TD DU 06/01/2012

Exercice 1.

I Matrices stochastiques.

Soit $P = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geqslant 2$, on dit que P est une matrice stochastique ssi $p_{ij} \geqslant 0$ et $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques d'ordre n.

1 Montrer que ces matrices ont un vep commun.

2 Montrer que $\mathcal{S}_n$ est stable par produit.

3 Montrer que $\mathcal{S}_n$ est compact, connexe par arcs.

II Le théorème ergodique.

1 Un exemple :
soit $P = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P^n$, que remarque-t-on ?

Soit maintenant $P \in \mathcal{S}_n$ dont tous les coefficients sont strictement positifs.

2 Existence d'une limite pour $P^m Y$.

a Soit Z une matrice unicolonne d'ordre n, on suppose que $\min Z \geqslant 0$ (minimum des coefficients de la matrice Z). Comparer $\min PZ$ et $\min P . \max Z$.

b Soit Y un vecteur colonne quelconque, comparer

$$\min PY \text{ et } \min P . \max Y + (1 - \min P) . \min Y.$$

Faire de même avec

$$\max PY \text{ et } \min P . \min Y + (1 - \min P) . \max Y.$$

c Conclure.

3 Mise en évidence de la loi limite.

a Montrer que P^m admet une limite notée P_∞. Que peut-on dire de P_∞ ?

b Calculer LP_∞ et caractériser L (où L a été mise en évidence à la question précédente).
L'hypothèse $p_{ij} > 0$ est-elle absolument nécessaire ?

c Montrer que P admet 1 comme valeur propre simple et que toutes ses autres valeurs propres sont de module < 1.

4 Extension : soit $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{S}_n$, on suppose que $\sum \min P_m$ diverge. Montrer que $P_1 \ldots P_m$ admet une limite.

III Application : gestion de stock pour un entrepôt.

On mesure le stock journalier d'une marchandise encombrante par $S(t)$, $t \in \mathbb{N}$ (t désigne le numéro du jour). Le stock est mesuré au matin. Pendant la journée t, les clients demandent une quantité $A(t)$ de marchandise, qui leur est fournie dans la limite des stocks. Si à la fin de la journée le stock est épuisé, il est réapprovisionné pour le lendemain au niveau $S_{max} = 3$. On a donc $S(t+1) = \begin{cases} S(t) - A(t) & \text{si } S(t) - A(t) > 0 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$.

On a pour la quantité $A(t)$ une estimation basée sur des statistiques effectuées l'année précédente : on estime qu'il y a $\begin{cases} 1/2 & \text{chances que } A(t)=0 \\ 1/3 & \text{chances que } A(t)=1 \\ 1/12 & \text{chances que } A(t)=2 \\ 1/24 & \text{chances que } A(t)=3 \\ 1/24 & \text{chances que } A(t)>3 \end{cases}$.

1 Écrire la matrice M d'ordre 3 dont le terme m_{ij} est la probabilité de passer d'un stock valant i à un stock valant j entre les temps t et $t+1$.
2 Comment interpréter la matrice M^n ?
3 Trouver la loi limite et en donner une interprétation.
4 Quelle est la fréquence moyenne des ruptures de stock ?

Solution 1

I **1** Le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est évidemment vep (associé à la vap 1).

2 On peut remarquer que $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des matrices à coefficients $\geqslant 0$ qui admettent X comme vep. Le résultat demandé est alors immédiat.

3 $\mathcal{S}_n$ est fermé (par exemple, c'est l'intersection des $F_{kl} = \{(a_{ij}) \mid a_{kl} \geqslant 0\}$ et des $G_i = \{P \mid \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1\}$ qui sont fermés).
$\mathcal{S}_n$ est borné ($P \in \mathcal{S}_n \Rightarrow 0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1$) donc $\mathcal{S}_n$ est bien compact.
Si $(P, Q) \in \mathcal{S}_n^2$ alors on vérifie immédiatement que $tP + (1-t)Q \in \mathcal{S}_n$ (en fait $\mathcal{S}_n$ est un ensemble convexe).

II **1** On écrit $P = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/12 \end{pmatrix} Q^{-1}$ avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1} = \dfrac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient immédiatement $\lim\limits_{m \to +\infty} P^m = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1} = \dfrac{1}{13} \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

2 **a** On a $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} z_j \geqslant \min P \sum_{j=1}^{n} z_j \geqslant \min P \max Z$ d'où $\min PZ \geqslant \min P \max Z$.

b Si Y est un vecteur quelconque, on remarque que $\min(Y - \lambda X) = (\min Y) - \lambda$. En reprenant le vecteur X du **I.1** , on pose $Z = Y - (\min Y)X$, $\min Z = 0$, $\max Z = \max Y - \min Y$ et $PZ = PY - (\min Y).X$ d'où $\min PZ = \min PY - \min Y \geqslant \min P. \max Z$ soit finalement

$$\min PY \geqslant \min P. \max Y + (1 - \min P). \min Y.$$

On pose ensuite $Y' = -Y$ et on applique l'inégalité précédente :

$$\max PY \leqslant \min P. \min Y + (1 - \min P). \max Y.$$

c On a $\max PY - \min PY \leqslant (\underbrace{1 - 2\min P}_{=k})(\max Y - \min Y)$. $k \geqslant 0$ car $\min P \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $k < 1$ car $\min P > 0$.
Par récurrence on prouve que

$$0 \leqslant \max P^m Y - \min P^m Y \leqslant k^m (\max Y - \min Y).$$

On a de manière évidente $\max PY \leqslant \max Y$ donc $(\max P^m Y)_{m \in \mathbb{N}} \searrow$ et de même $(\min P^m Y)_{m \in \mathbb{N}} \nearrow$. Ces 2 suites sont donc adjacentes, elles convergent vers un vecteur que l'on note Y_∞. Comme $\min Y_\infty = \max Y_\infty$ on a en outre $Y_\infty = l_\infty X$.

3 **a** Prenons $Y = E_i$ (vecteur de la base canonique) alors, en application de la question précédente, on a $P^m E_i \to l_i X$ donc

$$P_\infty = (l_1 X \ l_2 X \ \ldots \ l_n X).$$

$\operatorname{Rg} P_\infty = 1$, toutes les lignes sont égales à une même ligne $L = (l_1 \ l_2 \ \ldots \ l_n)$ et $l_1 + l_2 + \cdots + l_n = 1$.

b On a $LP = L$ et L est la seule ligne vérifiant cette relation et dont la somme des coefficients vaut 1.
L'hypothèse $p_{ij} > 0$ est nécessaire dans le cadre de cette démonstration, on s'en est servi au **II.1.c** pour avoir $k < 1$. Sinon, prendre la matrice I_n pour s'en convaincre.

D'une manière plus générale, il suffit qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que P^k vérifie $p_{ij}^{(k)} > 0$ pour tout i, j. En effet la suite $(P^{km})_{m\in\mathbb{N}}$ converge, soit P_∞ sa limite. Puis, comme $(\max P^m Y)_{m\in\mathbb{N}} \searrow$, $(\min P^m Y)_{m\in\mathbb{N}} \nearrow$ alors ces suites convergent car elles sont bornées et monotones. $(\max P^{km}Y)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(\min P^{km}Y)_{m\in\mathbb{N}}$ convergent elles aussi vers $P_\infty Y$ donc $(P^m Y)_{m\in\mathbb{N}}$ converge pour tout Y vers $P_\infty Y$ et en conclusion $(P^m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers P_∞.

c On sait déjà que P admet 1 comme valeur propre. Trigonalisons P sur $\mathbb{C}$: $P = QTQ^{-1}$ donc $P^m = QT^mQ^{-1}$ où $T^m = \begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Or T^m admet une limite T_∞ (continuité du produit matriciel) et $\operatorname{Rg} T_\infty = 1$ donc les (λ_i^m) convergent, $|\lambda_i| \leqslant 1$ donc on n'a que les possibilités suivantes : $\lambda_i = 0$ ou $\lambda_i = 1$. Or $\lambda_i = 1 \Rightarrow \operatorname{Rg} T_\infty \geqslant 2$ ce qui est écarté donc toutes les autres vap de P sont de module < 1.

4 le raisonnement du 1 s'applique : on a

$$\max P_1 \dots P_m Y - \min P_1 \dots P_m Y \leqslant \Pi_m(\max Y - \min Y)$$

avec $\Pi_m = \displaystyle\prod_{i=1}^{m}(1 - 2\min P_i)$. On distingue alors 2 cas :

- $\min P_i \to 0$ alors $\ln(1 - 2\min P_i) \sim -2\min P_i$ donc $\ln \Pi_m \to -\infty$, $\Pi_m \to 0$.
- $\min P_i \not\to 0$ alors $\exists \varepsilon > 0$, $\exists (i_j)$ suite extraite telle que

$$\forall j \in \mathbb{N},\ \min P_{i_j} \geqslant \varepsilon\ (\varepsilon \leqslant \frac{1}{n}$$

alors $0 < 1 - 2\min P_{i_j} \leqslant 1 - 2\varepsilon$ et $\Pi_m \leqslant (1-2\varepsilon)^{k_m}$ avec $k_m = \operatorname{Card}\{i_j \mid i_j \leqslant m\} \to +\infty$. Là aussi $\Pi_m \to 0$.

Les suites $(\max P_1 \dots P_m Y)_m$ et $(\min P_1 \dots P_m Y)_m$ sont adjacentes, $P_1 \dots P_m \to, P_\infty$ et cette limite vérifie les mêmes propriétés qu'au **3**.

III **1** On obtient $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/12 & 1/3 & 7/12 \end{pmatrix}$.

2 Les termes m_{ij}^n de la matrice M^n correspondent à la probabilité de passer d'un stock valant i à un stock valant j entre les temps t et $t+n$.

3 On obtient comme loi limite la ligne [11/41 12/41 18/41]. L'interprétation de ceci est que $P(S=1) = \dfrac{11}{41}$, $P(S=2) = \dfrac{12}{41}$ et $P(S=3) = \dfrac{18}{41}$.

4 La fréquence des ruptures de stock est donnée par la formule :

$$P(S=1)\times P(A(t) \geqslant 2) + P(S=2)\times P(A(t)\geqslant 3) + P(S=3)\times P(A(t) > 3)$$
$$= \frac{11}{41}\times\frac{1}{6} + \frac{12}{41}\times\frac{1}{12} + \frac{18}{41}\times\frac{1}{24} = \frac{43}{492}$$