TD DU 08/11/2010 ET DU 15/11/2010

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $K \subset E$ un compact convexe. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini d'endomorphismes qui stabilisent K et qui commutent entre-eux. Pour $a \in \mathcal{A}$ on pose

$$a_n = \frac{1}{n}[\mathrm{Id}_E + a + \cdots + a^{n-1}].$$

Montrer que $\displaystyle\bigcap_{\substack{n\in\mathbb{N}^* \\ a\in\mathcal{A}}} a_n(K) \neq \emptyset$.

---

2. Soit E l'ensemble des suites complexes qui convergent vers 0 muni de $\|.\|_\infty$, Φ l'application linéaire $u \in E \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}$. On pose $H = \operatorname{Ker}\Phi$.

(1) Montrer que Φ est continue et calculer sa norme induite.

(2) Soit $u_n = \dfrac{1}{n+1}$, calculer $\Phi((u_n))$. Trouver la distance de u à H.

(3) Construire une suite (y^p) dans H tel que $\|u - y^p\| \leqslant \mathrm{d}(u, H)(1 + 2^{-p})$.

Solution 1 On remarque que $(\mathrm{Id}_E - a) \circ a_n = \dfrac{1}{n}(\mathrm{Id}_E - a^{n+1})$ donc, si on pose $x_n = a_n(x)$ pour $x \in K$ alors (x_n) est bornée.

- K convexe $\Rightarrow x_n \in K$,
- K compact $\Rightarrow x_n$ bornée.

par conséquent $(\mathrm{Id}_E - a) \circ a_n(x) \to 0)$ et on sait que l'on peut extraire de la suite (x_n) un suite $x_{\varphi(n)}$ qui converge dans K vers x'. Alors $(\mathrm{Id}_E - a)(x_{\varphi(n)}) \to (\mathrm{Id}_E - a)(x') = 0$ donc $a(x') = x'$. Il est alors facile de vérifier que $a_n(x') = x'$ donc $K_a = \{x \in K \mid a(x) = x\}$ est non vide et $K_a \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} a_n(K)$.

On remarque en outre que K_a est un compact (car $K_a \subset K$ borné et $K_a = (\mathrm{Id}_E - a)^{-1}(0)$ fermé) convexe par linéarité de a.

Soit $a' \in \mathcal{A}$ alors, pour $x \in K_a$, $a'(x) = a' \circ a(x) = a \circ a'(x)$ donc $a'(x) \in K_a$ donc $a'(K_a) \subset K_a$.

On peut donc appliquer le résultat précédent à a' et K_a et par conséquent $K_a \cap K_{a'} \neq \emptyset$.

Par une récurrence immédiate, on prouve que, si $a_1, a_2 \ldots, a_p$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ alors $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{p} K_{a_i} \neq \emptyset$.

Solution 2

(1) On a $|\Phi(u)| \leqslant \|u\| \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2\|u\|$ d'où Φ est continue et $\|\Phi\| \leqslant 2$.

On considère la suite (u^p) de E définie par $u_n^p = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leqslant p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$ alors, par un calcul immédiat, on a $\Phi(u^p) = \dfrac{1-(1/2)^{p+1}}{1-1/2} = 2 - 2^{-p} \to 2$ d'où $\|\Phi\| = 2$.

(2) $\Phi(u) = 2\ln 2$ (D.S.E. de $\ln(1+x)$). On utilise alors la formule $\mathrm{d}(u,H) = \dfrac{|\Phi(u)|}{\|\Phi\|} = \ln 2$:

On a tout d'abord $|\Phi(u-y)| = |\Phi(u)| \leqslant \|\Phi\|.\|u-y\|$ pour tout $y \in H$ par conséquent $|\Phi(u)| \leqslant \|\Phi\|\,\mathrm{d}(u,H)$.

Soit maintenant $a \in S(0,1)$ tel que $|\Phi(a)| \geqslant \|\Phi\| - \varepsilon$: on peut écrire $u = y + \Phi(u)\alpha$ où $\alpha = \dfrac{a}{\Phi(a)}$ et $y \in H$. Alors $\|u-y\| = |\Phi(u)|.\|\alpha\| = \dfrac{|\Phi(u)|}{|\Phi(a)|}$ donc

$$\mathrm{d}(u,H)(\|\Phi\| - \varepsilon) \leqslant \|u-y\|(\|\Phi\| - \varepsilon) \leqslant \|u-y\|.|\Phi(a)| \leqslant |\Phi(u)|$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$ d'où l'inégalité

$$\mathrm{d}(u,H).\|\Phi\| \leqslant |\Phi(u)|$$

ce qui permet de conclure à l'égalité $\mathrm{d}(u,H) = \dfrac{|\Phi(u)|}{\|\Phi\|}$.

(3) On reprend la démonstration ci-dessus en prenant pour a la suite u^p. $\Phi(u^p) = 2 - 2^{-p}$ d'où, avec $y^p = u - \dfrac{2\ln 2}{2-2^{-p}} u^p$,

$$\|u - y^p\|(2 - 2^{-p}) \leqslant |\Phi(u)| = 2\ln 2$$

soit $\|u - y^p\| \leqslant \dfrac{\ln 2}{1 - 2^{-p-1}} = \dfrac{\mathrm{d}(u,H)}{1-2^{-p-1}} \leqslant \mathrm{d}(u,H)(1 + \frac{1}{2^p})$.
