TD DU 23/09/11 ET DU 30/09/11

Exercice 1.

(1) Soit $S_1 = (1, X + 1/X, \dots, (X + 1/X)^n)$ et $S_2 = (1, X + 1/X, \dots, X^n + 1/X^n)$. Montrer que $\operatorname{Vect} S_1 = \operatorname{Vect} S_2$.

(2) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists! P_n \mid \forall t \in \mathbb{C}^*,\ P_n(t + 1/t) = t^n + 1/t^n.$$

Quel est le degré de P_n ?

(3) Calculer $P_n(2\cos u)$, $P_n(2\operatorname{ch} u)$.

(4) Écrire une procédure MAPLE qui calcule les polynômes P_n.

Exercice 2. Pour tout n entier naturel, on donne $f_n(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n - \dfrac{1}{2}$.

(1) Montrer que f_n admet une unique racine positive notée x_n.

(2) Montrer que la suite (x_n) converge vers une limite l et trouver un équivalent de $x_n - l$ de la forme $\dfrac{a}{n}$ en $+\infty$.

(3) A l'aide de MAPLE, tester la suite $f_n(1 + a/n)$.

Solution 1

(1) Soit $F = \operatorname{Vect}(S_1)$ et $\varphi\ : P \in F \mapsto X^n P \in \mathbb{C}_{2n}[X]$. La famille $\varphi(S_1)$ est libre car les polynômes sont de degrés étagés donc S_1 est libre. C'est donc une base de F.
On a $\operatorname{Card} S_1 = \operatorname{Card} S_2 = \dim F$ et, pour $p \in [\![0, n]\!]$, on sait (formule du binôme de Newton) que $(X + 1/X)^p$ se décompose comme somme d'éléments de S_2 (on peut distinguer les cas p pair et p impair).
On en déduit que S_1 et S_2 sont des bases de F.

(2) Soit $\varphi_n\ : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto P(X + 1/X) \in F$. L'image par φ_n de la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ est S_1 donc φ_n est un isomorphisme.
Comme $X^n + 1/X^n \in F$, on en déduit qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\varphi_n(P_n) = X^n + 1/X^n$.
Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ tq $Q(X + 1/X) = X^n + 1/X^n = P_n(X + 1/X)$ et $p = \max(\deg Q, n)$.
En considérant φ_p (isomorphisme de $\mathbb{C}_p[X]$ sur F_p on sait que $\varphi_p^{-1}(X^n + 1/X^n) = Q = P_n$ donc P_n est bien unique dans $\mathbb{C}[X]$ et $\deg P_n \leqslant n$. Soit $Q = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ alors

$$\frac{1}{x^n} Q(x + 1/x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{(x + 1/x)^i}{x^n} \to 0 \text{ quand } x \to +\infty$$

et comme $\dfrac{x^n + 1/x^n}{x^n} \to 1$ on en déduit que $\deg P_n \geqslant n$ soit $\deg P_n = n$.

(3) On trouve immédiatement

$$P_n(2\cos u) = P_n(e^{iu} + e^{-iu}) = e^{inu} + e^{-inu} = 2\cos nu$$
$$P_n(2\operatorname{ch} u) = P_n(e^{u} + e^{-u}) = e^{nu} + e^{-nu} = 2\operatorname{ch} nu$$

(4) On remarque que les P_n satisfont à la relation de récurrence (attention à P_0 !)

$$P_n = XP_{n-1} - P_{n-2},\ P_0 = 2,\ P_1 = X$$

d'où la procédure

```
P := proc (n::integer)
local P, q, r, i;
q := 2; P := X;
  for i from 2 to n do
      r := X*P-q; q := P; P := r
  end do;
  expand(P)
end proc;
```

Et un résultat
`P(10);`
$X^{10} - 10 * X^8 + 35 * X^6 - 50 * X^4 + 25 * X^2 - 2$

Solution 2

(1) Une simple étude de fonction y répond.

(2) On pose $u_n = f_n(1 + a/n)$ pour $a > 1$. Alors $u_n = A + o(1)$, où $A = (a-1)e^a - 1/2$. Donc, si $A < 0$, $x_n < 1 + a/n$ pour n assez grand, puisque f_n croît strictement et de même $x_n > 1 + a/n$ pour n assez grand si $A > 0$.
On en conclut que $x_n = 1 + a/n + o(1/n)$, où a est l'unique réel tel que $(a-1)e^a = 1/2$.

```
a:=evalf(solve(2*(b-1)*exp(b)-1));
```

donne $a = 1.157184952$.

(3) On utilise la fonction

```
F:=proc(n::integer,x::float)
local F;
F:=n*x^(n+1)-(n+1)*x^n-1/2;
end;
```

et le test suivant

```
test:=proc(n::integer)
local i;
  for i from 1 to n do
  print(F(10*i,1+a/(10*i)));
  od;
end;
```

qui donne par exemple
test(10);

```
-0.0301521000
-0.0158625000
-0.0107625100
-0.0081442000
-0.0065506000
-0.0054786000
-0.0047080000
-0.0041275000
-0.0036744000
-0.0033109000
```