TD DU 03/01/2011

Exercice 1. Oral ENS 2006

(1) Soient A, B et M trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AM = MB$ et $\mathrm{Rg}(M) = r$. Montrer que A et B ont r valeurs propres communes (comptées avec leur ordre de multiplicité dans le polynôme caractéristique).

(2) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = BA$. On note Π_A le polynôme minimal de A, Π_B celui de B. Montrer que $\deg(\Pi_{AB}) \leqslant \deg \Pi_A . \deg \Pi_B$.

(3) Soient A, B des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Que dire des polynômes caractéristiques de AB et BA ?

Exercice 2. Oral X 1996

Soit M une matrice d'ordre n à coefficients complexes.

a) Montrer que $\det(\exp(M)) = \exp(\mathrm{Tr}(M))$.

b) Écrire la décomposition de Dunford de $\exp M$ en fonction de celle de M i.e. toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se décompose de manière unique sous la forme $M = D + N$ où D est diagonalisable, N nilpotente avec $ND = DN$.

c) Montrer que M est diagonalisable ssi $\exp M$ est diagonalisable.

Solution 1 (N. Charon) Note : ?

Examinateur : jeune et vraiment sympathique, il laisse chercher avant de donner quelques indications bien placées, confirme lorsqu'on est sur la bonne voie et ne demande pas trop de détails sur les arnaques qu'on peut lui faire, ce qui fait que l'oral est assez agréable. Par contre, on dirait qu'il aime bien l'algèbre. Durée : 45 mn sans préparation.

(1) Au début, je voyais pas très bien quoi faire alors j'ai commencé par le cas simple où $r = n$, i.e. M est inversible. Dans ce cas, A et B sont semblables et elles ont même polynômes caractéristiques.

Pour le cas général, on commence par utiliser la sacro-sainte propriété :
$\exists(P,Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = PJ_rQ$.
Puisque $AM = MB$, on obtient $P^{-1}APJ_r = J_rQBQ^{-1}$. On se ramène ainsi au cas où $M = J_r$. On traduit ensuite le fait que $AJ_r = J_rB$ en faisant le produit matriciel par blocs.
En écrivant que $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$, on trouve que : $A_3 = 0$, $B_2 = 0$ et $A_1 = B_1 = D$ d'où $A = \begin{pmatrix} D & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} D & 0 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$.
Puis, on a : $P_A(X) = \det(A - XI_n) = \det(D - XI_r)\det(A_4 - XI_{n-r})$ et idem pour B.

(2) Là, j'ai commencé par traiter le cas où A et B sont diagonalisables. Étant donné qu'elles commutent, elles sont simultanément diagonalisables et comme les polynômes minimaux de A et B sont les produits des $(X-\lambda)$ avec λ vap, on obtient assez facilement le résultat voulu. Mais en fait la démonstration générale ne marche pas comme ça. Ici, il m'a un peu aidé en me disant "Est-ce que vous ne pourriez pas relier le degré de Π_A avec la dimension d'un certain espace ?". Et là, je me suis subitement rappelé l'exo de Franchini à Centrale où l'on montre que $\det \Pi_A = \dim \mathbb{C}[A]$, $\mathbb{C}[A]$ étant l'algèbre des polynômes sur $\mathbb{C}$ engendré par A.
On écrit alors que d'une part $\mathbb{C}[AB] \subset \mathbb{C}[A,B]$ donc $\dim \mathbb{C}[AB] = \deg \Pi_{AB} \leqslant \dim \mathbb{C}[A,B]$, d'autre part, tout polynôme de $\mathbb{C}[A,B]$ se décompose au moyen de polynômes du type A^iB^j avec $i \in [\![0, \deg \Pi_A - 1]\!]$, $j \in [\![0, \deg \Pi_B - 1]\!]$ (on peut faire la division euclidienne de tout polynôme de $\mathbb{C}[A]$ par Π_A, idem pour B). Donc cette famille de $\deg \Pi_A \times \deg \Pi_B$ éléments est génératrice et de ce fait : $\dim \mathbb{C}[A,B] \leqslant \deg \Pi_A . \deg \Pi_B$ et on a le résultat annoncé.

(3) On avait vu cet exo dans le cours mais honte à moi je m'en souvenais plus. Il m'a donc aidé en me suggérant d'étudier d'abord le cas où par exemple A est inversible. Avec la définition du polynôme caractéristique, on montre que P_{AB} et P_{BA} sont égaux puis en utilisant la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on étend par continuité ce résultat.

Solution 2

a) On trigonalise M : $M = PTP^{-1}$ d'où $\exp M = P \exp T P^{-1}$ et donc
$$\det(\exp M) = \det(\exp T) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \exp(\mathrm{Tr}(M)).$$

b) Comme $M = D + N$ avec $DN = ND$ où D est une matrice diagonalisable et N une matrice nilpotente, on a $\exp M = \exp D \exp N$ (car $\exp(A+B) = \exp A \exp B$ si $AB = BA$). Comme $\exp N = I + N + \cdots + \dfrac{N^q}{q!}$ où q est l'indice de nilpotence de N, on a $\exp M = \exp D + N'$ où $N' = NQ$ avec $Q = \exp D.(I + \dfrac{N}{2} \cdots + \dfrac{N^{q-1}}{q!})$ qui est une matrice qui commute avec N et donc N' est bien nilpotente.

c) $\Rightarrow$ OK.
$\Leftarrow$ On utilise l'équivalence M est diagonalisable ssi $N = 0$ dans la décomposition de Dunford (grâce à l'unicité de la décomposition de Dunford).
Si $N \neq 0$ alors $N + \cdots + \dfrac{N^q}{q!} \neq 0$ (sinon, on multiplie par N^{q-1} et on arrive à $N^q = 0$ ce qui est contradictoire avec le fait que q est l'indice de nilpotence de N). On a donc $N' \neq 0$ et N' nilpotente ce qui contredit la propriété selon laquelle $\exp M$ est diagonalisable.