ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE AFFINE

1. Espaces vectoriels, applications linéaires

1.1. **Bases, sommes directes.**

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{I C}}$

Soit $E = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$ qui est un e.v. sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en prenant pour p un nombre premier.

(1) Si $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ est une famille libre F_k, chercher le nombre d'éléments x de E tels que $F \cup \{x\}$ soit liée.

(2) Montrer que le nombre de familles libres à k éléments vaut $\prod_{i=0}^{k-1} (p^n - p^i)$.

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit G un groupe fini tel que

$$\forall x \in G,\ x^2 = e.$$

Avec les techniques des espaces vectoriels, prouver que

$$\exists n \in \mathbb{N} \mid \operatorname{Card} G = 2^n.$$

(On pourra considérer G comme un espace vectoriel sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.)

Peut-on généraliser ceci au cas où il existe un nombre p premier tel que

$$\forall x \in G,\ x^p = e.$$

1.2. **Image et noyau d'une application linéaire.**

Exercice 1.2.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$ espace vectoriel.

On note E^G l'ensemble des points fixes (i.e. l'ensemble des x de E tels que $\forall g \in G$, $g(x) = x$).

(1) Prouver que E^G est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Prouver que $p = \dfrac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} g$ est un projecteur sur E^G. Si E est de dimension finie montrer que $\dim E^G = \dfrac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \operatorname{Tr}(g)$.

(3) Traiter l'exemple suivant :

$$G = \{m, \mathrm{Id}\},\ E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ m(f)(x) = f(-x).$$

Exercice 1.2.2. $\boxed{\textbf{D}}$

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$.

(1) Soit $(p_i)_{i \in [1,k]}$ une famille de projecteurs, prouver l'équivalence de (i) et (ii) :

(i) $i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$.

(ii) $p = \sum_{i=1}^{k} p_i$ est un projecteur.

(2) Soit $(p_i)_{i\in[1,k]}$ une famille d'endomorphismes de E, on suppose que l'on a $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i = \mathrm{Id}_E$.
Prouver l'équivalence de (i) et (ii) :
(i) $i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$.
(ii) $\forall i \in [1,k]$, p_i est un projecteur.

Exercice 1.2.3. **I**

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ n endomorphismes nilpotents permutant 2 à 2.
Montrer que $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n = 0$.

1.3. **Dualité en dimension finie.**

Exercice 1.3.1. **F**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$; on définit $f_x\ : P \mapsto P(x)$.

(1) Montrer que si $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont des réels distincts, $(f_{x_0}, f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$ est une base de E^*.
(2) Montrer que si une suite de E converge simplement vers ϕ alors ϕ est un polynôme.

Exercice 1.3.2. **F**

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v., E_1, E_2,... E_n n s.e.v. de E tels que $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{n} E_k$.

Montrer que $\prod\limits_{k=1}^{n} E_k^*$ et E^* sont canoniquement isomorphes.

Exercice 1.3.3. **F T**

Soit $a < b$ et $c \in]a,b[$; discuter selon les valeurs de c l'indépendance des 4 formes linéaires : $f_a\ : P \mapsto P(a)$, $f_b\ : P \mapsto P(b)$, $f_c\ : P \mapsto P(c)$ et $f_4\ : P \mapsto \int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ et dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 1.3.4. **I C**

Chercher une base duale de $1, X, X(X-1), \ldots, X(X-1)(\ldots)(X-n+1)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Donner alors l'expression d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 1.3.5. **I C**

On se place dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; on appelle L_p l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty,\ (p > 1).$$

(1) Montrer que L_p est un s.e.v. de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(2) Si $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L_q$ où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et si $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L_p$, montrer que l'on peut définir $f \in L_p^*$ par : $f(a) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ et que f est continue.

(3) Montrer réciproquement que toute forme linéaire continue définie sur L_p peut s'écrire comme ci-dessus.

1.4. **Trace d'un endomorphisme.**

Exercice 1.4.1. $\boxed{\textbf{D}}$

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie $n \geqslant 1$. Pour $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, on note $T_u \in (\mathcal{L}(E))^*$ défini par $T_u(v) = \mathrm{Tr}(u \circ v)$.

(1) Prouver que $u \mapsto T_u$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $(\mathcal{L}(E))^*$.

(2) Soit φ un élément de $(\mathcal{L}(E))^*$ tel que $\varphi(u\circ v) = \varphi(v\circ u)$ pour tous les éléments u et v de $\mathcal{L}(E)$. À l'aide de la représentation matricielle, prouver que $\varphi = \lambda\,\mathrm{Tr}$. En déduire que l'espace vectoriel F des endomorphismes de E engendré par $\{u\circ v - v\circ u, (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2\}$ est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$.

(3) Pour α, β de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, on pose $[\alpha,\beta] = \alpha\circ\beta - \beta\circ\alpha$ et $\mathcal{C}_\alpha = \{u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) \mid \alpha\circ u = u\circ\alpha\}$. Montrer que $\mathrm{Tr}([\alpha,\beta]\circ\gamma) = 0$ pour α, β dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ et γ dans $\mathcal{C}_\alpha$.

(4) Soit α et u dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ tels que T_u s'annule sur $\mathcal{C}_\alpha$. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ tel que $u = [\alpha, v]$.

Exercice 1.4.2. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, p, q, r 3 projecteurs.
Est-ce que l'endomorphisme $p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3}$ peut être un projecteur ?

Exercice 1.4.3. $\boxed{\textbf{F}}$

Soient A et B 2 matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
Résoudre l'équation d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A = B.$$

1.5. **Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires.**

Exercice 1.5.1. $\boxed{\textbf{D}}$

Soit A une matrice carrée d'ordre n sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle telle que $\mathrm{Tr}\,A = 0$.

(1) Prouver que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

(2) En déduire qu'il existe deux matrices B et C carrées telles que $A = BC - CB$.

Exercice 1.5.2. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que AB est la matrice d'un projecteur. Calculer $\operatorname{Rg} A$ et $\operatorname{Rg} B$.
(2) Montrer que $BA = I_2$.

EXERCICE 1.5.3. $\boxed{\textbf{D}}$

(1) Trouver une C.N.S. pour que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ soit inversible.
(2) Soit $L = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, trouver une C.N.S. pour qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et dont la première ligne est donnée par L.

1. Indications :

Indication 1.1.1

(1) $F \cup \{x\}$ est liée ssi x est combinaison linéaire des (x_i), on trouve alors p^k.
(2) Raisonner par récurrence sur k, si $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ sont libres alors pour avoir une famille libre à $k+1$ éléments, on aura $p^n - p^k$ choix.

Indication 1.1.2 Montrer que G est commutatif, vérifier que G est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et montrer que G est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Indication 1.2.1

(1) Évident.
(2) Remarquer que $\sum_{g' \in G} gg' = \sum_{g'' \in E} g''$, montrer ensuite que $\operatorname{Im} p = E^G$ et utiliser la propriété $\operatorname{Rg} p = \operatorname{Tr}(p)$.
(3) E^G est l'ensemble des fonctions paires, et p est l'application qui à une fonction f fait correspondre sa partie paire.

Indication 1.2.2

(1) $(i) \Rightarrow (ii)$ $p^2 = p$ est évident.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Montrer que $\operatorname{Tr}(p) = \sum_{i=1}^k \operatorname{Tr} p_i$, en déduire que $p(E) = \bigoplus_{i=1}^{k} p_i(E)$ puis, si $x \in \operatorname{Im} p_i$, montrer que $p_j(x) = 0$ si $j \neq i$.
(2) $(i) \Rightarrow (ii)$ $p_i = p_i^2$ immédiat.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Appliquer le (1) à Id_E.

Indication 1.2.3 Montrer par récurrence descendante sur k que $\operatorname{Rg} g_k \leqslant n-k$ où $g_k = f_1 \circ \dots \circ f_k$ en utilisant la propriété suivante : si f est un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel F alors $\operatorname{Rg} f \leqslant \dim F - 1$.

Indication 1.3.1

(1) La famille $(f_{x_0}, f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$ est la base duale de la base des P.I.L.
(2) Si P_m est une suite de E qui converge simplement vers ϕ alors $\forall i \in [0, n]$, $f_{x_i}(P_m)$ a une limite a_i et montrer que $\phi(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \cdots + a_n L_n(x)$.

Indication 1.3.2 Poser $x_k^* = x^*_{|E_k}$ (restriction de la forme linéaire x^* à l'espace E_k), définir $\varphi : x^* \in E^* \mapsto (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ montrer que φ est un isomorphisme canonique de E^* dans $\prod_{k=1}^n E_k^*$.

Indication 1.3.3 Faire intervenir les P.I.L. et montrer que dans $\mathbb{R}_2[X]$ les formes sont liées ainsi que dans $\mathbb{R}_3[X]$ si $c = \frac{a+b}{2}$, sinon elles sont libres.

Indication 1.3.4 Utiliser l'opérateur : $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ et montrer que les éléments f_k de la base duale sont les formes linéaires $P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \frac{1}{k!}\Delta^k P(0)$. Les coordonnées de P dans la base des (e_k) sont $P = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\Delta^k P(0) e_k$.

Indication 1.3.5

(1) Utiliser les inégalités de Minkowski et Hölder en passant à la limite (cf. *Questions (v) et (vi) page 73*).
(2) Prendre $a_n = |a_n|$, $b_n = |b_n|$ et passer à la limite ce qui permet de définir f. Avec l'inégalité de Hölder et par passage à la limite en déduire que $|f(a)| \leqslant \|b\|_q.\|a\|_p$.
(3) Réciproque : soit $f \in L_p^*$ une forme linéaire continue, (e_n) la suite de L_p dont tous les termes sont nuls sauf le $n+1^{\text{ième}}$ qui vaut 1, poser $b_n = f(e_n)$ et exploiter l'inégalité $f(a) \leqslant C\|a\|_p$ en prenant la suite (a^N) définie par $a_n^N = \varepsilon_n |b_n|^{q/p}$ si $n \leqslant N$ et 0 si $n > N$ où ε_n est du signe de b_n.

Indication 1.4.1

(1) Montrer que $u \mapsto T_u$ est injectif en utilisant la base (u_{ij}) (cf. *théorème 8.15 page 135*) et en utilisant la formule $\operatorname{Tr}(u) = \sum_{k=1}^n e_k^*(u(e_k))$.

(2) Le premier résultat est classique.
$F \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est immédiat puis on complète $f_1 = \mathrm{Tr}$ pour avoir une base $(f_1, \ldots, f_{n^2})$ de l'espace dual et on montre que $F = \mathrm{Vect}(e_i)_{i \geqslant 2}$ où (e_i) est la base antéduale.
(3) Utiliser la propriété suivante : $\mathrm{Tr}(u \circ v) = \mathrm{Tr}(v \circ u)$ et le fait que $\alpha \circ \gamma = \gamma \circ \alpha$.
(4) On pose $V_\alpha = \mathrm{Im}\, L_\alpha$ où $L_\alpha(u) = [\alpha, u]$ $\mathrm{Ker}\, V_\alpha = C_\alpha$. On a $T_u \subset C_\alpha^\perp$. On raisonne alors sur les dimensions en utilisant le fait que $u \mapsto T_u$ est un isomorphisme.

Indication 1.4.2 Utiliser la trace, la seule façon d'avoir un projecteur est que $q = r = 0$.

Indication 1.4.3 Montrer qu'il faut $\mathrm{Tr}(B) = 0$ et en déduire que les solutions sont données par $M = \frac{1}{\mathrm{Tr}(A)} B - \lambda A$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Indication 1.5.1

(1) Procéder par récurrence sur n, si u est l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé à A, écarter le cas où u est une homothétie et prouver qu'il existe un vecteur e_1 de $\mathbb{K}^{n+1}$ tels que $(e_1, u(e_1))$ soit libre. Compléter alors la famille $(e_1, u(e_1))$ en une base.
(2) Traiter d'abord le cas d'une matrice de diagonale nulle avec $C = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$ où les λ_i sont tous distincts et $B = (b_{ij})$ bien choisie puis étendre la propriété aux matrices semblables à une matrice de diagonale nulle.

Indication 1.5.2

(1) Poser $AB = C$ et montrer que C est la matrice d'un projecteur sur un espace vectoriel de dimension 2 puis conclure que $\mathrm{Rg}\, A = \mathrm{Rg}(B) = 2$.
(2) Montrer que $A[BA - I_2]B = 0$ et en déduire qu'il existe une matrice B' telle que $BB' = I_2$ et une matrice A' telle que $A'A = I_2$.

Indication 1.5.3

(1) La C.N.S. est $\det A = \pm 1$ ($AB = I_n$ avec $\det A$ et $\det B$ dans $\mathbb{Z}$).
(2) $\Rightarrow$ immédiat.
$\Leftarrow$ si $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n = 1$ alors il existe $b_1, \ldots, b_n$ tels que $b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n = 1$, montrer alors par récurrence sur $r < n$ que l'on peut trouver $A_r \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{Z})$ et $B_r \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{Z})$ où $r < n$ telles que $A_r B_r = I_r$ avec $A_1 = (a_1 \ldots a_n)$. On montre que l'on peut compléter A_r (resp. B_r) en matrice $(r+1, n)$ (resp. $(n, r+1)$) vérifiant $A_{r+1} B_{r+1} = I_{r+1}$ en cherchant un couple (L_{r+1}, C_{r+1}) qui vérifient les trois conditions :
$A_r C_{r+1} = 0$ (1), $L_{r+1} B_r = 0$ (2), $L_{r+1} C_{r+1} = 1$ (3).

1. Solutions

Solution 1.1.1

(1) $F \cup \{x\}$ est liée ssi x est combinaison linéaire des (x_i). $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ (et les λ_i sont uniques) ; il y a donc bijection entre les x et les k-uplets $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. On a p choix pour chaque λ_i, le nombre des vecteurs x convenant est p^k.

(2) On raisonne par récurrence sur k : pour former une famille libre à 1 élément, il suffit de choisir un vecteur x_1 non nul, on a $p^n - 1$ choix.

Si $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ libres, et si le nombre de possibilités est $\prod_{i=0}^{k-1}(p^n - p^i)$ alors pour avoir une famille libre à $k+1$ éléments, il faudra choisir un vecteur non lié à la famille précédente, on aura en tout $p^n - p^k$ choix. La récurrence est alors immédiate.

Solution 1.1.2 On montre tout d'abord qu'un tel groupe est commutatif. En effet, tout élément étant égal à son propre inverse, on a

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx = xy.$$

On munit alors G d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $\overline{\lambda}.x = x^\lambda$ où $\overline{\lambda}$ désigne la classe d'équivalence de λ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Cette opération externe est bien définie. Vérifions les autres axiomes des espaces vectoriels (on note $*$ la loi interne dans G) :

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}.(\overline{\mu}.x) &= (\overline{\mu}.x)^\lambda = x^{\lambda\mu} = (\lambda\mu).x \\
(\overline{\lambda} + \overline{\mu}).x &= x^{\lambda+\mu} = x^\lambda * x^\mu = (\lambda.x) * (\mu.x) \\
\overline{\lambda}.(x * y) &= (x * y)^\lambda = x^\lambda * y^\lambda = \overline{\lambda}.x * \overline{\lambda}.y \\
\overline{1}.x &= x^1 = x
\end{aligned}$$

Comme G est fini, il est de dimension finie n, il est alors isomorphe à $\mathbb{K}^n$ et donc de cardinal 2^n.
La généralisation se fait de même en considérant $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ à condition cette fois-ci que G soit commutatif.

Solution 1.2.1

(1) Évident grâce à la linéarité des applications de G.

(2) On remarque que

$$(P) \qquad \sum_{g' \in G} gg' = \sum_{g'' \in E} g''$$

car $g' \mapsto gg'$ est une bijection de G sur G.
Si on pose $n = \operatorname{Card} G$ et $p = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g$ alors

$$p^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{(g,g') \in G^2} gg' = \frac{1}{n^2} \sum_{g'' \in G} ng' = p$$

donc p est un projecteur.
Ensuite, si $p(x) = x$ alors, toujours grâce à la propriété (P), on aura $g(x) = g \circ p(x) =$

$p(x) = x$ donc $x \in E^G$, i.e. $p(E) \subset E^G$. L'inclusion inverse est évidente. On a donc $\operatorname{Im} p = E^G$ et, en utilisant la *proposition 2.1.8 page 185*, on sait que

$$\dim E^G = \operatorname{Rg} p = \operatorname{Tr}(p) = \frac{1}{\operatorname{Card} G} \sum_{g \in G} \operatorname{Tr}(g).$$

(3) Pour l'exemple que l'on demande de traiter, l'ensemble E^G est l'ensemble des fonctions paires, et p est l'application qui à une fonction f fait correspondre sa partie paire $p(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.

Solution 1.2.2

(1) $(i) \Rightarrow (ii)$ On a de manière évidente $p^2 = p$. En effet, comme $p_i \circ p_j = 0$ alors

$$p^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i = p.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ On sait que $\dim \operatorname{Im} p = \operatorname{Tr}(p)$ (cf. *proposition 2.1.8 page 185*) donc $\operatorname{Tr}(p) = \sum\limits_{i=1}^{k} \operatorname{Tr} p_i$.

Comme $p(E) \subset \sum\limits_{i=1}^{k} p_i(E)$ et que $\dim(p(E)) = \operatorname{Tr} p = \sum\limits_{i=1}^{k} \dim p_i(E)$ alors $p(E) = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i(E)$ et la somme est directe : $\operatorname{Im} p = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} \operatorname{Im} p_i$ (en application du *corollaire 2.3 page 181*).

Soit $x \in \operatorname{Im} p_i$, comme $\operatorname{Im} p_i \subset \operatorname{Im} p$ et que $x = p_i(x) = p(x)$ alors $\sum\limits_{j \neq i} p_j(x) = 0$ et (la somme est directe) $p_j(x) = 0$ i.e. $p_j \circ p_i = 0$ c.q.f.d.

(2) $(i) \Rightarrow (ii)$ On a $p_i = p_i \circ \operatorname{Id}_E = \sum\limits_{j=1}^{k} p_i \circ p_j = p_i^2$ donc p_i est un projecteur.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Comme Id_E est un projecteur et que les p_i sont des projecteurs, on peut appliquer le 1. et conclure.

Solution 1.2.3 On utilise la propriété suivante : si f est un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel F alors $\operatorname{Rg} f \leqslant \dim F - 1$.

Montrons par récurrence descendante sur k que $\operatorname{Rg} g_k \leqslant n - k$ où $g_k = f_1 \circ \ldots \circ f_k$.

Si $k = 1$ alors, comme f_1 n'est pas inversible, on a $\operatorname{Rg} f_1 \leqslant n - 1$.

On suppose la propriété vraie à l'ordre k, posons $h_{k+1} = g_{k+1 \operatorname{Im} g_k}$. Comme les f_i permutent, $\operatorname{Im} g_k$ est stable par f_{k+1} donc h_{k+1} est un endomorphisme de $\operatorname{Im} g_k$ et h_{k+1} est lui aussi nilpotent donc $\operatorname{Rg} h_{k+1} \leqslant \dim \operatorname{Im} g_k - 1$ et comme

$$\operatorname{Rg} h_{k+1} = \dim f_{k+1}(\operatorname{Im} g_k) = \dim f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_{k+1} = \operatorname{Rg}(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_{k+1})$$

on a $\operatorname{Rg}(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_{k+1}) \leqslant n - k - 1$.

Conclusion : on a ainsi $\operatorname{Rg}(f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n) \leqslant 0$ soit $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_n = 0$.

Solution 1.3.1

(1) La famille $(f_{x_0}, f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$ est la base duale de la base des polynômes d'interpolation de Lagrange définis par : $\forall i \in [0, n] L_i \in E$ et $\forall j \in [0, n]$: $L_i(x_j) = \delta_{ij}$ (cf. *définition 2.1.7 page 182*).

(2) Soit P_m une suite de E qui converge simplement vers ϕ alors : $\forall i \in [0,n]$, $f_{x_i}(P_m)$ a une limite a_i, donc, comme tout polynôme de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrit $P = f_{x_0}L_0 + f_{x_1}L_1 + \cdots + f_{x_n}L_n$ (les éléments d'une base duale sont les formes coordonnées), on a :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \lim_{m\to+\infty} P_m(x)\\ &= \lim_{m\to+\infty} f_{x_0}(P_m)L_0(x) + \lim_{m\to+\infty} f_{x_1}(P_m)L_1(x) + \cdots + \lim_{m\to+\infty} f_{x_n}(P_m)L_n(x)\\ &= a_0L_0(x) + a_1L_1(x) + \cdots + a_nL_n(x)\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que ϕ est un polynôme.

Remarque : il est à noter ici que, grâce à l'équivalence des normes en dimension finie, la suite (P_m) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ (on prend la norme infinie et la norme $N(P) = \max\limits_{i\in[0,n]} |f_{x_i}(P))$.

Solution 1.3.2 On pose $x_k^* = x^*_{|E_k}$ (restriction de la forme linéaire x^* à l'espace E_k) et on définit

$$\varphi \ : x^* \in E^* \mapsto (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*).$$

φ est un isomorphisme canonique de E^* dans $\prod\limits_{k=1}^{n} E_k^*$.

En effet φ est un morphisme de E^* dans $\prod\limits_{k=1}^{n} E_k^*$ (car chaque application $x^* \mapsto x_k^*$ est linéaire). Si on définit

$$\psi \ : (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \in \prod_{k=1}^{n} E_k^* \mapsto x^* \in E^*$$

où $x^*(x_1 + \cdots + x_n) = x_1^*(x_1) + \cdots x_n^*(x_n)$ ($x_1 + \cdots + x_n$ est la décomposition d'un vecteur relativement à la somme directe $\bigoplus\limits_{k=1}^{n} E_k$). $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{E^*}$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\oplus_{k=1}^n E_k}$ donc φ est bijective.

Solution 1.3.3 Comme a, b, c sont distincts, les formes linéaires f_a, f_b, f_c sont linéairement indépendantes. En effet soit $\lambda f_a + \mu f_b = \nu f_c = 0$ une combinaison linéaire, en appliquant cette relation aux polynômes d'interpolation de Lagrange aux points a, b, c, que l'on note L_a, L_b, L_c (cf. *définition 2.1.7 page 182*) on obtient $\lambda = 0$ (avec L_a) puis $\mu = 0$ et $\nu = 0$ (ici cela marche car les polynômes considérés sont tous de degré $\leqslant 2$).

Soit $f_4 = \lambda f_a + \mu f_b + \nu f_c$, en posant $c = \alpha a + (1-\alpha)b$ et en prenant les polynômes $1, X-a, (X-a)^2$ (et $(X-a)^3$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui donne la dernière équation), on a le système :

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu & = b - a \\ \quad \mu + \nu(1-\alpha) & = \frac{b-a}{2} \\ \quad \mu + \nu(1-\alpha)^2 & = \frac{b-a}{3} \\ \quad \mu + \nu(1-\alpha)^3 & = \frac{b-a}{4} \quad (\text{dans } \mathbb{R}_3[X]) \end{cases}$$

Dans $\mathbb{R}_2[X]$ ceci est toujours possible donc les 4 formes linéaires sont liées.

Dans $\mathbb{R}_3[X]$

- si $c = \frac{a+b}{2}$ alors $\lambda = \mu = \frac{b-a}{6} = \frac{1}{4}\nu$ donc les 4 formes linéaires sont liées,
- si $c \neq \frac{a+b}{2}$ alors $\lambda = \mu = \nu = 0$ donc les 4 formes sont indépendantes.

Solution 1.3.4 On utilise l'opérateur : $\Delta \ : \ P \mapsto P(X+1) - P(X)$.
Pour $e_p = X(X-1)(\ldots)(X-p+1)$ on a : $\Delta e_p = p e_{p-1}$. Les éléments f_k de la base duale seront alors les formes linéaires :

$$P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \frac{1}{k!}\Delta^k P(0).$$

On obtient, en conséquence, les coordonnées de P dans la base des (e_k) :

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Delta^k P(0) e_k.$$

Solution 1.3.5

(1) On utilise les inégalités de Minkowski et Hölder (cf. *Questions (v) et (vi) page 73*) :

$$\left(\sum_{n=0}^{N}|a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{n=0}^{N}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{N}|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \ ; \ \sum_{n=0}^{N}|a_nb_n| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{N}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=0}^{N}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. En passant à la limite dans la $1^{\text{ére}}$ inégalité (après justification) on a l'inégalité triangulaire (ce qui permet d'affirmer que L_p est stable par $+$).

(2) En prenant $a_n = |a_n|$, $b_n = |b_n|$ dans la 2^{ieme} et en passant à la limite, on prouve que la série $\sum a_nb_n$ est convergente, ce qui permet de définir f. En outre, avec l'inégalité de Hölder on sait que

$$\left|\sum_{n=0}^{N} a_nb_n\right| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{N}|a_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=0}^{N}|b_n|^q\right)^{1/q}$$

et, par passage à la limite sur N (qui existe) on en déduit que $|f(a)| \leqslant \|b\|_q.\|a\|_p$ ce qui prouve la continuité de f.

(3) Intéressons-nous à la réciproque : soit $f \in L_p^*$ une forme linéaire continue, (e_n) la suite de L_p dont tous les termes sont nuls sauf le $n+1^{\text{ième}}$ qui vaut 1. On pose $b_n = f(e_n)$ et on exploite l'inégalité $f(a) \leqslant C\|a\|_p$ en prenant la suite (a^N) définie par

$$a_n^N = \begin{cases} \varepsilon_n |b_n|^{q/p} & \text{si } n \leqslant N \\ 0 & \text{si } n > N \end{cases}$$

où ε_n est du signe de b_n. On a alors

$$f(a^N) = \sum_{n=0}^{N} |b_n|^{\overbrace{1+q/p}^{=q}} \leqslant C\left(\sum_{n=0}^{N}|b_n|^q\right)^{1/p}$$

soit

$$f(a^N) = \sum_{n=0}^{N}|b_n|^q \leqslant C\left(\sum_{n=0}^{N}|b_n|^q\right)^{1/p}$$

et, si on suppose $f \neq 0$, en choisissant N assez grand, on pourra simplifier par $\left(\sum\limits_{n=0}^{N}|b_n|^q\right)^{1/p} \neq 0$ d'où

$$\left(\sum_{n=0}^{N}|b_n|^q\right)^{1/q} \leqslant C$$

ce qui permet d'assurer que $b \in L_q$.

Solution 1.4.1

(1) Étant donné l'égalité des dimensions des espaces considérés, il suffit de prouver que $u \mapsto T_u$ est injectif. Soit (e_i) une base de E, on utilise alors la base (u_{ij}) de $\mathcal{L}(E)$ définie par $u_{ij}(e_k) = \delta_{ik} e_j$ (cf. *théorème 8.15 page 135*). Si (e_i^*) est la base duale de la base (e_i), on peut caractériser la trace d'un endomorphisme par la formule

$$\operatorname{Tr}(v) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(v(e_k))$$

donc, comme $u \circ u_{ij}(e_k) = u(\delta_{ik} e_j) = \delta_{ik} u(e_j)$ on a

$$\operatorname{Tr}(u \circ u_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} e_k^*(u(e_j)) = e_i^*(u(e_j)) = 0$$

et ceci pour tout i et tout j donc $u(e_j) = 0$ pour tout j soit $u = 0$. On aurait pu aussi utiliser une écriture matricielle.

(2) C'est un résultat classique, on prend la base (u_{ij}) dont on a parlé au 1. On vérifie que $u_{ij} \circ u_{kl} = \delta_{il} u_{kj}$ donc, avec $i = l$ on a

$$\begin{aligned}\varphi(u_{ij} \circ u_{ki}) &= \varphi(u_{kj}) \\ &= \varphi(u_{ki} \circ u_{ij}) = \delta_{kj} \varphi(u_{ii})\end{aligned}$$

d'où $\varphi(u_{kj}) = 0$ si $k \neq j$ et $\varphi(u_{kk}) = \varphi(u_{ii})$ pour tout k et tout i, ce qui permet de conclure.

Soit $w \in F$, $w = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i (u_i \circ v_i - v_i \circ u_i)$ donc $\operatorname{Tr}(w) = 0$ ce qui donne $F \subset \operatorname{Ker}(\operatorname{Tr})$.

Or, si $\varphi \in \mathcal{L}(E)^*$ s'annule sur F alors $\varphi = \lambda \operatorname{Tr}$ (cf. (4)).

Puis, dans $\mathcal{L}(E)^*$ on complète $f_1 = \operatorname{Tr}$ pour avoir une base $(f_1, \ldots, f_{n^2})$. Soit $(e_1, \ldots, e_{n^2})$ la base antéduale. Si $x \in F$, $x = \sum_{i=1}^{n^2} x_i e_i$, alors $(\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi = f_1) \Leftrightarrow (\lambda_1 = 0)$ d'où $F = \operatorname{Vect}(e_i)_{i \geqslant 2}$.

(3) On utilise la propriété suivante : $\operatorname{Tr}(u \circ v) = \operatorname{Tr}(v \circ u)$ et le fait que $\alpha \circ \gamma = \gamma \circ \alpha$ d'où

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}([\alpha, \beta] \circ \gamma) &= \operatorname{Tr}(\alpha \circ \beta \circ \gamma) - \operatorname{Tr}(\beta \circ \alpha \circ \gamma) \\ &= \operatorname{Tr}(\beta \circ \gamma \circ \alpha) - \operatorname{Tr}(\beta \circ \alpha \circ \gamma) \\ &= \operatorname{Tr}(\beta \circ \alpha \circ \gamma) - \operatorname{Tr}(\beta \circ \alpha \circ \gamma) = 0.\end{aligned}$$

Remarque : attention au fait que l'on a pas $\operatorname{Tr}(\alpha \circ \beta \circ \gamma) = \operatorname{Tr}(\beta \circ \alpha \circ \gamma)$ en général.

(4) On utilise l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de E (noté F^o). On sait alors que $\dim F + \dim F^o = \dim E$.

On pose $V_\alpha = \operatorname{Im} L_\alpha$ où $L_\alpha(u) = [\alpha, u]$; $\operatorname{Ker} V_\alpha = C_\alpha$. On a $T_u \subset C_\alpha^o$. On raisonne alors sur les dimensions en utilisant le fait que $u \mapsto T_u$ est un isomorphisme.

Soit ψ l'application qui à $v \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$ fait correspondre $[\alpha, v]$, ψ est une application linéaire, son noyau est $\mathcal{C}_\alpha$, appelons F son image. Au 3., nous avons prouvé que $T(F) \subset (\mathcal{C}_\alpha)^o$. Comme T est un isomorphisme, on a $\dim T(F) = \dim F = n^2 - \dim \mathcal{C}_\alpha$ (formule du rang) i.e. $\dim T(F) = \dim(\mathcal{C}_\alpha)^o$ d'où l'égalité des espaces vectoriels $T(F) = \mathcal{C}_\alpha^o$.

Solution 1.4.2 On sait que la trace d'un projecteur est un entier or $\operatorname{Tr}(p + q\sqrt{2} + r\sqrt{3}) = \operatorname{Tr}(p) + \operatorname{Tr}(q)\sqrt{2} + \operatorname{Tr}(r)\sqrt{3}$ n'est un entier que si $\operatorname{Tr}(q) = \operatorname{Tr}(r) = 0$ soit $q = r = 0$.

Solution 1.4.3 On a $\mathrm{Tr}\left[\mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A\right] = 0 = \mathrm{Tr}(B) = 0$ donc cette équation n'a pas de solution si $\mathrm{Tr}\, B \neq 0$.
Si $\mathrm{Tr}(B) = 0$ on vérifie alors sans peine que toutes les solutions sont données par

$$M = \frac{1}{\mathrm{Tr}(A)} B - \lambda A,\ \lambda \in \mathbb{K}.$$

Solution 1.5.1

(1) On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$ alors c'est immédiat.
Supposons la propriété vraie à l'ordre n ; à l'ordre $n+1$, soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^{n+1}$ associé à A. Si u est une homothétie alors $u = 0$ et c'est fini.
On suppose maintenant que u n'est pas une homothétie. On va prouver qu'il existe un vecteur e_1 de $\mathbb{K}^{n+1}$ tels que $(e_1, u(e_1))$ soit libre.
Si (ε_i) désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et si l'un des éléments ε_i n'est pas colinéaire à son image alors on posera $e_1 = \varepsilon_i$. Si maintenant tous les vecteurs sont colinéaires à leurs images, on pose $e_1 = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n+1}$. En effet, si $u(e_1) = \lambda e_1$ alors on aurait $u(e_1) = \lambda_1\varepsilon_1 + \cdots + \lambda_{n+1}\varepsilon_{n+1} = \lambda\varepsilon_1 + \cdots + \lambda\varepsilon_{n+1}$ et u serait une homothétie, ce qui a été écarté.
On prendra alors une base de $\mathbb{K}^{n+1}$ en complétant la famille $(e_1, u(e_1))$. Dans une telle base, la matrice de u s'écrira $\begin{pmatrix} 0 & L \\ C & A' \end{pmatrix}$, On applique enfin l'hypothèse de récurrence à la matrice A'.

(2) Traitons alors le cas d'une matrice de diagonale nulle. On prend $C = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$ où les λ_i sont tous distincts et $B = (b_{ij})$ alors $BC - CB = [(\lambda_j - \lambda_i)b_{ij}]$ ce qui permet de choisir les $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i}$.
Maintenant, si $A = BC - CB$ alors $PAP^{-1} = B'C' - C'B'$ où $B' = PBP^{-1}$ et $C' = PCP^{-1}$ donc, on peut étendre la propriété aux matrices semblables à une matrice de diagonale nulle. Ceci est normal vu que la propriété vérifiée par A est en fait une propriété vérifiée par tout endomorphisme admettant A comme matrice dans une base.

Solution 1.5.2

(1) On pose $AB = C$, C est de rang 2 (les 2 premières colonnes sont indépendantes) et $C^2 = C$ donc C est la matrice d'un projecteur sur un espace vectoriel de dimension 2.
$\mathrm{Rg}\, A \geqslant \mathrm{Rg}\, AB = 2$ et comme $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{Rg}\, A \leqslant 2$ donc $\mathrm{Rg}\, A = 2$.
De même $\mathrm{Rg}(AB) \leqslant \mathrm{Rg}\, B$ donc $\mathrm{Rg}\, B = 2$.

(2) $C^2 = C$ entraîne que $A[BA - I_2]B = 0$ et comme B est de rang 2 alors il existe une matrice B' telle que $BB' = I_2$ et de même il existe une matrice A' telle que $A'A = I_2$ d'où $BA = I_2$.

Solution 1.5.3

(1) Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ alors $AB = I_n$ où $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et en prenant les déterminants on en déduit que $\det A = \pm 1$.
Réciproquement, si $\det A = \pm 1$ alors, avec la formule donnant l'inverse de A, on a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A'^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ car chaque mineur de A est entier.

(2) S'il existe A inversible alors $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n = 1$.
Réciproque : si $a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n = 1$ alors il existe $b_1, \ldots, b_n$ tels que $b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_na_n = 1$.

Montrons par récurrence sur $r < n$ que l'on peut trouver $A_r \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{Z})$ et $B_r \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{Z})$ où $r < n$ telles que $A_r B_r = I_r$ avec $A_1 = (a_1 \dots a_n)$.

- La propriété est vraie pour $r = 1$.
- Pour $r < n$, on montre que l'on peut compléter A_r (resp. B_r) en matrice $(r+1, n)$ (resp. $(n, r+1)$) vérifiant $A_{r+1}B_{r+1} = I_{r+1}$.
  On écrit $A_r = (L_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$, et $B_r = (C_j)_{1 \leqslant j \leqslant r}$, les L_i étant des matrices lignes et les C_j des matrices colonnes.
  On cherche donc un couple (L_{r+1}, C_{r+1}) qui vérifient les trois conditions :
  $A_r C_{r+1} = 0$ (1)
  $L_{r+1} B_r = 0$ (2)
  $L_{r+1} C_{r+1} = 1$ (3) (faire le produit par blocs et identifier les blocs)
  A_r est de rang r. $n > r$ donc on peut trouver un vecteur C_{r+1} d'entiers dans $\operatorname{Ker} A_r$ (on trouve un vecteur de $\mathbb{Q}^n$ puis on multiplie par le dénominateur commun des rationnels pour se ramener dans $\mathbb{Z}^n$). On a donc (1). Ensuite, on peut choisir ces entiers premiers entre eux. D'après Bézout, il existe donc $L \in \mathbb{Z}^n$ (vecteur ligne) tel que $LC_{r+1} = 1$.
  Par ailleurs,
  $$\forall (\lambda_k) \in \mathbb{Z}^r, (L + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k L_k) C_{r+1} = LC_{r+1} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k L_k C_{r+1} = LC_{r+1}$$
  car $\forall k \leqslant r$, $L_k C_{r+1} = 0$ d'après (1). De plus
  $$(L + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k L_k) B_r = (LB_r + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k L_k B_r) = LB_r + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k [\delta_{ik}]_{i \leqslant r}$$
  On peut donc annuler le produit $(L + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k L_k) B_r$ en choisissant convenablement les (λ_k).
  On a trouvé (L_{r+1}, C_{r+1}) vérifiant $(1), (2), (3)$. La propriété est donc vraie au rang $r+1$. On complète ainsi A_r et B_r jusqu'à $r + 1 = n$.

Remarque : on peut aussi chercher A sous la forme $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & \ddots & 0 \\ * & \dots & * \end{pmatrix}$ matrice quasi-triangulaire.