TD DU 04/11/11

Exercice 1. Oral X 2005

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, (x_n) une suite d'éléments de E vérifiant :

- (x_n) bornée ;
- $\|x_{n+1} - x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$;
- (x_n) a un nombre fini de valeurs d'adhérences.

Étudier la convergence de (x_n).

Exercice 2. Oral ENS 2005

Équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{t^n}{1-t^n}$ lorsque $t \to 1-$.

Solution 1 On va établir par l'absurde la convergence de (x_n), en montrant qu'il ne peut y avoir qu'une valeur d'adhérence.
Notons $l_1, \dots, l_p$ les valeurs d'adhérences de (x_n) ; on suppose $p \geqslant 2$. Soit $r > 0$ assez petit pour que les $\overline{B}(l_i, r)$ soient disjointes (donc espacées). Notons $B = \bigcup_{i=1}^{p} \overline{B}(l_i, r)$ et $A = \{n / x_n \notin B\}$.
Si A était infini, on pourrait extraire une suite de (x_n) dont les indices sont dans A, et qui "éviterait" tous les l_i. De cette sous-suite, on en extrairait d'après Bolzano & Weierstrass une autre qui convergerait vers un $a \notin \{a_1, \dots, a_p\}$, ce qui ne se peut.
A est donc fini. On se place alors au delà d'un certain rang tel que tous les x_n soient dans B. Soit $\epsilon = \frac{1}{12} \min_{i \neq j} [d(\overline{B}(l_i, r), \overline{B}(l_i, r))] > 0$. A partir d'un certain rang, $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \epsilon$. Supposons $x_n \in \overline{B}(l_i, r)$ sans perte de généralité. Les x_n ne peuvent demeurer dans $\overline{B}(l_i, r)$: on peut donc supposer que $x_{n+1} \in \overline{B}(l_j, r)$. On obtient alors :

$$|x_{n+1} - x_n| \geqslant d(\overline{B}(l_i, r), \overline{B}(l_j, r)) \tag{1}$$
$$\geqslant 12\epsilon \tag{2}$$

Ce qui ne se peut.
Donc $p = 1$ ($p = 0$ est impossible d'après Bolzano & Weierstrass).
La suite (x_n) est une suite bornée qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence, elle converge donc.

Solution 2 On utilise le théorème d'interversion des séries doubles pour $t \in]0, 1[$ (toutes les séries qui interviennent sont convergentes et à termes positifs) :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nt^n}{1 - t^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} nt \sum_{p=0}^{+\infty} t^{np} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} nt^{np} \right) \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{np} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^p}{(1 - t^p)^2} \\ &= \frac{1}{(1 - t)^2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{t^p}{(1 + t + \cdots + t^{p-1})^2}. \end{aligned}$$

Montrons que $\dfrac{t^p}{(1 + t + \cdots + t^{p-1})^2} \leqslant \dfrac{1}{p^2}$ sur $[0, 1]$:
Comme tous les termes sont positifs, il suffit de prouver que $pt^{p/2} \leqslant 1 + t + \cdots + t^2$ or l'inégalité de la moyenne nous donne

$$\frac{1}{p} \left(\sum_{i=0}^{p-1} t^i \right) \geqslant \left(\prod_{i=0}^{p-1} t^i \right)^{1/p} = t^{(p-1)/2}.$$

et comme $t \in [0, 1]$, $t^{(p-1)/2} \geqslant t^{p/2}$ ce qui permet de conclure.
On a donc $\dfrac{t^p}{(1 + t + \cdots + t^{p-1})^2} \leqslant \dfrac{1}{p^2}$ et $\lim\limits_{t \to 1-} \dfrac{t^p}{(1 + t + \cdots + t^{p-1})^2} = \dfrac{1}{p^2}$ d'où, par un argument de convergence normale, on en déduit que $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{t^p}{(1 + t + \cdots + t^{p-1})^2} \to \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.
Conclusion : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{nt^n}{1 - t^n} \sim \dfrac{1}{(1 - t)^2} \dfrac{\pi^2}{6}$.
