TD DU 17/01/2011

Exercice 1. Chercher l'équivalent en 1^- de $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n$.

Exercice 2.
Soit (x_n) une suite de complexes h périodique.

(1) Comparer

$$S = \sum_{m=0}^{h-1} \sum_{n=0}^{h-1} |x_m - x_n|^2 \text{ et } \sigma = \sum_{k=1}^{h-1} \left| \sum_{j=0}^{h-1} x_j e^{-2\pi ikj/h} \right|^2$$

(2) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\forall k \in [1, h-1]$,

$$\left| \sum_{j=0}^{h-1} \Delta(j) e^{-2\pi ikj/h} \right| \geqslant C \left| \sum_{j=0}^{h-1} x_j e^{-2\pi ikj/h} \right|$$

où $\Delta(j) = x_{j+1} - x_j$.

(3) Montrer que :

$$\sum_{m=0}^{h-1} \sum_{n=0}^{h-1} |\Delta(m) - \Delta(n)|^2 \geqslant C^2 \sum_{i=0}^{h-1} \sum_{j=0}^{h-1} |x_i - x_j|^2$$

(4) Soit $f \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne telle qu'il existe (x_n) une suite non constante, h-périodique telle que $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$.
Montrer que $k \geqslant 2 \sin \dfrac{\pi}{h}$.

Solution 1 On commence par le lemme suivant :
Soit $\sum b_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ telle que $b_n \geqslant 0$. On sait que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \to +\infty$ quand $x \to R^-$. Si $a_n = o(b_n)$ alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = o\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$.
Démonstration : soit $\varepsilon > 0$ alors $\exists N > 0$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|a_n| \leqslant \varepsilon b_n$ d'où, en choisissant X tel que $x \geqslant X \Rightarrow \sum_{n=0}^{N} |a_n| x^n \leqslant \varepsilon g(x)$ on a

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| x^n + \varepsilon \sum_{n=N}^{+\infty} b_n x^n \\ &\leqslant \varepsilon g(x) + \varepsilon g(x) \end{aligned}$$

ce qui permet de prouver le lemme. On en déduit que si $c_n \sim b_n$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \sim g(x)$.

On utilise ensuite la propriété suivante : $\ln n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} + o(\ln n)$ d'où, en reconnaissant un produit de Cauchy,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\times\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$$
$$\sim \frac{-\ln(1-x)}{1-x}.$$

Solution 2

(1) On pose $\omega = \exp(-\frac{2i\pi}{h})$, $\Omega = (\omega^{(j-1)(k-1)})_{(j,k)}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \end{pmatrix}$ alors $\sigma = \|\Omega X\|^2 - \left|\sum_{j=0}^{h-1} x_j\right|^2$ (en prenant la norme associée au produit scalaire dans $\mathbb{C}^h$). Or $\|\Omega X\|^2 = X^*\Omega^*\Omega X$ et

$$\Omega^*\Omega = \left(\sum_{p=1}^{h}\omega^{-(p-1)(j-1)}\omega^{(p-1)(k-1)}\right)_{(j,k)} = hI_h$$

donc

$$\sigma = h\sum_{j=0}^{h-1}|x_j|^2 - \left|\sum_{j=0}^{h-1}x_j\right|^2 = (h-1)\sum_{j=0}^{h-1}|x_j|^2 - \sum_{i<j}(x_i\bar{x}_j + \bar{x}_i x_j)$$

puis

$$\begin{aligned} S &= \sum_{m\neq n}(|x_m|^2 + |x_n|^2 - (x_m\bar{x}_n + \bar{x}_m x_n) \\ &= 2(h-1)\sum_{n=0}^{h-1}|x_n|^2 - \sum_{m\neq n}(x_m\bar{x}_n + \bar{x}_m x_n) \\ &= 2\sigma \end{aligned}$$

(2) On a

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{h-1}(x_{j+1}-x_j)\omega^{-kj} &= \sum_{j=0}^{h-1}x_{j+1}\omega^{-kj} - \sum_{j=0}^{h-1}x_j\omega^{-kj} \\ &= \sum_{j'=1}^{h}x_{j'}\omega^{-k(j'-1)} - \sum_{j=0}^{h-1}x_j\omega^{-kj} \text{ en posant } j'=j+1 \\ &= (\omega^k - 1)\sum_{j=0}^{h-1}x_j\omega^{-kj} \end{aligned}$$

en utilisant la périodicité de $x_{j'}\omega^{-k(j'-1)}$. On peut prendre $C = \inf_{k\in[1,h-1]}|\omega^k - 1| = 2\sin\frac{\pi}{h}$.

(3) Immédiat en utilisant la première question.

(4) On remarque que $f(x_n) = \Delta_n$ donc $|\Delta(m) - \Delta(n)| \leqslant k|x_m - x_n|$ et, en reportant dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$k^2\sum_{m,n}|x_m - x_n|^2 \geqslant \sum_{m,n}|\Delta(m)-\Delta(n)|^2 \geqslant C^2\sum_{m,n}|x_n - x_n|^2$$

et comme la somme $\sum_{m,n}|x_n - x_n|^2$ est non nulle, on a $k \geqslant C = \sin\frac{k\pi}{h}$.