## TD DU 31/01/2011 ET DU 7/02/2011

### 1. Unicité des coefficients de Fourier.

On veut prouver que si $c_0$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des complexes tels que

$$\text{(C)} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = 0$$

alors $c_0 = a_n = b_n = 0$ pour tout $n$. On supposera la condition (C) réalisée pour toutes les questions qui suivent. On pose aussi $u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

(1) Montrer que l'on peut définir $F(x) = \frac{1}{2}c_0x^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n(x)}{n^2}$ fonction continue sur $\mathbb{R}$.

(2) Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, on pose $\Delta_2 f(x,h) = f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$.
Montrer que $\frac{\Delta_2 F(x,2h)}{4h^2} = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2h^2} u_n(x)$.

(3) On pose $\rho_n(h) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\sin^2 kh}{k^2h^2} u_k(x)$ et $r_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)$.
Montrer que $\rho_N(h) = \frac{\sin^2 Nh}{N^2h^2} r_N - \sum_{n=N}^{+\infty} \left[\frac{\sin^2 nh}{n^2h^2} - \frac{\sin^2 (n+1)h}{(n+1)^2h^2}\right] r_{n+1}$.
En déduire que $\frac{\Delta_2 F(x,2h)}{4h^2} \to 0$ quand $h \to 0$.

(4) a) Soit $\Phi(t) = F(t) - F(0) - \frac{t}{2\pi}(F(2\pi) - F(0))$ et $\psi_\varepsilon(t) = \Phi(t) - \frac{\varepsilon}{2}t(2\pi - t)$.
S'il existe $t' \in ]0, 2\pi[$ tel que $\Phi(t') > 0$ montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\Psi_\varepsilon(t') > 0$.
b) Soit $t_0$ tel que $\Psi_\varepsilon(t_0) = \max_{t\in[0,2\pi]} \Psi_\varepsilon(t)$.
Montrer que $\frac{\Delta_2 \Psi_\varepsilon(t_0,h)}{h^2} \to \varepsilon$.
c) Déduire du b une contradiction puis que $F$ est affine.
d) Montrer alors que $c_0 = 0$ puis que $F$ est constante.

(5) Conclure.

---

**Solution 1**

(1) Comme la série de la condition (C) converge alors $u_n(x) \to 0$, en particulier $a_n = u_n(0) \to 0$ et $b_n \sin nx = u_n(x) - a_n \cos nx \to 0$.
Si $b_n$ ne tend pas vers 0 alors il existe (par exemple) $\alpha > 0$ et $\varphi$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{\varphi(n)} \geqslant \alpha$. On a ainsi $f_n(x) = \sin \varphi(n)x$ qui tend vers 0 (car $b_{\varphi(n)} f_n(x) \to 0$), $f_n^2$ est bornée (par 1), on utilise alors le théorème de convergence dominée d'où $\int_0^{2\pi} |\sin^2(\varphi(n)x)|\, \mathrm{d}x \to 0$ or $\int_0^{2\pi} |\sin^2(\varphi(n)x)|\, \mathrm{d}x = \pi$ d'où la contradiction.
On a ainsi $|u_n(x)| \leqslant |a_n| + |b_n| \to 0$ et la convergence de la série définissant $F$ est normale ce qui assure à la fois l'existence de $F$ ainsi que sa continuité.

(2) Il suffit de faire les calculs !

(3) L'expression de $\rho_N(h)$ demandée est une simple utilisation de la transformation d'Abel (on écrit que $u_k(x) = r_k(x) - r_{k+1}(x)$).

Comme $r_n \to 0$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $|r_n| \leqslant \varepsilon$. En outre

$$\left|\frac{\sin^2 nh}{n^2h^2} - \frac{\sin^2(n+1)h}{(n+1)^2h^2}\right| \leqslant \int_{nh}^{(n+1)h} \left|\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)'\right| \mathrm{d}t$$

et comme $\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)' = \frac{\sin 2t}{t^2} - \frac{2\sin 2t}{t^3}$ alors $\int_1^x \left|\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)'\right| \mathrm{d}t$ admet une limite quand $x \to +\infty$. $\frac{\sin^2 t}{t^2}$ admet un développement en série entière en 0 donc $\int_1^x \left|\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)'\right| \mathrm{d}t$ admet une limite quand $x \to 0$.

Finalement $|\rho_N(h)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=N}^{+\infty} \int_{nh}^{(n+1)h} \left|\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)'\right| \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon\left(1 + \int_0^{+\infty} \left|\left(\frac{\sin^2 t}{t^2}\right)'\right| \mathrm{d}t\right)$.

On a ainsi

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_2 F(x,2h)}{4h^2} &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 nh}{n^2h^2} u_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin^2 nh}{n^2h^2} - 1\right) u_n(x) \qquad \text{relation (C)} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{\sin^2 nh}{n^2h^2} - 1\right) u_n(x) + \rho_N(h) - r_N.\end{aligned}$$

Or pour $\varepsilon > 0$ on vient de voir qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|\rho_N(h)| \leqslant \varepsilon$ indépendamment de $h$ et $\sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{\sin^2 nh}{n^2h^2} - 1\right) u_n(x) \to 0$, on peut conclure en conséquence que $\frac{\Delta_2 F(x,2h)}{4h^2} \to 0$ quand $h \to 0$.

(4) a) Pour $t \in [0, 2\pi]$, $0 \leqslant t(2\pi - t) \leqslant \pi^2$ donc $\Psi_\varepsilon(t') \geqslant \Phi(t') - \frac{\varepsilon\pi^2}{2} > 0$ si on prend $\varepsilon$ assez petit.

b) On a $\frac{\Delta_2 \Psi_\varepsilon(t_0,h)}{h^2} = \frac{\Delta_2 \Phi(t_0,h)}{h^2} + \varepsilon = \frac{\Delta_2 F(t_0,h)}{h^2} + \varepsilon \to \varepsilon$.

c) Pour $h$ assez petit on a $\Psi_\varepsilon(t_0 + h) + \Psi_\varepsilon(t_0 - h) > 2\Psi_\varepsilon(t_0)$ or cela entraîne que l'un des deux termes du membre de gauche est $>$ à $\Psi_\varepsilon(t_0)$ ce qui est contradictoire ($t_0 \in ]0, 2\pi[$ donc on peut aussi s'arranger pour que $t_0 \pm h \in [0, 2\pi]$).

On démontre de même que $\Psi_\varepsilon(t') < 0$ est impossible donc $\Psi_\varepsilon = 0$ et ceci pour tout $\varepsilon$ donc $\Phi = 0$ ce qui signifie que $F$ est affine et on peut généraliser le résultat à tout $\mathbb{R}$.

d) On a alors $F(t) = at + F(0)$ d'où

$$F(2\pi) = a2\pi + F(0) = 2c_0\pi^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n(2\pi)}{n^2} = 2c_0\pi^2 + F(0)$$

$$F(4\pi) = a4\pi + F(0) = 8c_0\pi^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n(4\pi)}{n^2} = 8c_0\pi^2 + F(0).$$

On déduit de ces égalités que $c_0 = 0$ donc $F(0) = F(2\pi)$ i.e. $F$ est constante.

(5) Comme $F$ est constante ses coefficients de Fourier sont nuls et comme la série définissant $F$ converge normalement on en déduit que $u_n(x) = 0$ soit $a_n = b_n = 0$ pour tout $n$.