TD DU 27/09/10 ET DU 4/10/10

1. Est-il possible qu'une suite d'un evn E puisse avoir une limite l pour la norme N et une limite l' pour la norme N' avec $l \neq l'$?

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, on prend $N(P) = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1/2} |P(x)|$.

(1) Montrer que N est une norme.

(2) Soit Q un polynôme de degré $q \in \mathbb{N}$, on pose $Y_n = \begin{cases} X^n & \text{si } n \leqslant q \\ X^n - Q & \text{si } n > q \end{cases}$.

a) Si $P \in E$, montrer que l'on peut écrire $P = \sum\limits_{i=0}^{p} b_i Y_i$.

b) Montrer que $N_Q(P) = \sum\limits_{i=0}^{p} \dfrac{|b_i|}{i+1}$ est une norme sur E.

(3) Trouver une suite de polynômes qui tend vers 0 pour N et vers Q pour N'.

(4) Plus généralement, trouver deux normes N_1 et N_2 et une suite de polynômes qui tend vers P pour N_1 et vers Q pour N_2.

---

2. On définit par la relation de récurrence

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x_n + y_n}{2} \\ \dfrac{2x_n y_n}{x_n + y_n} \end{pmatrix}$$

deux suites de réels en prenant (x_0, y_0) dans $]0, +\infty[$.
Étudier cette suite, écrire une procédure Maple qui permet de tester la vitesse de convergence.

Solution 1

(1) Immédiat.

(2) a) La famille (Y_n) est une base de E ce qui permet de conclure.

b) $N_Q(P) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![0, p]\!],\ b_i = 0 \Leftrightarrow P = 0$. Les autres propriétés sont immédiates.

(3) La suite (X^n) tend vers 0 pour N et vers Q pour N' car $N_Q(X^n - Q) = \dfrac{1}{n+1}$.

(4) Si on prend P et Q 2 polynômes distincts, N_P et N_Q les normes associées alors (X^n) tend vers P pour N_P et vers Q pour N_Q.

Remarque : on peut aussi se placer sur $E = \mathbb{R}[X]$, d'après le théorème de Weierstrass on sait qu'il existe $(P_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\|P_n - f\|_\infty \to 0$ où f est la fonction affine par morceaux, nulle sur $[0, 1]$, égale à 1 sur $[2, 3]$. Soit $N(P) = \sup\limits_{x \in [0,1]} |P(x)|$ et $N'(P) = \sup\limits_{x \in [2,3]} |P(x)|$. (P_n) tend vers 0 pour N et vers 1 pour N'.

Solution 2 On remarque tout d'abord que $x_ny_n = x_{n-1}y_{n-1} = x_0y_0$. On a alors

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{y_n - x_n}{2} = \frac{\frac{x_ny_n}{x_n} - x_n}{2} \\ &= \frac{x_{n-1}y_{n-1} - (\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2})^2}{2x_n} \\ &= -\frac{(x_{n-1} - y_{n-1})^2}{8x_n} \leqslant 0 \end{aligned}$$

donc la suite (x_n) est décroissante (au moins à partir du rang 1) et minorée par 0 donc elle converge. La suite (y_n) est croissante ($y_n = \dfrac{x_0y_0}{x_n}$) majorée par tout terme de la suite x_n (en effet

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{2}{x_n + y_n}\left[\left(\frac{x_n + y_n}{2}\right)^2 - x_ny_n\right] = \frac{2}{x_n + y_n}\left(\frac{x_n - y_n}{2}\right)^2)$$

donc (y_n) converge. En outre si on appelle $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ alors, avec la formule $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ on obtient $x = y$.

Pour terminer on remarque que $x_ny_n = x_0y_0 \to x^2$ donc $x = \sqrt{x_0y_0}$.

Conclusion : ces suites permettent de calculer la racine carrée d'un rationnel que l'on écrira sous la forme x_0y_0. La convergence est quadratique (à chaque itération, on multiplie par 2 le nombre de chiffres significatifs) et le couple x_n, y_n fournit un encadrement de la racine cherchée à l'aide de rationnels.

Procédure Maple

```
> Digits:=20:
> u:=proc(n,a,b)
> local k,x,y,z,r,s,t;
> x:=a;y:=b;
> for k from 1 to n do
>   z:=(x+y)/2;
>   y:=2*x*y/(x+y);
>   x:=z;
>   r:=evalf(x);s:=evalf(y);
>   print(`k=`,k,`x=`,r,`y=`,s);
>   t:=evalf(ln(1-sqrt(a*b)/x)/ln(10));
>   print(t);
> od;
> end;
```