TD DU 02/12/11 ET DU 09/12/11

Exercice 1. **DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE D'INTÉGRALES IMPROPRES : MÉTHODE DE LAPLACE.**

On rappelle que $\Gamma(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est une intégrale eulérienne qui converge pour $t > 0$.

(1) Soit $J(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{t(a-cx^\beta)}\,\mathrm{d}x$ où $t > 0$ et

$$\beta > 0,\ c > 0,\ \alpha > -1. \tag{1}$$

À l'aide d'un changement de variable, prouver que

$$J(t) = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)e^{at}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}.$$

Prouver que, si $b > 0$, $J_b(t) \sim J(t)$ où $J_b(t) = \displaystyle\int_0^b x^\alpha e^{t(a-cx^\beta)}\,\mathrm{d}x$ quand $t \to +\infty$.

On s'intéresse maintenant à l'intégrale $I(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)e^{th(x)}\,\mathrm{d}x$ que l'on suppose absolument convergente pour $t \geqslant 1$. On rajoute les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} (i)\ h(x) = a - cx^\beta + o(x^\beta) \text{ en } 0,\ h \text{ prenant en } 0 \text{ son unique maximum} \\ (ii)\ h \text{ strictement décroissante sur }]0,+\infty[\\ (iii)\ g(x) \sim Ax^\alpha \text{ en } 0, \alpha, \beta, c \text{ vérifiant les conditions (1)} \end{cases} \tag{2}$$

On veut prouver que $I(t) \sim \dfrac{A}{\beta}\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{\beta}\right)e^{at}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}$.

(2) Montrer que l'on peut se ramener au cas où $a = 0$.

On pose par la suite $\varphi(t) = \dfrac{A}{\beta}\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{\beta}\right)(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}$.

Soit $\varepsilon > 0$, on va prouver que, pour t assez grand, on a :

$$(1-\varepsilon)\varphi(t) \leqslant I(t) \leqslant (1+\varepsilon)\varphi(t). \tag{3}$$

(3) Soit $\lambda \in]0,1[$, par hypothèse, on sait qu'il existe $\delta(\lambda) > 0$ tel que, pour $x \in]0, \delta(\lambda)[$,

$$A(1-\lambda)x^\alpha \leqslant g(x) \leqslant A(1+\lambda)x^\alpha$$
$$-c(1+\lambda)x^\beta \leqslant h(x) \leqslant -c(1-\lambda)x^\beta$$

a) Montrer qu'il existe λ tel que

$$(1-\lambda)(1+\lambda)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \geqslant \sqrt{1-\varepsilon/2},\ (1+\lambda)(1-\lambda)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \leqslant \sqrt{1+\varepsilon/2}.$$

b) En choisissant $\delta = \delta(\lambda) \in]0, \delta_0[$ et $t \geqslant t_1$, prouver que

$$(1-\varepsilon/2)\varphi(t) \leqslant \int_0^\delta g(x)e^{th(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant (1+\varepsilon/2)\varphi(t) \tag{4}$$

(4) a) Prouver que
$$\left|\int_\delta^{+\infty} g(x)e^{th(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant Be^{(t-1)h(\delta)}$$
où $B = \displaystyle\int_\delta^{+\infty} |g(x)|e^{h(x)}\,\mathrm{d}x$.

b) En déduire qu'il existe t_2 tel que
$$\left|\int_\delta^{+\infty} g(x)e^{th(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\varphi(t) \tag{5}$$
pour $t \geqslant t_2$.

c) Prouver alors l'inégalité (3) et donner l'équivalent de $I(t)$.

(5) Un exemple d'extension :

a) On suppose que $]a,b[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ non nécessairement borné et que
- (i) g et h sont de classe C^2,
- (ii) $\displaystyle\int_a^b |g(x)|e^{h(x)}\,\mathrm{d}x$ existe,
- (iii) h' ne change de signe qu'en un seul point $c \in]a,b[$, h passant par un maximum en c avec $g(c) \neq 0$, $h''(c) < 0$.

Montrer alors que, $t \to +\infty$,
$$\int_a^b g(x)e^{th(x)}\,\mathrm{d}x \sim g(c)e^{th(c)}\sqrt{\frac{2\pi}{-th''(c)}}$$
(on rappelle que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$).

b) Trouver l'équivalent quand $t \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-x}e^{tx}\,\mathrm{d}x$.

(6) On veut prouver la formule de Stirling :
$$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}x^x e^{-x},\ x \to +\infty.$$

a) Montrer que l'on peut écrire $\Gamma(x+1) = x^{x+1}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{xh(u)}\,\mathrm{d}u$.

b) Conclure à l'aide du 5.

Solution 1

(1) On n'a pas de problème de convergence.
En posant $u = ctx^\beta$, on trouve bien $J(t) = \dfrac{1}{\beta}\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{\beta}\right) e^{at}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}$.
On écrit ensuite que $J_b(t) = \dfrac{e^{at}}{\beta}(ct)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \displaystyle\int_0^{ctb^\beta} u^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} e^{-u}\,\mathrm{d}u$ et comme

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{ctb^\beta} u^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

on a bien le résultat annoncé.

(2) Pour se ramener au cas où $a = 0$, on remplace $h(x)$ par $h(x) - a$.

(3) Les deux premières inégalités sont simples à prouver :
a) On utilise le fait que $\lim\limits_{\lambda\to 0}(1-\pm\lambda)(1+\pm\lambda)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} = 1$.
b) On a $g(x)e^{th(x)} \leqslant A(1+\lambda)x^\alpha e^{-ct(1-\lambda)x^\beta}$ d'où

$$\int_0^\delta g(x)e^{th(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \varphi(t)\frac{1+\lambda}{(1-\lambda)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}} \int_0^{\delta^\beta ct(1-\lambda)} u^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u$$

où on a posé $u = ct(1-\lambda)x^\beta$.
On choisit alors t_1 pour que

$$t \geqslant t_1 \Rightarrow \int_0^{\delta^\beta ct(1-\lambda)} u^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u \leqslant \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right)\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

On obtient donc :

$$\int_0^\delta g(x)e^{th(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \varphi(t)\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

On fait de même avec l'autre inégalité.

(4) a) Pour $x \geqslant \delta$, on a :

$$\left|g(x)e^{th(x)}\right| \leqslant |g(x)|e^{(t-1)h(\delta)}e^{h(x)}$$

car $th(x) = (t-1)h(\delta) + h(x) + (t-1)[h(x) - h(\delta)] \leqslant (t-1)h(\delta) + h(x)$.
On intégre alors cette inégalité de 0 à $+\infty$.
b) Comme $h(\delta) < 0$ on sait que $e^{h(\delta)t} = o\left(t^{-\frac{\alpha+1}{\beta}}\right)$ donc $Be^{(t-1)h(\delta)} = o(\varphi(t))$ d'où l'existence de t_2 tel que

$$\left|\int_\delta^{+\infty} g(x)e^{th(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\varphi(t).$$

c) L'inégalité (3) est donc obtenue dès que $t \geqslant \max(t_1, t_2)$.

(5) a) On utilise les résultats des questions 2, 3, 4 pour les intégrales $\int_c^b$ et $\int_a^c$. On a en outre :

$$h(t) = h(c) + \frac{(x-c)^2}{2}h''(c) + o\left((x-c)^2\right) \text{ et } g(x) \sim g(c) \text{ en } 0$$

et donc, en prenant $\alpha = 0$, $\beta = 2$ et en remplaçant c par $-\dfrac{h''(c)}{2}$ on obtient

$$\int_c^b g(x)e^{th(x)}\,\mathrm{d}x \sim \Gamma(1/2)\frac{g(c)}{2}e^{h(c)t}\frac{1}{\sqrt{-th''(c)/2}}$$

et, de même, $\int_a^c$ est équivalente à la même expression.

b) $I(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-x} e^{tx}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{x(t-\ln x)}\, \mathrm{d}x$, on pose $x = ue^{t-1}$ d'où

$$I(t) = s\int_0^{+\infty} e^{sh(u)}\, \mathrm{d}u \text{ avec } s = e^{t-1},\ h(u) = u(1-\ln u).$$

Or h atteint son unique maximum en $u = 1$ et $h(1) = 0$, $h''(1) = -1$ d'où

$$I(t) = \int_0^{+\infty} x^{-x} e^{tx}\, \mathrm{d}x \sim \sqrt{2\pi}\exp\left[\frac{1}{2}(t-1) + e^{t-1}\right].$$

(6) a) $\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^x e^{-u}\, \mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} e^{x\ln u - u}\, \mathrm{d}u$.

$x\ln u - u$ admet son unique maximum en x, on pose donc $t = \dfrac{u}{x}$ d'où

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1}\int_0^{+\infty} e^{xh(t)}\, \mathrm{d}t$$

où $h(t) = \ln t - t$.

b) $h(1) = -1$, $h''(1) = -1$ on applique alors le résultat du 5.