TD DU 06/12/2010 ET DU 13/12/2010

1. Oral X 2000
Soit p un nombre premier, $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{Z}^p$, on définit la matrice A par

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \\ a_p & a_1 & \dots & a_{p-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\det A \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_p [p]$.

---

2. Oral X 1996.
Soit $(A, B) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $ABA^{-1}B^{-1}$ commute avec A et B.
Montrer que $AB = BA$ ou $AB = -BA$.

---

3. Centrale 2000.

(1) Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} kz^{k-1}$ converge ssi $|z| < 1$ ($z \in \mathbb{C}$). Soit $f(z)$ sa somme.

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, de valeurs propres en module < 1.
Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} kA^{k-1} = f(A)$ converge.

(3) $f(A)$ est-elle inversible ?

Solution 1 On se place sur le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on sait que $(a+b)^p = a^p + b^p$.

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix}$ alors $A = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i J^i$ et donc, dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, on peut écrire que

$$A^p = \sum_{i=1}^{p} a_i^p (J^i)^p = \sum_{i=1}^{p} a_i^p I_p$$

car $J^p = I_p$.
Conclusion :

$$\begin{aligned} \det A^p &= \left(\sum_{i=1}^{p} a_i^p\right)^p = \sum_{i=1}^{p} a_i^p = \sum_{i=1}^{p} a_i \\ &= (\det A)^p = \det A. \end{aligned}$$

Solution 2 Posons $C = ABA^{-1}B^{-1}$ alors C commute avec A, B, AB, BA.

- Si ces 4 matrices forment une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors elles forment une base et donc C commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On sait alors que C est une matrice scalaire et son déterminant vaut 1. Dans ce cas, $C = \pm I$ et $AB = \pm BA$, ce cas est impossible car on arrive à une contradiction.
- Si A et B sont liées alors A et B commutent donc $AB = BA$.
- Si la famille (A, B) est libre, (A, B, AB, BA) liée et supposons que $AB \neq BA$ (i.e. $C \neq I$). On pourra écrire (par exemple) $AB = \lambda A + \mu B + \nu BA$ d'où
$$C = AB(BA)^{-1} = \lambda B^{-1} + \mu A^{-1} + \nu I$$
et $CA = AC \Rightarrow \lambda B^{-1}A + \mu I + \nu A = \lambda AB^{-1} + \mu I + \nu A$ donc $\lambda B^{-1}A = \lambda AB^{-1}$ i.e. $\lambda = 0$ car $AB \neq BA$. On a alors $C = \mu A^{-1} + \nu I$, $CB = BC \Rightarrow \mu = 0$ pour la même raison donc $C = \nu I$ et comme C est une matrice scalaire de déterminant 1 différente de I, $C = -I$.

Solution 3

(1) On utilise le critère de d'Alembert. On a immédiatement $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

(2) On peut réduire A sous la forme $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \varepsilon \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ où $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $\varepsilon = 1$ si $\lambda_1 = \lambda_2$. On a alors $A^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & n\lambda_1^n\varepsilon \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$ ce qui permet de conclure.

(3) On a
$$\begin{aligned} (I-A)^2 f(A) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kA^{k-1} - 2\sum_{k=1}^{+\infty} kA^k + \sum_{k=1}^{+\infty} kA^{k+1} \\ &= I + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{(k+1)A^k - 2kA^k + (k-1)A^k}_{=0} \end{aligned}$$
donc $f(A)$ est inversible, d'inverse $(I-A)^2$.
