TD DU 14/03/2011 ET DU 21/03/2011

Exercice 1. $\boxed{\textbf{I}}$

On définit : $\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*,\ E(x,t) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ nulle en dehors de $[-A,A]\times[-T,T]$. Si $\varepsilon > 0$ on pose $T_\varepsilon(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} E(x,t)\varphi(x,t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$.

(1) Montrer que $T_\varepsilon(\varphi)$ a une limite $T(\varphi)$ quand ε tend vers 0.

(2) Calculer $T(L(\varphi))$ où $L(\varphi) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$.

Exercice 2. On note $H_n = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{(i,j)\in[1,n]^2}$ et on pose $\rho_n = \sup\{|\lambda|,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(H_n)\}$.
Montrer que (ρ_n) est une suite croissante de limite π.

Solution 1

(1) Comme la fonction $E(x,t)\varphi(x,t)$ est nulle en dehors d'un compact de $\mathbb{R}\times[\varepsilon,+\infty[$, elle est intégrable et on peut utiliser le théorème de Fubini.

On a donc $T_\varepsilon(\varphi) = \displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4t}}\varphi(x,t)\,\mathrm{d}x}_{I(t)}\Bigg)\mathrm{d}t$ or $I(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\varphi(\sqrt{4t}u,t)\,\mathrm{d}u$ en posant $u = \dfrac{x}{\sqrt{4t}}$. φ est continue sur un compact, elle est par conséquent bornée, soit M un majorant de φ. $I(t)$ est continue et tend vers $\varphi(0,0)$ grâce au théorème de Lebesgue. On peut même écrire

$$T(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\varphi(\sqrt{4t}u,t)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.$$

(2) On a $\dfrac{\partial E}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0$ et on va s'en servir :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^{+\infty} E(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}t &= [E(x,t)\varphi(x,t)]_\varepsilon^{+\infty} - \int_\varepsilon^{+\infty}\varphi(x,t)\frac{\partial E}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}t\\ &= -E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon) - \int_\varepsilon^{+\infty}\varphi(x,t)\frac{\partial E}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

après une intégration par parties. Puis

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} E(x,t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}x &= \underbrace{\left[E(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}}\frac{\partial E}{\partial t}(x,t)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}x\\ &= \underbrace{\left[-\frac{\partial E}{\partial t}(x,t)\varphi(x,t)\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \int_{\mathbb{R}}\varphi(x,t)\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\varphi(x,t)\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(les parties toutes intégrées sont nulle car φ s'annule en dehors d'un compact).
On a finalement, en utilisant le théorème de Fubini (on intègre des fonctions continues sur des segments)

$$\begin{aligned}T_\varepsilon(L(\varphi)) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_\varepsilon^{+\infty} E(x,t)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} E(x,\varepsilon)\varphi(x,\varepsilon)\,\mathrm{d}x = -I(\varepsilon)\end{aligned}$$

donc $T(L(\varphi)) = -\varphi(0,0)$ en utilisant le résultat de la première question.

Solution 2 H_n est la matrice de la forme bilinéaire définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par $B_n(P,Q)=\int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$ dans la base canonique. Or, si $\mathcal{Q}_n$ est la forme quadratique associée à B_n, on sait que $\rho_n=\sup\limits_{P\neq 0}\dfrac{\mathcal{Q}_n(P)}{\|P\|}$, $\|P\|$ désignant la norme euclidienne de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ rendant la base canonique orthonormale.
Il est alors évident que la suite (ρ_n) est croissante et on a $\rho_n \leqslant \pi$. En effet

- Soit $P(t)=\sum\limits_{p=0}^{n-1} a_p x^p$ alors $A=\mathcal{Q}(P)=\displaystyle\int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-1}^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t = B$.
- On obtient
$$B=-i\int_0^{\pi} P^2(e^{i\theta})e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$$
soit en intégrant la forme différentielle exacte $\omega(z)=P^2(z)\,\mathrm{d}z$ sur le contour consistant en un demi-cercle de rayon 1 centré en 0 et le segment $[-1,1]$,
soit en faisant directement le calcul.
On trouve aussi $B=-i\displaystyle\int_0^{-\pi} P^2(e^{i\theta})e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta$ de la même manière donc
$$B=-\frac{i}{2}\left[\int_0^{\pi} P^2(e^{i\theta})e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta+\int_0^{-\pi} P^2(e^{i\theta})e^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta\right].$$
On a donc $B \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} |P^2(e^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta = \pi\sum_{p=0}^{n-1} a_p^2$ grâce à l'égalité de Parseval. Soit pour tout n,
$$\sum_{p,q=0}^{n-1}\frac{a_p a_q}{p+q+1} \leqslant \pi\sum_{p=0}^{n-1} a_p^2$$
Remarque : on peut ainsi prouver que, si la série $\sum a_n^2$ est convergente, alors la suite double $\left(\dfrac{a_p a_q}{p+q+1}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et l'on a $\sum\limits_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\dfrac{a_p a_q}{p+q+1} \leqslant \pi\sum\limits_{p=0}^{+\infty} a_p^2$..
On peut faire ce raisonnement avec une suite complexe en remplaçant a_p par $|a_p|$.

Il reste à prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho_n=\pi$.
Soit $P=1+\dfrac{x}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}x^{n-1}$ alors $\mathcal{Q}_n(P)=\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\dfrac{1}{\sqrt{i}\sqrt{j}(i+j-1)}$. On a alors
$$\iint_{[i,i+1]\times[j,j+1]}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{xy}(x+y-1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{i}\sqrt{j}(i+j-1)}$$
d'où, en sommant ces inégalités pour $(i,j)\in[i,i+1]\times[j,j+1]$
$$\mathcal{Q}_n(P) \geqslant \iint_{[1,n+1]^2}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{xy}(x+y-1)} \geqslant \int_1^{n+1}\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x+y-1)}\right)\mathrm{d}y$$
$$\geqslant \int_1^{n+1}\frac{2}{\sqrt{y(y-1)}}\left[\operatorname{Arctan}\sqrt{y-1}-\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{y-1}{n+1}}\right]\mathrm{d}y \geqslant I_1(n)-I_2(n)$$
où $I_1(n)=\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{2\operatorname{Arctan}\sqrt{y-1}}{\sqrt{y(y-1)}}\,\mathrm{d}y$, $I_2(n)=\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{2\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{y-1}{n+1}}}{\sqrt{y(y-1)}}\,\mathrm{d}y$. On utilise l'intégration des relations de comparaison.
Comme $\dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{y-1}}{\sqrt{y(y-1)}}\sim\dfrac{\pi}{2y}$ alors $I_1(n)\sim\pi\ln n$
puis $0\leqslant\operatorname{Arctan}\sqrt{\dfrac{y-1}{n+1}}\leqslant\sqrt{\dfrac{y-1}{n+1}}$ d'où $0\leqslant I_2(n)\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}=2$ et donc, pour n assez grand,
$$\pi\|P\|^2 \geqslant \rho_n\|P\|^2 \geqslant \mathcal{Q}_n(P) \geqslant \pi\ln n+o(\ln n).$$
On a ensuite $\|P\|^2=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}=\ln n+o(\ln n)$ donc
$$\pi \geqslant \rho_n \geqslant \frac{\pi\ln n+o(\ln n)}{\ln n+o(\ln n)} \to \pi.$$
Remarque : un calcul pour $n=10$ donne $\displaystyle\int_{-1}^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t=5.57$ et $\displaystyle\int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t=4.99$.