# TD DU 11/10/2010 ET DU 18/10/2010

Exercice 1.

Soit $(a_n)$ une suite de réels décroissante, de limite nulle et telle que $\sum a_{n^2}$ C.

(1) Si $a_n = \dfrac{1}{n}$ alors montrer que $\sum (-1)^{[\sqrt{n}]} a_n$ C.

(2) Cas général : on pose $c_n = a_{n^2}$ et $b_n = \sum\limits_{k=0}^{2n} a_{n^2+k}$.

a) Montrer que $nc_n \to 0$.

b) Prouver les inégalités $0 \leqslant b_{2n} - b_{2n+1} + 2c_{2n+1} \leqslant (4n+3)(c_{2n} - c_{2n+2})$.

c) Conclure à la convergence de $\sum (-1)^{[\sqrt{n}]} a_n$.

---

Exercice 2. Oral ENS 1999

Soit $f_n(x) = |x(x-1)(\ldots)(x-n)|$ sur $[0, n]$.

Montrer qu'un maximum de $f_n$ est atteint en un point $s_n$ de $[0, 1/2]$.

Donner un équivalent de $s_n$ puis de $f_n(s_n)$.

---

**Solution 1**

(1) En prenant $b_n = \sum_{k=0}^{2n} a_{n^2+k}$ alors on a l'encadrement

$$\int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{\mathrm{d}x}{x} \leqslant b_n \leqslant \int_{n^2-1}^{(n+1)^2} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

soit $2\ln\frac{n+1}{n} \leqslant b_n \leqslant \ln\frac{n+1}{n-1}$ d'où $b_n - b_{n+1} \geqslant 2\ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{n+2}{n} > 0$ donc la suite $(b_n)$ décroît vers 0, la série $\sum(-1)^n b_n$ converge, de même pour $\sum(-1)^{[\sqrt{n}]}a_n$. En effet, si on pose $s_N = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{[\sqrt{n}]}a_n$ et $\sigma_P = \sum_{n=1}^{P}(-1)^n b_n$ alors $|s_N - \sigma_{[\sqrt{N}]-1}| \leqslant b_{[\sqrt{N}]} \to 0$ donc $(s_N)$ converge.

(2) a) La suite $(c_n)$ décroît et $\sum_{k=n}^{2n-1} c_k \geqslant nc_{2n} \to 0$ donc $nc_n \to 0$.

b) On a $(2n+1)c_{n+1} \leqslant b_n \leqslant (2n+1)c_n$ d'où

$$\underbrace{(4n+1)c_{2n+1} - (4n+1)c_{2n+1}}_{=-2c_{2n+1}} \leqslant b_{2n} - b_{2n+1} \leqslant \underbrace{(4n+1)c_{2n} - (4n+3)c_{2n+2}}_{=(4n+3)(c_{2n}-c_{2n+2})-2c_{2n}}$$

d'où, en additionnant $2c_{2n+1}$, on obtient l'inégalité demandée en remarquant que $2c_{2n+1} - 2c_{2n} \leqslant 0$.

c) On a

$$\sum_{n=0}^{N}(4n+3)[\underbrace{c_{2n} - c_{2n+2}}_{\geqslant 0}] = \sum_{n=0}^{N}(4n+3)c_{2n} - \underbrace{\sum_{n=0}^{N}(4n+3)c_{2n+2}}_{=\sum_{n=1}^{N+1}(4n-1)c_{2n}}$$

$$= 3c_0 + 4\sum_{n=1}^{N} c_{2n} - (4N+3)c_{2N+2} \leqslant 4\sum_{n=0}^{+\infty} c_{2n}$$

donc $\sum(4n+3)(c_{2n} - c_{2n+2})$ converge d'où la convergence de $\sum b_{2n} - b_{2n+1}$, de $\sum(-1)^n b_n$ car $b_n \to 0$ et celle de $\sum(-1)^{[\sqrt{n}]}a_n$ comme au (1).

Voici un programme Maple qui permet d'estimer la convergence de la série $\sum(-1)^{[\sqrt{n}]}/n$.

```
> S:=proc(N)
> local n,s,P,J;
> s[0]:=0.;
> for n from 1 to N do s[n]:=s[n-1]+evalf((-1)^(floor(sqrt(n)))/n) od;
> J:=[[P,s[P]] $P=1..N]: plot(J,x=1..N,style=point);
> end;
```

**Solution 2**

On a $f_n(1/2) = \frac{1}{4}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2n-1}{2}$ et $f_n(x) = f_n(n-x)$, on peut prendre $x$ ou $n-x$ qui joueront des rôles symétriques.

Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ alors on sait déjà que $|(x-k)(x-k-1)| \leqslant \frac{1}{4}$

- Si $k \leqslant x \leqslant k+1/2$ alors

$$\underbrace{x}_{\leqslant k+1/2}(\underbrace{x-1}_{\leqslant k-1/2})(\ldots)(\underbrace{x-k+1}_{\leqslant 3/2}) \leqslant \frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2k+1}{2}$$

puis

$$(\underbrace{k+2-x}_{\leqslant 2})(\ldots)(\underbrace{n-x}_{\leqslant n-k}) \leqslant (k+3/2)(\ldots)(n-1/2)$$

en exprimant que $2 \leqslant k+3/2$, $3 \leqslant k+5/2, \ldots, n-k \leqslant n-1/2$ car $k \geqslant 1$.
En combinant ces deux inégalités, on obtient $f_n(x) \leqslant f_n(1/2)$.

- Si $k+1/2 \leqslant x \leqslant k+1$ on peut refaire le même raisonnement avec $n-x$.

On a donc $f_n(1/2) \geqslant f_n(x)$ pour $x \in [1, n-1]$.
Or, pour $x \in [0, 1/2]$, on a $f_n(x) \geqslant f_n(1-x)$, en effet si $0 \leqslant x \leqslant 1/2$ alors $k-x \geqslant k+x-1$ d'où

$$f_n(x) = x(1-x)\prod_{k=2}^{n}(k-x) \geqslant (1-x)x\prod_{k=2}^{n}(k+x-1) = f_n(1-x).$$

Le maximum de $f_n$ est atteint sur l'intervalle $[0, 1/2]$ (et aussi sur l'intervalle $[n-1/2, n]$ compte tenu de la symétrie.
Si on écrit $f_n(x) = |P_n(x)|$ alors le maximum de $f$ est atteint en un point où $P_n'(x) = 0$ et, en dérivant logarithmiquement, on obtient la relation

$$\frac{1}{s_n} + \frac{1}{s_n - 1} + \cdots + \frac{1}{s_n - n} = 0$$

soit $\dfrac{1}{s_n} = \underbrace{\dfrac{1}{1-s_n} + \cdots + \dfrac{1}{n-s_n}}_{=S_n}$. Comme $0 < s_n < \dfrac{1}{2}$ alors on a l'encadrement suivant

$$\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}_{\sim \ln n} < S_n < \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1/2}}_{\sim \ln n}$$

donc $s_n \sim \dfrac{1}{\ln n}$.
Ensuite, on écrit que $\dfrac{f_n(s_n)}{n!s_n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{s_n}{k}\right) = a_n$. $a_n > 0$, on étudie $\ln a_n$.
Tout d'abord, une étude simple de fonction nous montre que $x \leqslant -\ln(1-x) \leqslant x + x^2$ pour $x \in [0, 1/2]$ d'où

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{s_n}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} -\ln\left(1 - \frac{s_n}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{s_n}{k} + \frac{s_n^2}{k^2}.$$

Or $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \sim \ln n$ donc $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{s_n}{k} \to 1$ et $s_n^2\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2} \to 0$ car $s_n^2 \to 0$ et $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.
Conclusion : $a_n \to \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ d'où $f_n(s_n) \sim \dfrac{n!}{e\ln n}$.

---