TD DU 03/02/2012 ET DU 10/02/2012

Exercice 1. Oral ENS 2007

Soit f $\mathcal{C}^\infty$, réelle, 2π périodique, de moyenne nulle, on pose $g = f + f''$. Montrer que g s'annule au moins 4 fois sur une période.

Exercice 2. Oral ENS 1998

Soit $e \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, on veut étudier le système

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) \wedge e - u(t) \wedge (u(t) \wedge e) \\ u(0) = u_0 \text{ avec } \|u_0\| = 1 \end{cases}$$

Solution 1

On développe f et f'' en série de Fourier : $f(x) = \sum_{n\neq 0} c_n \mathrm{e}^{inx}$, $f''(x) = \sum_{n\neq 0} -n^2 c_n \mathrm{e}^{inx}$ donc $g(x) = \sum_{n\neq 0}(1-n^2)c_n \mathrm{e}^{inx}$. On remarque que $c_0(g) = c_1(g) = c_{-1}(g) = 0$. On développe en série de cosinus : $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} A_n \cos(nx+\varphi_n)$ et on pose $g_k(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{A_n}{n^k}\cos(nx+\varphi_n - k\frac{\pi}{2})$. g_k vérifie $g_k' = g_{k-1}$ et $g_0 = g$.
Si g_k s'annule 4 fois au moins sur une période alors soit $0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < 2\pi$ les points où g_k s'annule, par le théorème de Rolle, g_{k-1} s'annule en $y_1 \in]x_1, x_2[$, $y_2 \in]x_2, x_3[$, $y_3 \in]x_3, x_4[$ et en $y_4 \in]x_4, x_1 + 2\pi[$ i.e. g_{k-1} s'annule au moins 4 fois sur une période et par récurrence, il en sera de même pour g.
On suppose g non nulle, soit p le plus petit entier tel que $A_p \neq 0$ alors

$$\begin{aligned}
p^k g_k(x) &= A_p\left[\cos(px+\varphi_p - k\frac{\pi}{2}) + \sum_{n=p+1}^{+\infty}\frac{A_n}{A_p}\left(\frac{p}{n}\right)^k \cos(nx+\varphi_n - k\frac{\pi}{2})\right] \\
&= A_p\left[\cos(px+\varphi_p - k\frac{\pi}{2}) + G_k(x)\right].
\end{aligned}$$

Or pour $n \geqslant p+1$, $\left|\dfrac{A_n}{A_p}\left(\dfrac{p}{n}\right)^k \cos(nx+\varphi_n - k\frac{\pi}{2})\right| \leqslant \left|\dfrac{A_n}{A_p}\right|\left(\dfrac{p}{p+1}\right)^k$ terme général d'une série convergente. On a ainsi $|G_k(x)| \leqslant \left(\dfrac{p}{p+1}\right)^k \sum_{n=p+1}^{+\infty}\left|\dfrac{A_n}{A_p}\right| \to 0$.
On choisit alors k pour que $|G_k(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout x. $x_1 = \dfrac{k}{p}\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi_p}{p}$, $x_2 = \dfrac{k+2}{p}\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi_p}{p}$, $x_3 = \dfrac{k+4}{p}\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi_p}{p}$, $x_4 = \dfrac{k+6}{p}\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi_p}{p}$. On remarque que $p^k g_k(x_i) = A_p((-1)^{i-1} + G(x_i))$ est du signe de $(-1)^{i-1}$ donc, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, g_k s'annule au moins 4 fois sur une période, il en est de même pour g.

Solution 2 Comme $(u'(t)|u(t)) = 0$ on en déduit que $\|u(t)\| = 1$ pour tout t.
On peut se ramener au cas où $\|e\| = 1$ (en changeant de paramètre, $\theta = at$ avec $a = \|e\|$, on note toujours t le paramètre). Dans ce cas, on complète la famille (e) en une base orthonormale ce qui donne le système différentiel (u admet x, y, z comme coordonnées et $x^2+y^2+z^2 = 1$) :

$$\begin{aligned}
x' &= 1 - x^2 \\
y' &= z - xy \\
z' &= -y - xz
\end{aligned}$$

d'où

- si $x(t) = \pm 1$ alors $y = z = 0$ et la solution u est constante,
- si x ne prend pas la valeur 1, $x = \operatorname{th} t$ (en faisant une translation sur le paramètre pour se ramener en 0) car $|x| < 1$.

En $\pm\infty$ $x \to \pm 1$ et y et z tendent vers 0.

En fait on peut essayer d'intégrer l'équation différentielle en posant $Z = y + iz$, Z vérifie $Z' = (-\operatorname{th} t - i)Z$ ce qui donne $Z = C\dfrac{e^{-it}}{\operatorname{ch} t}$. Si on écrit $C = \alpha + i\beta$ alors on obtient

$$y = \frac{\alpha\cos t + \beta\sin t}{\operatorname{ch} t},\quad z = \frac{\beta\cos t - \alpha\sin t}{\operatorname{ch} t}$$