une correspondance entre les registres géométriques et numériques. L'aspect numérique de la théorie présente l'avantage de fournir une résolution algorithmique à des problèmes linéaires ayant un nombre fini de degrés de liberté issus de la géométrie ou de l'analyse.

Le second sous-chapitre intitulé « B - Déterminants » concerne les étudiants ayant choisi l'option PSI. Il développe une théorie du déterminant des matrices carrées, puis des endomorphismes d'un espace de dimension finie. Il met en évidence ses aspects algébrique (caractérisation des matrices inversibles) et géométrique (volume orienté).

Il est attendu des étudiants qu'ils maîtrisent les deux registres (géométrique et numérique), qu'ils sachent représenter numériquement un problème géométrique à l'aide de bases adaptées et interpréter géométriquement un problème numérique.

Le corps  $\mathbb{K}$  est égal à  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### A - Matrices

#### CONTENUS

#### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Matrices et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases.

Calcul des coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.

Matrice d'une combinaison linéaire, d'une composée.

Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.

Matrice de passage d'une base à une autre.

Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, d'un endomorphisme.

Isomorphisme entre  $\mathcal{L}(E,F)$  et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .  
Application au calcul de la dimension de  $\mathcal{L}(E,F)$ .

#### b) Noyau, image et rang d'une matrice

Application linéaire canoniquement associée à une matrice.

Image et noyau d'une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

Rang d'une matrice  $A$ .

Interprétation en termes de systèmes linéaires.  
Le rang d'une matrice est défini comme le rang du système de ses vecteurs colonnes ou de l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ .

Théorème du rang.

Caractérisations des matrices inversibles en termes de noyau, d'image, de rang.

Conservation du rang par multiplication par une matrice inversible.

Rang de la transposée.

Deux matrices équivalentes par lignes ou par colonnes ont le même rang.

Le rang d'une matrice est égal au rang de ses lignes, le rang d'un système linéaire homogène est égal au rang de sa matrice.

## ★ B - Déterminants

On motive les propriétés définissant un déterminant par celles de l'aire et du volume algébriques. La théorie au programme évite le recours au groupe symétrique et limite l'intervention des formes multilinéaires. On commence par définir le déterminant d'une matrice carrée. La notion de matrice réduite échelonnée par colonnes et la décomposition résultant de l'algorithme de Gauss-Jordan appliqué aux colonnes d'une matrice carrée suffisent à démontrer les propriétés du déterminant sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On définit ensuite le déterminant d'un endomorphisme. Tout excès de technicité est exclu. Dans ce sous-chapitre,  $n$  est supérieur ou égal à deux.

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Déterminant d'une matrice carrée de taille $n$

Il existe une unique application  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  vérifiant les trois propriétés suivantes:

- i.  $f$  est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable;
- ii.  $f$  est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable;
- iii.  $f(I_n) = 1$ .

La démonstration de ce théorème pour  $n \geq 4$  et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme.

On motivera géométriquement cette définition pour  $n \in \{2,3\}$  par les notions d'aire et de volume algébriques. On notera  $\det(A)$  le nombre  $f(A)$  pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

#### b) Propriétés du déterminant

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$  pour tout  $(\lambda, A) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Effet des opérations de pivot en colonnes sur un déterminant.

Applications : calcul du déterminant d'une matrice triangulaire

Une matrice carrée  $A$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ .

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases.

Déterminant d'un produit de matrices carrées, déterminant de l'inverse.

Déterminant de la transposée d'une matrice carrée.

Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.

Les étudiants doivent savoir calculer un déterminant par opérations élémentaires sur les colonnes.

La formule de changement de bases est hors programme.

Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.

Démonstration non exigible.

La comatrice est hors programme.

#### c) Déterminant d'un endomorphisme

Traduction sur les déterminants d'endomorphismes des propriétés vues sur les déterminants de matrices. ★

## Intégration

L'objectif majeur de ce chapitre est de définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs réelles ou complexes et d'en établir les propriétés élémentaires, notamment le lien entre intégration et primitivation. Il permet ainsi d'achever la justification des propriétés présentées au premier semestre.

Ce chapitre permet également de consolider la pratique des techniques usuelles de calcul intégral.

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Fonctions en escalier

Subdivision d'un segment.

Fonctions en escalier définies sur un segment à valeurs réelles.

#### b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Intégrale d'une fonction  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Aucune construction n'est imposée.

Les fonctions continues par morceaux sont hors programme.

Il convient d'interpréter graphiquement l'intégrale d'une fonction continue à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  en terme d'aire mais tout développement théorique sur ce sujet est hors programme.

$\Leftrightarrow$  PC et SI : valeur moyenne.

Notations  $\int_{[a,b]} f$ ,  $\int_a^b f(t) dt$ ,  $\int_a^b f$ .

Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.

Les étudiants doivent savoir majorer et minorer des intégrales.

Inégalité:  $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$ .

Relation de Chasles.

Extension de la notation  $\int_a^b f(t) dt$  au cas où  $b \leq a$ . Propriétés correspondantes.

L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.

#### c) Sommes de Riemann

Si  $f$  est une fonction continue sur le segment  $[a, b]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , alors

Interprétation géométrique des sommes de Riemann.

Démonstration dans le cas où  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

$\Leftrightarrow$  I : méthodes des rectangles, des trapèzes.

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

#### d) Calcul intégral

Si  $f$  est une fonction continue sur l'intervalle  $I$  et si  $x_0$  est un point de  $I$ , alors  $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$  est l'unique primitive de  $f$  sur  $I$  s'annulant en  $x_0$ .

Toute fonction continue sur  $I$  admet des primitives sur  $I$ .

Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.

En particulier, pour  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Intégration par parties. Changement de variable.

Application au calcul de primitives. Tout excès de technicité est exclu. Les méthodes d'intégration des fractions rationnelles en cosinus ou sinus, celles des racines de fonctions homographiques ou de polynômes du second degré sont hors programme.

### e) Formule de Taylor avec reste intégral

Pour une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$ , formule de Taylor avec reste intégral au point  $a$  à l'ordre  $n$ .

### f) Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Intégrale d'une fonction continue sur un segment, linéarité, majoration du module de l'intégrale, intégration par parties et changement de variable, formule de Taylor avec reste intégral.

Définition au moyen des parties réelle et imaginaire.

## Analyse asymptotique

*L'objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants avec les techniques asymptotiques de base, dans les cadres discret et continu. Les suites et les fonctions  $y$  sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant.*

*On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification systématique de propriétés élémentaires.*

*La notion de développement asymptotique est hors programme.*

*Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir rapidement mener à bien des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.*

### a) Relations de comparaison : cas des suites

Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.

Notations  $u_n = O(v_n)$ ,  $u_n = o(v_n)$ ,  $u_n \sim v_n$ .

On définit ces relations à partir du quotient  $\frac{u_n}{v_n}$  en supposant que la suite  $(v_n)$  ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

Traduction, à l'aide du symbole  $o$ , des croissances comparées des suites usuelles:  $\ln^\beta(n)$ ,  $n^\alpha$  et  $e^{\gamma n}$

Équivalence entre les relations  $u_n \sim v_n$  et  $u_n - v_n = o(v_n)$ .

Liens entre les relations de comparaison.

Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances.

Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

### b) Relations de comparaison : cas des fonctions

Adaptation aux fonctions des définitions et résultats du paragraphe précédent (en un point ou à l'infini).

### c) Développements limités

Si  $f$  est définie sur l'intervalle  $I$  et si  $a$  est un point de  $I$  ou une extrémité de  $I$ , développement limité d'ordre  $n$  de  $f$  au voisinage de  $a$ .

Unicité, troncature d'un développement limité.

Forme normalisée d'un développement limité :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n))$$

avec  $a_0 \neq 0$ .

Adaptation au cas où  $f$  est définie sur  $I \setminus \{a\}$ .

Équivalence  $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0 h^p$ , signe de  $f$  au voisinage de  $a$ .

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

Intérêt de la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement limité.

Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible.

La démonstration de l'existence du développement limité d'un quotient n'est pas exigible.

La division selon les puissances croissantes est hors programme.

Intégration d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage d'un point  $a$  de  $I$  d'une application de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ .

La formule est démontrée dans le chapitre « Intégration ».

Les étudiants doivent connaître les développements limités à tout ordre au voisinage de 0 de  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ,  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$  et de  $\tan$  à l'ordre 3.

### d) Applications des développements limités

Calcul d'équivalents et de limites.

Étude locale d'une fonction : prolongement par continuité, dérivabilité d'un prolongement par continuité, tangente, position relative de la courbe et de la tangente, extremum.

Détermination d'asymptotes.

Les étudiants doivent savoir utiliser un développement asymptotique pour étudier la position relative d'une courbe et d'une de ses asymptotes.

## Séries numériques

*L'étude des séries prolonge celle des suites. Elle permet de mettre en œuvre l'analyse asymptotique et de mieux appréhender la notion de nombre réel à travers celle de développement décimal. Le paragraphe c) est au programme du module PSI*

### a) Généralités

Série à termes réels ou complexes; sommes partielles; convergence ou divergence; en cas de convergence, somme et restes.

La série est notée  $\sum u_n$ . En cas de convergence, sa somme est notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Divergence grossière.

Séries géométriques : sommes partielles, condition nécessaire et suffisante de convergence, somme en cas de convergence.

Séries télescopiques : la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge si et seulement si la suite  $(u_n)$  converge; calcul de la somme en cas de convergence

### b) Séries à termes positifs

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Pour  $f$  continue et monotone, encadrement des sommes partielles de la série  $\sum f(n)$  à l'aide de la méthode des rectangles.

Sur des exemples simples, application à l'étude asymptotique de sommes partielles.

Séries de Riemann.

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont positives et si, pour tout  $n$ ,  $u_n \leq v_n$ , alors la convergence de  $\sum v_n$  implique celle de  $\sum u_n$ , et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont positives et si  $u_n \sim v_n$ , alors la convergence de  $\sum v_n$  est équivalente à celle de  $\sum u_n$ .

Adaptation au cas où l'inégalité  $u_n \leq v_n$  n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang.

Comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann.

### c) Séries absolument convergentes

★ Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes.

La convergence absolue implique la convergence.

Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors programme.

Inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente.

Si  $(u_n)$  est une suite complexe, si  $(v_n)$  est une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^+$ , si  $u_n = O(v_n)$  et si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  est absolument convergente donc convergente.

### d) Application au développement décimal d'un nombre réel

Existence et unicité du développement décimal propre d'un élément de  $[0,1[$ .

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible. On indique la caractérisation des nombres rationnels par la périodicité de leur développement décimal à partir d'un certain rang. ★

## Probabilités

*Le chapitre « Probabilités », limité aux univers finis, a pour objectif de consolider les notions étudiées au lycée, en particulier celle de variable aléatoire, en les inscrivant dans un cadre formel.*

*Il se prête à des activités de modélisation de situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines.*

### A - Généralités

*Les définitions sont motivées par la notion d'expérience aléatoire. La modélisation de situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des étudiants. On se limite au cas où les événements sont les parties de  $\Omega$ .*

### a) Expérience aléatoire et univers

L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers.

Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, événement «  $A$  et  $B$  », événement «  $A$  ou  $B$  », événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.

On se limite au cas où cet univers est fini.

### b) Espaces probabilisés finis

Une probabilité sur un univers fini  $\Omega$  est une application  $P$  de  $\mathcal{P}(\Omega)$  dans  $[0,1]$  vérifiant  $P(\Omega) = 1$  et, pour toutes parties disjointes  $A$  et  $B$  de  $\Omega$ ,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ .

Détermination d'une probabilité par les images des singletons.

Équiprobabilité (ou probabilité uniforme).

Un espace probabilisé fini est un couple  $(\Omega, P)$  où  $\Omega$  est un univers fini et  $P$  une probabilité sur  $\Omega$ .

Propriétés d'une probabilité : probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance.

### c) Probabilités conditionnelles

Pour deux événements  $A$  et  $B$  tels que  $P(B) > 0$ , probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$ .

Notations  $P_B(A)$ ,  $P(A|B)$ .

La définition de  $P_B(A)$  est justifiée par une approche heuristique fréquentiste.

L'application  $P_B$  définit une probabilité sur  $\Omega$ .

Formule des probabilités composées.

Formule des probabilités totales.

Formules de Bayes :

- si  $A$  et  $B$  sont deux événements tels que  $P(A) > 0$  et  $P(B) > 0$ , alors

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- si  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si  $B$  est un événement de probabilité non nulle, alors

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}$$

On donnera plusieurs applications issues de la vie courante.

### d) Événements indépendants

Couple d'événements indépendants.

Si  $P(B) > 0$ , l'indépendance de  $A$  et  $B$  équivaut à  $P(A|B) = P(A)$ .

Famille finie d'événements mutuellement indépendants.

L'indépendance des  $A_i$  deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si  $n \geq 3$ .

## B - Variables aléatoires sur un univers fini

*La notion de variable aléatoire modélise le résultat d'une expérience aléatoire. L'utilisation des variables aléatoires pour modéliser des situations simples dépendant du hasard fait partie des capacités attendues des étudiants.*

### a) Variables aléatoires

Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers  $\Omega$  à valeurs dans un ensemble  $E$ . Lorsque  $E \subset \mathbb{R}$ , la variable aléatoire est dite réelle.

Loi  $P_X$  de la variable aléatoire  $X$ .

Si  $X$  est une variable aléatoire et si  $A$  est une partie de  $E$ , notation  $\{X \in A\}$  ou  $(X \in A)$  pour l'événement  $X^{-1}(A)$ .

Notations  $P(X \in A)$ ,  $P(X = x)$ ,  $P(X \leq x)$ .

L'application  $P_X$  est définie par la donnée des  $P(X = x)$  pour  $x$  dans  $X(\Omega)$ .

Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.

### b) Lois usuelles

La reconnaissance de situations modélisées par les lois classiques de ce paragraphe est une capacité attendue des étudiants.

Loi uniforme.



Loi de Bernoulli de paramètre  $p$  dans  $[0,1]$ .

Notation  $\mathcal{B}(p)$ .

Interprétation : succès d'une expérience.

Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement.

Loi binomiale de paramètres  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0,1]$ .

Notation  $\mathcal{B}(n,p)$ .

Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de  $n$  expériences de Bernoulli indépendantes, ou tirages avec remise dans un modèle d'urnes.

### c) Couples de variables aléatoires

Couples de variables aléatoires.

Loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires.

La loi conjointe de  $X$  et  $Y$  est la loi de  $(X,Y)$ , les lois marginales de  $(X,Y)$  sont les lois de  $X$  et de  $Y$ .

Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.

Loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $(X = x)$ .

### d) Variables aléatoires indépendantes

Couples de variables aléatoires indépendantes.

Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors, pour toute partie  $A$  de  $X(\Omega)$  et toute partie  $B$  de  $Y(\Omega)$ , on a :

$$P((X,Y) \in A \times B) = P(X \in A) P(Y \in B).$$

Variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Modélisation de  $n$  expériences aléatoires indépendantes par une suite finie  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  de variables aléatoires indépendantes.

Démonstration non exigible

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors quel que soit  $(A_1, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{P}(X_i(\Omega))$ , les événements  $(X_i \in A_i)$  sont mutuellement indépendants.

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes et suivent chacune la loi  $\mathcal{B}(p)$ , alors  $X_1 + \dots + X_n$  suit la loi  $\mathcal{B}(n,p)$ .

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes, et si  $f$  et  $g$  sont des applications définies respectivement sur  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  alors les variables aléatoires  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible.

### e) Espérance

Espérance d'une variable aléatoire  $X$ .

Interprétation en terme de moyenne pondérée.

$$\text{Relation : } E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega).$$

Espérance d'une variable aléatoire réelle constante, de l'indicatrice d'une partie de  $\Omega$ , d'une variable aléatoire suivant l'une des lois uniforme, de Bernoulli, binomiale. Propriétés de l'espérance: linéarité, croissance.

Application au calcul de l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi  $\mathcal{B}(n,p)$ .

L'espérance de  $f(X)$  est déterminée par la loi de  $X$ .

$$\text{Théorème du transfert : } E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x).$$

Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

La réciproque est fautive en général.

### e) Variance et écart type

Variance, écart type.

Interprétation comme indicateurs de dispersion.

$$\text{Relation } V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

$$\text{Relation } V(aX + b) = a^2 V(X).$$

Variance d'une variable aléatoire suivant l'une des lois  
 $\mathcal{B}(p)$ ,  $\mathcal{B}(n, p)$ .  
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

---