TD DU 14/02/2011 ET DU 21/02/2011

EXERCICE 1. Soit (I, φ) une solution maximale de l'équation différentielle (E) : $x' = x^2 - t$ définie en 0.

- Montrer que, si $\varphi(0) > 1$ alors $\forall t \in \mathbb{R}_+ \cap I$, $\varphi(t) > \sqrt{t+1}$.
- Montrer que, si $\varphi(0) < 0$ alors $\forall t \in \mathbb{R}_+ \cap I$, $\varphi(t) < \sqrt{t}$.

EXERCICE 2.
Étudier les solutions $\mathcal{C}^1$ de l'équation différentielle $y'^2(4-3y)^2 = 4(1-y)$.

Solution 1 Tout d'abord, faire un dessin de la parabole $x^2 = t$, ensemble des points où les solutions ont une tangente horizontale. On appelle $\mathcal{I}$ l'intérieur de cette parabole.

- S'il existe $t_1 \in \mathbb{R}_+ \cap I$ tel que $\varphi(t_1) \leqslant \sqrt{t_1+1}$ alors, le T.V.I. appliqué entre 0 et t_1 nous assure l'existence d'un réel t' tel que $\varphi(t') = \sqrt{t'+1}$.
  Soit $F = \{t \in \mathbb{R}_+ \cap I \mid \varphi(t) = \sqrt{t+1}\}$ alors F est non vide et c'est un fermé de I donc il possède un plus petit élément t_0. On a alors $\varphi(t_0) = \sqrt{t_0+1}$ et $\varphi(t) > \sqrt{t+1}$ sur $]0, t_0[$.
  Comme $\varphi'(t) > 1$ sur $[0, t_0[$, on écrit
  $$\varphi(0) - \varphi(t_0) + \int_0^{t_0} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = 0$$
  $$> \varphi(0) - \varphi(t_0) + t_0 = 1 + t_0 - \sqrt{1+t_0} > 0$$
  ce qui est impossible donc $\forall t \in \mathbb{R}_+ \cap I$, $\varphi(t) > \sqrt{1+t}$.
- S'il existe $t_1 \in \mathbb{R}_+ \cap I$ tel que $\varphi(t_1) \geqslant \sqrt{t_1}$ alors on peut trouver $t_0 > 0$ tel que $\varphi(t_0) = -\sqrt{t_0}$. On prouve alors que pour $t > t_0$, $-\sqrt{t} < \varphi(t) < \sqrt{t}$ (φ' est négative et ne peut s'annuler) ce qui est impossible.

Solution 2 On pose $z = 1 - y$ et l'équation devient $z'^2(3z+1)^2 = 4z$. On déduit de ceci 2 choses : $z \geqslant 0$ et $3z + 1$ ne s'annule pas. On écarte par la suite la solution $z = 0$. On cherche les solutions de l'équation sur I intervalle maximal.

- Étudions d'abord les solutions telles que $z > 0$. On a $\dfrac{z'(3z+1)}{2\sqrt{z}} = \varepsilon$ où $\varepsilon = \pm 1$ (ε ne dépend pas de x car la fonction $\dfrac{z'(3z+1)}{2\sqrt{z}}$ est une fonction continue qui s'annule si elle change de signe). On obtient alors $z^{3/2} + \sqrt{z} = \varepsilon(x - x_0)$. Si on pose $\varphi(t) = t^{3/2} + \sqrt{t}$ alors $\varphi'(t) > 0$ sur $]0, +\infty[$ donc cette fonction admet une fonction réciproque θ de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]0, +\infty[$ sur lui même (et on vérifie que θ' se prolonge en 0 par 0). La solution dans ce cas est donnée par $z(x) = \theta[\varepsilon(x - x_0)]$ où on va préciser les intervalles de définition :
  - si $\varepsilon = 1$ alors $y(x) = 1 - \theta(x - x_0)$ pour $x > x_0$,
  - si $\varepsilon = -1$ alors $y(x) = 1 - \theta(x_0 - x)$ pour $x < x_0$.
- Cas général : soit $Z = \{x \in I \mid z(x) = 0\}$ que l'on suppose non vide et non réduit à un point. Soit $x_1 < x_2$ deux points de Z et supposons qu'il existe $x_3 \in]x_1, x_2[$ tel que $z(x_3) \neq 0$. $Z \cap [x_1, x_3]$ est compact donc il admet un plus grand élément a, de même, soit b le plus petit élément de $Z \cap [x_3, x_2]$. On a $a < x_3 < b$ et sur $[a, b]$, comme z ne s'annule pas, z' non plus donc z est strictement monotone sur $[a, b]$ et $z(a) = z(b) = 0$ ce qui est contradictoire. Z est donc un intervalle de $\mathbb{R}$.

Conclusion : Si $Z = \emptyset$ alors y est de la forme donnée dans le premier cas mais on peut alors prolonger y à $\mathbb{R}$ comme on peut le voir ci-dessous.

Si $Z = [x_1, x_2]$ alors $y(x) = \begin{cases} 1 - \theta(x_1 - x) & \text{si } x < x_1 \\ 1 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ 1 - \theta(x - x_2) & \text{si } x > x_2 \end{cases}$, si $Z =]-\infty, x_2]$ ou $Z = [x_1, +\infty[$ on adapte.