TD DU 16/03/2012 ET DU 23/03/2012

Exercice 1. Théorème de Corominas (publié en 1954).
Solution élémentaire due à Randal Douc (alors élève en Spéciales).
Voir
`http://www-public.it-sudparis.eu/~douc_ran/`

Soit f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et si, pour tout x de $[0,1]$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$, on veut alors prouver que f est un polynôme.
On note Z_n l'ensemble des zéros de $f^{(n)}$.

(1) Montrer que tout point d'accumulation de Z_0 annule f ainsi que toutes ses dérivées.
(2) Montrer que, si f se restreint à un polynôme sur chaque intervalle d'intersection vide avec Z_0 alors f est un polynôme sur $[0,1]$.
(3) On suppose par l'absurde que f n'est pas un polynôme.
   a) Montrer qu'il existe un segment F_0 de $[0,1]$ que l'on peut supposer disjoint de Z_0 tel que $f_{|F_0}$ ne soit pas un polynôme.
   b) Construire alors des segments F_n emboîtés, disjoints de Z_n tels que $f^{(n)}_{|F_n}$ ne soit pas un polynôme.
   c) Conclure.

Solution 1

(1) Soit x un point d'accumulation de Z_0 alors x est limite d'une suite $(x_p) \in Z_0^{\mathbb{N}}$ non stationnaire. On peut supposer (x_p) strictement monotone. Par continuité $f(x) = 0$ puis, grâce au théorème de Rolle, $f(x_{p+1}) - f(x_p) = (x_{p+1} - x_p)f'(x_p^1) = 0$ d'où l'existence d'une suite strictement croissante (x_p^1) d'éléments de Z_1. x est aussi point d'accumulation de Z_1. Par une récurrence alors immédiate, x est point d'accumulation de Z_n donc $f^{(n)}(x) = 0$.

On peut aussi raisonner par l'absurde : si x n'annule pas toutes les dérivées de f, soit p le plus petit entier tel que $f^{(p)}(x) \neq 0$ alors la formule de Taylor-Young donne

$$f(x_n) = f(x) + (x_n - x)f'(x) + \cdots + \frac{(x_n - x)^p}{p!}f^{(p)}(x) + o[(x_n - x)^p]$$

et comme $f(x_n) = f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(p-1)}(x) = 0$, on en déduit (après simplification par $(x_n - x)^p$) que $f^{(p)}(x) = o(1)$ soit $f^{(p)}(x) = 0$ ce qui est contradictoire.

(2)
- Si $Z_0 = [0, 1]$ alors $f = 0$ et c'est terminé.
- Si $Z_0 \neq [0, 1]$ alors son complémentaire est un ouvert de $[0, 1]$. Soit $x \in Z_0^c$ et $[a, b]$ un intervalle maximal contenant x et tel que f soit un polynôme sur $[a, b]$. b ne peut être un point d'accumulation de Z_0 sinon toutes les dérivées de f seraient nulle en b (vu le (1)) et f serait nulle sur $[a, b]$ ce qui est impossible car $x \in Z_0^c$.

  Si $b < 1$ alors on peut trouver $b_1 > b$ tel que $]b, b_1[\subset Z_0^c$ (en effet, b est un point isolé de Z_0), f se restreint à un polynôme sur $]b, b_1[$. Par continuité, les fonctions polynomiales sur $[a, b]$ et $[b, b_1]$ ont même dérivées en b, elles sont donc égales. On obtient alors une contradiction avec la maximalité de $[a, b]$ car f est polynomiale sur $[a, b_1]$.

  De même, on montre que $a = 0$ donc f est bien un polynôme sur $[0, 1]$.

(3)
a) Par contraposition avec la propriété du (2) on a l'existence d'un segment tel que la restriction de f à cet intervalle ne soit pas polynomiale. On peut encore rétrécir ce segment pour qu'il ne contienne aucun élément de Z_0.

b) f' vérifie les mêmes hypothèses que f et sa restriction à F_0 n'est pas un polynôme donc, quitte à réduire F_0 on peut mettre en évidence un segment F_1 d'intersection vide avec Z_1. $F_1 \subset F_0$ et par récurrence, on peut ainsi construire une suite de segments F_n emboîtés disjoints de Z_n.

c) On sait que l'intersection des F_n est non vide (théorème des segments emboîtés), soit x dans cette intersection. x n'appartient à aucun des Z_n ce qui est contraire à l'hypothèse.

Conclusion : f est un polynôme.