TD DU 20/01/2012

Exercice 1. Soit Q une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^n$, de matrice $A = (a_{ij})$. On définit

$$q(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1} (a_{nn}a_{ij} - a_{ni}a_{nj})x_i x_j.$$

Montrer que q est une forme quadratique définie positive sur $\mathbb{R}^{n-1}$.

Exercice 2. Soit C un endomorphisme d'un espace euclidien E.
Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

(i) Il existe $y \in \mathcal{S}^+(E)$ défini positif tel que $y - CyC^* > 0$.
(ii) $C^n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Solution 1 Soit $(e_1,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on pose $x = x_1e_1 + \cdots + x_{n-1}e_{n-1}$ alors, comme $Q(e_n) = a_{nn} > 0$, $Q(x) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} a_{ij}x_ix_j$ et $B(e_n,x) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_{ni}x_i$, on a

$$\begin{aligned} q(x_1,\dots,x_{n-1}) &= a_{nn}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} a_{ij}x_ix_j - \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n-1} a_{ni}x_ia_{nj}x_j \\ &= Q(e_n)Q(x) - B(e_n,x)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Si $q(x_1,\dots,x_{n-1}) = 0$ alors on sait que la famille (x,e_n) est liée (cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz) ce qui entraîne $x = 0$.

Solution 2
$(ii) \Rightarrow (i)$ Lemme : Si a est un endomorphisme d'un espace vectoriel F de dimension finie, alors $a^n \to 0 \Leftrightarrow \sum a^n$ converge.

Dém : Soit $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} a^n$ alors $(I-a)S_N = I - a^{N+1} \to I$ et comme 1 n'est pas valeur propre de a (sinon a^n ne pourrait tendre vers 0), $I-a$ est inversible. Par continuité du produit dans l'algèbre $\mathcal{L}(F)$, on en déduit que $\sum\limits_{n=0}^{N} a^n \to (I-a)^{-1}$.
On applique ce résultat à $a(x) = CxC^*$ endomorphisme de $F = \mathcal{S}(E)$:
En effet

- $a^n(x) = C^nx(C^*)^n$ (immédiat par récurrence, ne pas oublier que a^n est le composé n-ième de a),
- $\|a^n(x)\| \leqslant \|C^n\|.\|x\|.\|(C^*)^n\|$, comme $(C^*)^n = (C^n)^*$ (immédiat si on prend les matrices) donc $a^n(x) \to 0$ pour tout x de F et par conséquent $a^n \to 0$.

Si $x \in \mathcal{S}(E)$ est défini positif alors $(I-a)^{-1}(x) = y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n(x)$ est aussi défini positif car

$$\begin{aligned} (y(v)|v) &= (x(v)|v) + \sum_{n=1}^{+\infty}(C^nx(C^*)^n(v)|v) \\ &= \underbrace{(x(v)|v)}_{>0} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}(x(C^*)^n(v)|(C^*)^n(v))}_{\geqslant 0} > 0 \end{aligned}$$

pour $v \neq 0$).
On a aussi $y - CyC^* = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a^n(x) - \sum\limits_{n=0}^{+\infty} Ca^n(x)C^* = x$ qui est défini positif. y ainsi défini convient.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Soit $\|x\|_y = \sqrt{(y(x)|x)}$ alors $(y(x) - CyC^*(x)|x) > 0$ donc $(CyC^*(x)|x) < \|x\|_y^2$ ce qui donne $\|C^*(x)\|_y < \|x\|_y^2$ et en conclusion $\|C^*\|_y < 1$ (car, étant en dimension finie, la norme associée est atteinte en un point de la sphère unité).
Comme $\|C^{*n}\|_y \leqslant \|C^*\|_y^n$ alors $C^{*n} \to 0$, de même pour C^n c.q.f.d.
