TD DU 02/03/12 ET DU 09/03/12

Exercice 1. Oral ENS 99

(1) Soit $\mathcal{C}_T$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T-périodiques. Pour $\lambda > 0$ on définit
$$\forall f \in \mathcal{C}_T,\ T_\lambda f \ : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\rho\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right) \mathrm{d}u$$
où $\rho\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, paire, telle que $u \mapsto u^3\rho(u)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
Montrer que $T_\lambda f$ est bien définie et est dans $\mathcal{C}_T$.

(2) Si $f \in \mathcal{C}_T \cap \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donner un développement limité de $\lambda \mapsto T_\lambda f$ avec deux termes, uniforme en x (i.e. $\exists \alpha$, $\exists o(\lambda^\alpha)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists P(x, \lambda)$, $T_\lambda f(x) = P(x, \lambda) + o(\lambda^\alpha)$.)

(3) Soit $F(x,t) \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$ telle que $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = F(x, 0)$. On suppose en outre que $\forall t \geqslant 0$, $F(.,t) \in \mathcal{C}_T$ (f est toujours $\mathcal{C}^3$).
Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\ \lim_{n\to+\infty} T^n_{t/n} f(x) = F(x, Ct)$$
où $\forall \lambda > 0$, T^n_λ est la composée n-ième de l'opérateur T_λ.

Solution 1

(1) ρ est intégrable sur $\mathbb{R}$ car $|\rho(u)| \leqslant \begin{cases} |\rho(u)| & \text{si } |u| \leqslant 1 \\ |u|^3.|\rho(u)| & \text{si } |u| \geqslant 1 \end{cases}$ ce qui fournit aussi l'hypothèse de domination. Comme $(x,u) \mapsto f(x-u)\rho\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda}}\right)$ est continue, $T_\lambda f \in \mathcal{C}_T$ grâce au théorème de continuité sous le signe intégral. La T-périodicité est immédiate.

(2) On utilise la formule de Taylor-Lagrange

$$f(x+u) = f(x) + uf'(x) + \frac{u^2}{2}f''(x) + \frac{u^3}{6}f'''(c)$$

et on l'applique pour $u = -\sqrt{\lambda}t$.
À x fixé, $u \mapsto f'''(c)$ est continue (pour $u \neq 0$, c'est immédiat et cette application se prolonge par continuité en 0 par $f'''(x)$).
Comme f''' est bornée (continue et T-périodique) alors $t \mapsto t^3\rho(t)f'''(c)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'où

$$T_\lambda f(x) = f(x)\int_{\mathbb{R}} \rho(t)\,\mathrm{d}t - \sqrt{\lambda}f'(x)\int_{\mathbb{R}} t\rho(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\lambda}{2}f''(x)\int_{\mathbb{R}} t^2\rho(t)\,\mathrm{d}t - \frac{\lambda^{3/2}}{6}\int_{\mathbb{R}} t^3\rho(t)f'''(c)\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} t\rho(t)\,\mathrm{d}t = 0$ car ρ est paire et, si on pose $A_i = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^i\rho(t)\,\mathrm{d}t$ on obtient finalement

$$T_\lambda f(x) = f(x) + \frac{\lambda}{2}A_2 f''(x) - \underbrace{\frac{\lambda^{3/2}}{6}\int_{\mathbb{R}} t^3\rho(t)f'''(c)\,\mathrm{d}t}_{=\lambda^{3/2}m(0,\lambda,x)}$$

où $m(0,\lambda,x)$ est borné indépendamment de x car $|f'''(c)| \leqslant \|f'''\|_\infty$.

(3) Pour $t' \in [0, \frac{(n-1)A_2 t}{2n}]$ on a, en appliquant la formule précédente à $g(x) = F(x,t')$,

$$\begin{aligned} T_{t/n}F(x,t') &= F(x,t') + \frac{A_2 t}{2n}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t') - \frac{1}{n^{3/2}}m(t',t/n,x) \\ &= F(x,t') + \frac{A_2 t}{2n}\frac{\partial F}{\partial t}(x,t') - \frac{1}{n^{3/2}}m(t',t/n,x) \\ &= F(x,t' + \frac{t}{2n}A_2) + \frac{1}{n^2}p(t',t,n,x) - \frac{1}{n^{3/2}}m(t',t/n,x) \end{aligned}$$

où $p(t',t,n,x) = -\left(\frac{A_2 t}{2}\right)^2 \frac{\partial F}{\partial t}(x, t' + \theta\frac{A_2 t}{2n})$ est obtenu avec l'égalité des accroissements finis (appliqué à $F(x,.)$) et $m(t',t/n,x)$ correspond à la quantité mise en évidence lors du développement de $T_\lambda f(x)$ en prenant $F(x,t')$ à la place de $f(x)$.
On peut majorer $p(t',t,n,x)$ uniformément en t' et x en prenant la borne supérieure de la dérivée seconde sur $[0, \frac{A_2 t}{2}]$. De même $m(t',t/n,x)$ est uniforme en t' et en x (on reprend la majoration de la question précédente, t' décrit un compact, $c \in [0,x]$). On a ainsi $T_{t/n}F(x,t') = F(x, t' + \frac{t}{2n}A_2) + \frac{1}{n^{3/2}}q(t',t,n)$ où q est uniformément bornée en t' et en x.
Or T_λ est un opérateur linéaire de norme 1 donc $T_\lambda\left(\frac{1}{n^{3/2}}q(t',t,n)\right) = \frac{1}{n^{3/2}}r(t',t,n)$ où, comme q, r est uniformément bornée en t' et en x. Par conséquent, en notant $r_k = r(kA_2t/(2n), t/n, x)$, on a par récurrence sur k,

$$T^k_{t/n}F(x,0) = F(x, \frac{kA_2}{2n}t) + \frac{1}{n^{3/2}}\sum_{i=0}^{k-1} r_i = F(x, \frac{kA_2}{2n}t) + R_k$$

où $|R_k| \leqslant \dfrac{k}{n^{3/2}}M$ où M est un majorant des r_k.
Pour $k = n$ on obtient $T^n_{t/n}f(x) = F(x, \frac{A_2}{2}t) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ soit $\lim\limits_{n\to+\infty} T^n_{t/n}f(x) = F(x, \frac{A_2}{2}t)$.
$C = \dfrac{A_2}{2}$ convient.