ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE AFFINE

1. Espaces vectoriels, applications linéaires

1.1. **Bases, sommes directes.**

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit E un ensemble non vide.

(1) Montrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, .)$ est un e.v. sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où Δ est définie par
$$A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$
(A^c est le complémentaire de A dans E) et la loi externe par $0.A = \emptyset$, $1.A = A$.

(2) Si E est fini, donner une base de $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{F}}$
Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $f_n(x) = \sin nx$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; si $x \in \mathbb{R}$, soit S_x la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$. En utilisant le fait que $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ lorsque $x \in]0, 1[$, démontrer que la famille $(S_x)_{x>0}$ est libre dans E.

Exercice 1.1.4. $\boxed{\textbf{I}}$
Étudier dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'indépendance de la famille $(f, f \circ f, f \circ f \circ f)$ avec $f(x) = \sin x$.

Exercice 1.1.5. $\boxed{\textbf{I C}}$
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha < \beta$, on note E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions de $[\alpha, \beta]$ dans $\mathbb{R}$ continues et affines par morceaux. Si $a \in [\alpha, \beta]$ on pose $f_a(x) = |x - a|$.
Montrer que la famille $(f_a)_{a\in[\alpha,\beta]}$ est une base de E.

Exercice 1.1.6. $\boxed{\textbf{D}}$
Soit $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels de E espace vectoriel réel de dimension n. On suppose que tous les F_i ont la même dimension $p < n$.

(1) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{+\infty} F_i \neq E$.

(2) Montrer que l'on peut trouver un sous-espace vectoriel W de E tel que, pour chaque i, $W \oplus F_i = E$.

Exercice 1.1.7. **F C**

Soient p et q deux projecteurs d'un espace vectoriel E.

(1) $\mathrm{Id} - p$ est-il un projecteur ?
(2) Montrer que $p+q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0$.
(3) Montrer que $p \circ q$ est un projecteur si $p \circ q = q \circ p$.

1.2. Image et noyau d'une application linéaire.

Exercice 1.2.1. **I**

Soit E le $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions de classe C^∞ et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et D l'endomorphisme qui à f associe sa dérivée seconde f''.
Montrer que $E = \mathrm{Ker}(D) \oplus \mathrm{Im}(D)$.

Exercice 1.2.2. **I T**

Soient $x_1, \dots, x_n$ n réels distincts, $E = \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et les formes linéaires sur E définies par

$$\forall P \in E, u_i(P) = P(x_i), v_i(P) = P'(x_i), i \in [1, n].$$

(1) Montrer que $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ est une base de E^*.
(2) À l'aide du polynôme $T = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ et de ses dérivées, trouver sa base antéduale.

Exercice 1.2.3. **I**

Soient F et G des polynômes à coefficients complexes, $F(X) = \sum_{i=0}^{m} a_i X^i$, $a_m \neq 0$ $G = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$, $b_n \neq 0$. On définit

$$\varphi \ : (U, V) \in (\mathbb{C}[X]^2 \mapsto FU + GV \in \mathbb{C}[X].$$

(1) Montrer que $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$.
(2) Montrer que la restriction de φ à $\mathbb{C}_{n-1}[X] \times \mathbb{C}_{m-1}[X]$ est injective ssi $F \wedge G = 1$.

En déduire que F et G ont une racine commune ssi $\begin{vmatrix} a_0 & 0 & & b_0 & 0 & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & & & b_0 \\ a_m & & \vdots & b_n & & \vdots \\ & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_m & 0 & & b_n \end{vmatrix} = 0.$

1.3. Dualité en dimension finie.

Exercice 1.3.1. **F T**

Sur $\mathbb{C}^3$ on considère les formes linéaires φ_1, φ_2, φ_3 définies par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3,\ \varphi_1(x, y, z) = x + 2y - 3z,\ \varphi_2(x, y, z) = 5x - 3y,\ \varphi_3(x, y, z) = 2x - y - z.$$

Vérifier que $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{C}^3)^*$ et déterminer la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ dont $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est la base duale.

Exercice 1.3.2. **F**

Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.
Trouver un isomorphisme canonique de $E_1^* \times E_2^*$ sur $(E_1 \times E_2)^*$.

Exercice 1.3.3. **F**

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X], \deg P \leqslant n\}$.

(1) Étant donné $n+1$ éléments $\alpha_0, \alpha_1 \dots, \alpha_n$ de $\mathbb{R}$, on leur associe les $n+1$ formes linéaires $y_0^*, y_1^*, \dots, y_n^*$ définies par $y_k^* : p \mapsto P(\alpha_k)$.
Montrer que $(y_0^*, y_1^*, \dots, y_n^*)$ est une base de E^* ssi les α_i sont deux à deux distincts.

(2) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 f(x) P(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} a_i P(\alpha_i).$$

Exercice 1.3.4. **F**

Montrer qu'il existe 4 réels c, x_1, x_2, x_3 tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \int_{-1}^{+1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = c[P(x_1) + P(x_2) + P(x_3)].$$

Exercice 1.3.5. **F**

Soit E un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie $n \geqslant 1$.

(1) Si $(x, y) \in E^2, x \neq y$ montrer alors qu'il existe une $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ (on dit que E^* sépare les points de E).

(2) Réciproque : si $V \subset E^*$ est un s.e.v. séparant les points de E, montrer que $V = E^*$.

Exercice 1.3.6. **I**

Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$, on définit Δ opérateur différence de E par $\Delta(P(X)) = P(X+1) - P(X)$ et φ_k dans E^* par $\varphi_k(P) = (\Delta^k(P))(0)$.
Montrer que l'ensemble des φ_k pour $k \in [0, n]$ est une base de E^* ; trouver la base antiduale.

1.4. **Trace d'un endomorphisme.**

Exercice 1.4.1. **D**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle et $p_1, \dots, p_k$ des projecteurs de E dont la somme est un projecteur.
Montrer que, si $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0$.

Exercice 1.4.2. **D**

Soit p un nombre premier.

(1) Si A et B sont deux matrices carrées à coefficients entiers, montrer que

$$\operatorname{Tr}(A+B)^p \equiv \operatorname{Tr}(A^p) + \operatorname{Tr}(B^p)[p].$$

(2) Déduire du (1) que, pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{Z})$, $\operatorname{Tr}(A^p) \equiv \operatorname{Tr}(A)[p]$.

Exercice 1.4.3. $\boxed{\textbf{D T}}$
On appelle dérivation d'une algèbre $\mathcal{A}$ tout endomorphisme D de $\mathcal{A}$ (en tant qu'espace vectoriel) vérifiant

$$\forall (a,b) \in \mathcal{A}^2,\ D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

(1) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $D_A\ : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto AM - MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une dérivation de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (appelée dérivation intérieure). Déterminer les matrices A telles que $D_A = 0$.
(2) Montrer que toute dérivation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de la forme D_A (considérer $D(E_{ij})$).

Exercice 1.4.4. $\boxed{\textbf{I}}$
Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est une matrice magique si $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$.
L'objet de cet exercice est de chercher la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices magiques.
On définit les formes linéaires suivantes :

$$L_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij},\ C_j(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij},\ D(A) = \operatorname{Tr}(A).$$

(1) Montrer que la famille $(L_1, \dots, L_n, C_1, \dots, C_n)$ est liée.
(2) Montrer que la famille $(L_1, \dots, L_n, C_1, \dots, C_{n-1}, D)$ est libre.
(3) Montrer finalement que $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = (n-1)^2$.

1.5. **Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires.**

Exercice 1.5.1. $\boxed{\textbf{I}}$
Étant donné $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$, soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ où $a_{ij} = P(\alpha_{i-1} + \beta_{j-1})$ $(\alpha_0, \dots, \alpha_n, \beta_0, \dots, \beta_n$ étant $2n+2$ éléments de $\mathbb{R})$; on se propose de calculer $\det A$.
On pose $V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \det X = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ . & . & . & . \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$.
Montrer que $A = BCD$ où B, C, D sont 3 matrices carrées B et D étant de la forme de X ci-dessus, C étant une matrice "triangulaire inversée'. En déduire $\det A$.

Exercice 1.5.2. $\boxed{\textbf{I C}}$
Montrer que le rang d'une matrice est égal à l'ordre maximal du mineur extrait non nul.

Exercice 1.5.3. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ où la matrice A a été décomposée par blocs, $A_{11} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $A_{22} \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$, $r \in [\![1, n-1]\!]$.
Montrer que, si $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A_{11} = r$ alors $A_{22} = A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$.

Indication 1.1.1

(1) Immédiat.
(2) Si $\operatorname{Card} E = n$ alors $\operatorname{Card} \mathcal{P}(E) = 2^n$ donc $\dim \mathcal{P}(E) = n$.

Indication 1.1.2 Procéder par récurrence ou utiliser le calcul intégral.

Indication 1.1.3 Raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments d'une sous-famille et faire intervenir le plus grand x des S_x.

Indication 1.1.4 Prendre une combinaison linéaire et écrire le développement limité à l'ordre 5.

Indication 1.1.5 La famille est libre (vu en cours) et pour montrer qu'elle est génératrice, utiliser $c = \dfrac{c}{\beta-\alpha}(|x-\alpha|+|x-\beta|) \in \operatorname{Vect}(f_a)$ et $(x-a)^+ = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a \\ (x-a) & \text{pour } x \geqslant a \end{cases}$ appartient à $\operatorname{Vect}(f_\alpha, f_a, f_\beta)$.

Indication 1.1.6

(1) Raisonner par l'absurde et prouver par récurrence sur k que si $(x_1, \dots, x_k)$ sont k vecteurs de E alors il existe un indice i tel que ces k vecteurs soient dans le même espace F_i.
(2) Utiliser le (1) pour trouver un vecteur n'appartenant à aucun des F_i puis raisonner par récurrence finie sur $p = \dim F_i$.

Indication 1.1.7

(1) Immédiat.
(2) On a $p \circ q + q \circ p = 0$ et on compose par p à gauche et à droite.
(3) Calcul immédiat.

Indication 1.2.1 On montre que $\operatorname{Ker}(D)$ est l'ensemble des fonctions constantes puis, si $f \in E$ on montre que $g(x) = f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t \in \operatorname{Im}(D)$.

Indication 1.2.2

(1) Montrer que $f\ :\ P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \mapsto (u_1(P), \dots, u_n(P), v_1(P), \dots, v_n(P)) \in \mathbb{R}^{2n}$ est un isomorphisme.
(2) Si $T_i = \prod_{j \neq i}(X - x_j)$ alors, en posant $Q_i = \frac{TT_i}{[T'(x_i)]^2}$ et $P_i = [T'(x_i) - (X - x_i)T''(x_i)]\frac{T_i^2}{[T'(x_i)]^3}$, montrer que (P_i, Q_j) est la base cherchée.

Indication 1.2.3 Montrer que $\varphi[(\mathbb{C}[X])^2] = F \wedge G\mathbb{C}[X]$.
L'injectivité ne pose pas de problème puis écrire la matrice de la restriction de φ à $\mathbb{C}_{n-1}[X] \times \mathbb{C}_{m-1}[X]$, corestreinte à $\mathbb{C}_{n+m-1}[X]$ dans de bonnes bases.

Indication 1.3.1 On peut utiliser le déterminant puis résoudre les équations obtenues en écrivant $\varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$.

Indication 1.3.2 Si $(f_1, f_2) \in E_1^* \times E_2^*$, définir $f\ :\ (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mapsto f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$.

Indication 1.3.3

(1) Le sens direct est immédiat, pour la réciproque, penser aux polynômes d'interpolation de Lagrange.
(2) Utiliser la base précédente.

Indication 1.3.4 Utiliser les fonctions symétriques élémentaires de x_1, x_2, x_3, cf. *définition 8.3.13 page 141.*

Indication 1.3.5

(1) Pour tout vecteur non nul u il existe $\varphi \in E^*$ tel que $\varphi(u) \neq 0$.
(2) Prendre une base de V que l'on complète et raisonner par l'absurde.

Indication 1.3.6 Utiliser la base de Hilbert $e_k = \dfrac{X(X-1)(\ldots)(X-k+1)}{k!}$.

Indication 1.4.1 Utiliser la relation $\operatorname{Tr}(p) = \operatorname{Rg}(p)$ pour un projecteur et utiliser une caractérisation de la somme directe.

Indication 1.4.2

(1) Développer $(A+B)^p = \sum\limits_{(C_1,C_2,\ldots,C_p)\in\{A,B\}^p} C_1C_2\ldots C_p$ et regrouper les termes par paquets contenant p éléments.

(2) Considérer $\varphi\ : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \mapsto \operatorname{Tr}(A^p) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, montrer que φ est linéaire et vérifie $\varphi(AB)\varphi(BA)$.

Indication 1.4.3

(1) Vérification immédiate. Les matrices A telles que $D_A = 0$ sont les matrices scalaires.

(2) Rechercher A avec les formules $a_{ij} = -\operatorname{Tr}(D(E_{1i})E_{j1})$ et faire les calculs.

Indication 1.4.4

(1) On vérifie immédiatement que $\sum_{i=1}^n L_i = \sum\limits_{j=1}^n C_j$.

(2) Prendre $A = -nI_n + J$ où J est la matrice ne comportant que des 1, puis,$\varphi(A+E_{in}) = 0$.

(3) Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, poser $s(A)$ la somme commune et écrire $A = \frac{s(A)}{n}J + A'$ où $s(A') = 0$.

Indication 1.5.1 On a $B = (\alpha_i^j)$, $D = (\beta_j^i)$ et $C = (c_{ij})$ où $c_{ij} = C_{i+j}^i a_{i+j}$.

Indication 1.5.2 Écrire A sous forme de colonnes et extraire une famille libre, faire de même avec les lignes.

Indication 1.5.3 Penser à multiplier A par une matrice B bien choisie.

1. Solutions :

Solution 1.1.1

(1) Les vérifications sont assez élémentaires, c'est un exemple un peu particulier d'espace vectoriel à citer au titre des curiosités !

(2) Si $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ alors une base de $\mathcal{P}(E)$ est $(\{a_1\}, \ldots, \{a_n\})$.

Solution 1.1.2 Ici, on va procéder par récurrence :

- si $n = 1$, la fonction $x \mapsto \sin x$ n'étant pas nulle forme une famille libre.
- On suppose la propriété vraie à l'ordre $n-1$. Si $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = 0$ alors, en dérivant 2 fois on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (n^2 - k^2) f_k = 0$$

et, en utilisant la propriété de récurrence, on en déduit que $\lambda_k = 0$ pour tout k élément de $[1, n-1]$ et en reportant ci-dessus on peut conclure que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre.

Remarque : le calcul direct de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(t)\right) f_p(t)\,\mathrm{d}t = \pi\lambda_p = 0$ permet de conclure sans récurrence.

Solution 1.1.3 On sait que pour montrer que la famille $(S_x)_{x>0}$ est libre, il suffit de prouver que, pour toute famille finie $0 < x_1 < \ldots < x_p$, les suites $(S_{x_i})_{i\in[1,p]}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (cf. *remarque 8.2.1 (ii) page 132*).
On raisonne alors par récurrence sur p.

- Si $p = 1$, la suite n'étant pas nulle forme une famille libre.
- On suppose la propriété vraie à l'ordre $p-1$. Soit $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i S_{x_i} = 0$ une combinaison linéaire nulle alors, pour tout n, on a $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i^n = 0$ soit, en divisant par le plus grand x_p,

$$\lambda_p = -\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \left(\frac{x_i}{x_p}\right)^n.$$

Or $\dfrac{x_i}{x_p} < 1$ donc, en prenant la limite quand $n \to +\infty$, on obtient $\lambda_p = 0$ puis, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $\lambda_i = 0$ pour tout i. Conclusion : la famille $(S_x)_{x>0}$ est libre.

Solution 1.1.4 On va prouver que cette famille est libre.
Soit $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(f(x)) + \lambda_3 f(f(f(x))) = 0$ alors, en posant $y = \sin x$, ceci est équivalent à

$$\lambda_1 y + \lambda_2 f(y) + \lambda_3 f(f(y)) = 0$$

pour $y \in [-1, +1]$. On écrit, par exemple, le développement limité à l'ordre 5 et l'on trouve :

$$\begin{array}{cccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = 0 \\ & - & \lambda_2/6 & - & \lambda_3/3 & = 0 \\ & & \lambda_2/120 & + & \lambda_3/10 & = 0 \end{array}$$

ce qui donne immédiatement $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et permet de conclure.

Solution 1.1.5

- La famille est libre (récurrence facile, cf. *question (ii) page 133*).
- Elle est génératrice.

  On a $c = \dfrac{c}{\beta-\alpha}(|x-\alpha| + |x-\beta|) \in \mathrm{Vect}(f_a)$ et on montre aussi que $(x-a)^+ = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a \\ (x-a) & \text{pour } x \geqslant a \end{cases}$ appartient à $\mathrm{Vect}(f_\alpha, f_a, f_\beta)$.

  En effet
  $$(x-a)^+ = \frac{1}{2}f_a(x) + \frac{1}{2}\frac{\beta-a}{\beta-\alpha}f_\alpha(x) + \frac{1}{2}\frac{\alpha-a}{\beta-\alpha}f_\beta(x).$$
  On écrit toute fonction f de E comme combinaison linéaire des fonctions constantes et des fonctions $(x-a)^+$: on peut procéder par récurrence sur p le nombre de changement de pente de la fonction f.
  - $p = 0$ alors $f = f(0) + m_1(x-\alpha)^+$ où m_1 désigne la pente de f.
  - On suppose que toute fonction affine par morceaux présentant p changements de pente s'écrit à l'aide des fonctions 1 et $(x-a)^+$.

    Si f présente $p+1$ changements de pente alors $f = f_p + \lambda_{p+1}(x-\alpha_{p+1})^+$, α_{p+1} désigne l'abscisse où se produit le dernier changement de pente, f_p est égale à f sur $[a, \alpha_{p+1}]$ et ne comporte que p changements et λ_{p+1} correspond au changement de pente de f en α_{p+1}.

  Ceci permet d'achever la récurrence.

Solution 1.1.6

(1) Par l'absurde : soient x_1 et x_2 deux vecteurs de E. On définit une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$ par $f \;:\; \lambda \mapsto f(\lambda)$ définie par $x_1 + \lambda x_2 \in F_{f(\lambda)}$. Comme $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ n'ont pas le même cardinal, cette application n'est pas injective donc il existe $\lambda \neq \lambda'$ tels que $f(\lambda) = f(\lambda') = j$. On a alors
$$x_1 = \frac{1}{\lambda'-\lambda}[\lambda'(x_1+\lambda x_2) - \lambda(x_1+\lambda' x_2)] \text{ et } x_2 = \frac{1}{\lambda-\lambda'}[(x_1+\lambda x_2) - (x_1+\lambda' x_2)]$$
ce qui prouve que x_1 et x_2 sont dans le même espace vectoriel F_j.

On prouve alors par récurrence sur k que si $(x_1, \ldots, x_k)$ sont k vecteurs de E alors il existe un indice i tel que ces k vecteurs soient dans le même espace F_i (en effet, il existe $g(\lambda)$ tel que les k vecteurs $(x_1, \ldots, x_{k-1} + \lambda x_{k+1}, x_k + \lambda x_{k+1})$ soient dans $F_{g(\lambda)}$ et on utilise le même argument que ci-dessus).

On prend alors une base de E. Il existerait donc un indice i tel que tous les vecteurs de cette base soient dans F_i ce qui est impossible vu l'hypothèse $p < n$.

(2) Comme la réunion des F_i est strictement contenue dans E, il existe w_{p+1} vecteur non nul n'appartenant à aucun F_i. On pose alors $F'_i = F_i \oplus \mathbb{R}w_{p+1}$. Si $p = n-1$ alors c'est terminé, sinon, les F'_i vérifient les hypothèses des F_i en remplaçant p par $p+1$. On pourra alors construire des vecteurs w_{p+k} pour $k \in [1, n-p]$. En posant $W = \mathrm{Vect}(w_{p+k})$ alors $F_i \oplus W = E$ pour chaque i.

Solution 1.1.7

(1) la réponse est OUI car $(\mathrm{Id} - p)^2 = \mathrm{Id} - 2p + p^2 = \mathrm{Id} - p$.

(2)
- Si $p+q$ est un projecteur alors, comme $(p+q)^2 = p + q + p\circ q + q\circ p$, on a $p\circ q + q\circ p = 0$. On compose par p à gauche et à droite, on obtient
$$p\circ q + p\circ q\circ p = 0 \text{ et } p\circ q\circ p + q\circ p = 0$$

donc $p \circ q - q \circ p = 0$ et, en conclusion, $p \circ q = q \circ p = 0$.

- Réciproquement, $(p+q)^2 = p + q + p \circ q + q \circ p = p + q$ donc $p + q$ est bien un projecteur.

(3) On a immédiatement

$$\begin{aligned}(p \circ q)^2 &= p \circ q \circ p \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q \\ &= p^2 \circ q^2 = p \circ q\end{aligned}$$

donc $p \circ q$ est un projecteur.

Solution 1.2.1 Cherchons $\operatorname{Ker}(D)$: si $f''(x) = 0$ alors $f(x) = ax + b$. Or on doit avoir $f(0) = f(2\pi)$ donc $a = 0$.
Conclusion : $\operatorname{Ker}(D)$ est en fait l'ensemble des fonctions constantes.
Ensuite, on écrit : $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction de E qui vérifie $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
On vérifie alors que $g \in \operatorname{Im}(D)$: en effet, on cherche une primitive seconde de g qui soit 2π-périodique. On prend $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + a$ qui est bien 2π-périodique. En effet $G(0) = a = G(2\pi)$ puis

$$G(x + 2\pi) = G(x) + \int_x^{2\pi + x} g(t)\,\mathrm{d}t = G(x) + \int_0^{2\pi} g(t)\,\mathrm{d}t = G(x)$$

car l'intégrale d'une fonction 2π-périodique sur une période ne dépend pas des bornes (cf. *proposition 7.2.1 page 286*). On choisit alors a pour que $\displaystyle\int_0^{2\pi} G(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Le raisonnement précédent s'applique alors à la fonction $f(x) = \displaystyle\int_0^x G(t)\,dt$ qui est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont la dérivée seconde vaut g, ce qui prouve que $g \in \operatorname{Im}(D)$.
Si $f \in \operatorname{Im}(D) \cap \operatorname{Ker}(D)$ alors $f = a$ est constante car $f \in \operatorname{Ker}(D)$ puis, comme toute primitive seconde de f s'écrit $a\dfrac{x^2}{2} + bx + c$ et qu'elle doit être 2π-périodique, alors $a = 0$ et par conséquent $f = 0$.
Conclusion : on a bien $E = \operatorname{Ker}(D) \oplus \operatorname{Im}(D)$.
Remarque : on savait que tout supplémentaire de $\operatorname{Ker}(D)$ est isomorphe à $\operatorname{Im}(D)$ (cf. *théorème 2.5 page 181*) mais, même avec la propriété $\operatorname{Im}(D) \cap \operatorname{Ker}(D) = \{0\}$, on ne peut conclure en général (pour un espace vectoriel de dimension infinie). Prendre par exemple D l'application qui à un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ fait correspondre X^3P''. $\operatorname{Im}(D) = X^3\mathbb{R}[X]$ et $\operatorname{Ker}(D) = \operatorname{Vect}(1, X)$ donc on a bien $\operatorname{Ker}(D) \cap \operatorname{Im}(D) = \{0\}$ sans que $E = \mathbb{R}[X] = \operatorname{Im}(D) \oplus \operatorname{Ker}(D)$.

Solution 1.2.2

(1) Soit $f\ : P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \mapsto (u_1(P), \dots, u_n(P), v_1(P), \dots, v_n(P)) \in \mathbb{R}^{2n}$ alors on sait que $B = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ est une base ssi f est un isomorphisme ssi $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ (f est une application linéaire entre 2 espaces de même dimension).
Soit $P \in \operatorname{Ker} f$ alors P admet les x_i comme racines doubles, il est divisible par T^2. Vu qu'il est de degré au plus égal à $2n - 1$, il est nécessairement nul.
Si $F = \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ alors $F^o = \operatorname{Ker} f = \{0\}$ donc $F = E^*$ et en conséquence, $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ est génératrice.
Conclusion : la famille $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ est une base.

(2) On fait intervenir le polynôme $T_i = \prod\limits_{j \neq i}(X - x_j)$. Si on note $(P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n)$ la base anté-duale de la base $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ (cf. *théorème 2.10 page 184*) alors Q_i

admet les $(x_j)_{j\neq i}$ comme racine doubles et x_i comme racine simple. Q_j s'écrit $Q_i = \lambda T T_i$ et on obtient facilement

$$Q_i = \frac{TT_i}{[T'(x_i)]^2} \quad (\text{ car } T'(x_i) = T_i(x_i)).$$

On cherche P_i sous la forme $P_i = [\alpha(X - x_i) + \beta]T_i^2$, on obtient

$$P_i = [T'(x_i) - (X - x_i)T''(x_i)]\frac{T_i^2}{[T'(x_i)]^3} \quad (\text{ car } 2T_i'(x_i) = T''(x_i)).$$

Les polynômes $(P_i), (Q_i)$ sont appelés polynômes d'interpolation d'Hermite.

Solution 1.2.3

(1) $\mathcal{I} = \operatorname{Im}\varphi$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$: en effet grâce à Bézout on sait qu'il existe U_0 et V_0 tels que $FU_0 + GV_0 = F \wedge G$, donc, si $P \in F \wedge G\mathbb{C}[X]$ alors $P = FU_0P + GV_0P \in \operatorname{Im}\varphi$.
Réciproquement, si $P \in \operatorname{Im}\varphi$ alors P est un multiple de $F \wedge G$.
Conclusion : $\mathcal{I} = F \wedge G\mathbb{C}[X]$.

(2) Si $F \wedge G = 1$ alors $FU + GV = 0 \Rightarrow F|GV$ donc $F|V$. Comme $\deg V < \deg F$ alors $V = 0$.
Si $F \wedge G = \Delta$ avec $\deg \Delta \geqslant 1$ alors $F = F_1\Delta$ et $G = G_1\Delta$ et $(G_1, -F_1) \in \operatorname{Ker}\varphi$ donc φ n'est pas injective.
Conclusion : φ est injective ssi $F \wedge G = 1$.
On écrit la matrice de la restriction de φ à $\mathbb{C}_{n-1}[X]\times\mathbb{C}_{m-1}[X]$ dans la base $((1, 0), \ldots, (X^{n-1}, 0), (0, 1), \ldots, (0, X^{m-1}))$, corestreinte à $\mathbb{C}_{n+m-1}[X]$ dans la base canonique.

Solution 1.3.1 Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ est non nul donc $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est libre, c'est donc une base de l'espace dual de $\mathbb{C}^3$.
Ensuite, on cherche $\varepsilon_1 = (x, y, z)$ tel que $\varphi_1(\varepsilon_1) = 1$, $\varphi_2(\varepsilon_1) = 0$, $\varphi_3(\varepsilon_1) = 0$ d'où : $\varepsilon_1 = (\frac{3}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10})$.
De même on trouve : $\varepsilon_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $\varepsilon_3 = (-\frac{9}{10}, -\frac{3}{2}, -\frac{13}{10})$.
Remarque : l'inverse de la matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{9}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & -\frac{13}{10} \end{pmatrix}$ cf. *question (ii) page 184*.

Solution 1.3.2 Soit $(f_1, f_2) \in E_1^*\times E_2^*$, on définit

$$f : \ (x_1, x_2) \in E_1\times E_2 \mapsto f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2) \in \mathbb{R}.$$

φ : $(f_1, f_2) \mapsto f$ est linéaire, φ est bijective car, si l'on pose

$$\psi \ : f \in (E_1\times E_2)^* \mapsto (f_1, f_2) \in E_1^*\times E_2^*$$

alors : $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$ et $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$ (car $f_1(x_1) = f(x, 0)$).

Solution 1.3.3

(1) Si $(y_0^*, \ldots, y_n^*)$ est une base alors les α_i sont distincts.
Réciproque : on a $y_k^* = (L_k)^*$ où $L_k = \prod_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ i\neq k}} \dfrac{X - \alpha_i}{\alpha_k - \alpha_i}$ est un polynôme d'interpolation

de Lagrange (cf. *définition 2.1.7 page 182*). On a démontré que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de E, donc $(y_0^*, \ldots, y_n^*)$ est une base de E^* en tant que base duale.

(2) Soit $\varphi \ : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(x)P(x)\,\mathrm{d}x$. φ est une forme linéaire et en supposant les α_i distincts, les y_i forment une base. On peut donc exprimer φ dans cette base.

Solution 1.3.4 Pour montrer l'égalité de ces deux formes linéaires, il suffit d'en prouver l'égalité sur la base : $1, X, X^2, X^3$ d'où les équations :

$$\begin{aligned} c &= \pi/3, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 3/2, \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= 0 \end{aligned}$$

que l'on résout en $c = \pi/3$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = -3/4$, $\sigma_3 = 0$ ce qui donne finalement $c = \pi/3$, $\{x_1, x_2, x_3\} = \{-\sqrt{3}/2, 0, \sqrt{3}/2\}$.
En conclusion on a la formule

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\left[P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + P(0) + P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

valable pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à trois.

Solution 1.3.5

(1) Si $x \neq y$ alors $x - y \neq 0$ et on sait qu'il existe $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(x-y) = 1$ (cf. *proposition 2.1.5 page 183*) donc $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

(2) Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ une base de V que l'on complète en $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, base de E^*. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ sa base antiduale (cf. *théorème 2.10 page 184*).
Si $p < n$ alors $\varphi_k(e_n) = 0$ pour tout $k \leqslant p$ et par linéarité, on a $\varphi(e_n) = 0$ pour toute $\varphi \in V$. Or ceci est contraire à l'hypothèse car on sait, en prenant $x = e_n$ et $y = 0$ qu'il doit exister $\varphi \in V$ telle que $\varphi(x) = 0 \neq \varphi(y) = 0$.
Conclusion : $p = n$ et $V = E^*$.

Solution 1.3.6 On prend $e_k = \dfrac{X(X-1)(\ldots)(X-k+1)}{k!}$, on remarque que $\Delta e_k = e_{k-1}$. $(e_k)_{k\in[0,n]}$ est une base de E, d'autre part, $\varphi^k(e_h) = \delta_{kh}$ ce qui nous donne tout.

Solution 1.4.1 On utilise le fait que pour un projecteur, la trace est égale à la dimension de l'image (il suffit d'écrire la matrice de ce projecteur dans une bonne base, cf. *proposition 2.1.8 page 185*).
Si $q = p_1 + \cdots + p_k$ est un projecteur alors on a

$$\mathrm{Rg}(q) = \mathrm{Tr}(q) = \mathrm{Tr}(p_1) + \cdots + \mathrm{Tr}(p_k) = \mathrm{Rg}(p_1) + \cdots + \mathrm{Rg}(p_k).$$

Comme $q = p_1 + \cdots + p_k$ alors $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p_1 + \cdots + \operatorname{Im} p_k$. Comme on a égalité des dimensions on a

$$\dim(\operatorname{Im} q) \leqslant \dim(\operatorname{Im} p_1 + \cdots + \operatorname{Im} p_k) \leqslant \dim(\operatorname{Im} p_1) + \cdots + \dim(\operatorname{Im} p_k) = \dim(\operatorname{Im} q)$$

ce qui permet d'affirmer que la somme $\operatorname{Im} p_1 + \cdots + \operatorname{Im} p_k$ est directe et égale à $\operatorname{Im} q$ (cf. *corollaire 2.3 page 181*).

Soit $x \in E$ alors $y = p_j(x) \in \operatorname{Im} q$ et comme la somme est directe, y se décompose d'une manière unique en somme d'éléments des $\operatorname{Im} p_i$:

$$q(y) = y = \sum_{i=1}^{n} p_i(y) = p_j(y)$$

car la somme est directe. On en déduit que $p_i(y) = 0$ si $i \neq j$ et par conséquent $p_i \circ p_j(x) = 0$ c.q.f.d.

Solution 1.4.2

(1) On développe : $(A+B)^p = \sum_{(C_1,C_2,\dots,C_p)\in\{A,B\}^p} C_1C_2\dots C_p$. S'il y a 2 matrices distinctes dans le produit $C_1C_2\dots C_p$ alors tous les termes

$$C_1C_2\dots C_p, C_pC_1\dots C_{p-1}, \dots, C_2C_3\dots C_1$$

sont distincts et la somme de leur trace est de la forme pK donc congrue à 0 modulo p.
Si $A = B$ alors on a aussi $\operatorname{Tr}(A+A)^p = 2^p \operatorname{Tr}(A^p)$ or $2^p \equiv 2[p]$.
Conclusion : on a bien $\operatorname{Tr}(A+B)^p \equiv \operatorname{Tr}(A^p) + \operatorname{Tr}(B^p)$.

(2) Soit $\varphi\ : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \mapsto \operatorname{Tr}(A^p) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ alors

$$\varphi(\alpha A + \beta B) = \alpha^p \operatorname{Tr}(A^p) + \beta^p \operatorname{Tr}(B^p) = \alpha\varphi(A) + \beta\varphi(B)$$

car $\alpha^p = \alpha$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Ensuite $\varphi(AB) = \operatorname{Tr}(ABAB\dots AB) = \operatorname{Tr}(BABAB\dots B) = \varphi(BA)$. φ est donc proportionnelle à la trace donc $\varphi(A) = \lambda \operatorname{Tr}(A)$ et, avec $A = E_{11}$ on en déduit que $\lambda = 1$.

Solution 1.4.3

(1) $D_A(MN) = AMN - MNA = (AM - MA)N + M(AN - NA)$ est immédiat.
Si $D_A = 0$ alors A commute avec toutes les matrices donc A est une matrice scalaire.

(2) <u>Analyse</u> : supposons que $D = D_A$ alors $D_A(E_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}E_{kj} - \sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{il}$ par conséquent $D_A(E_{1i})E_{j1} = \sum_{k=1}^{n} a_{k1}\delta_{ij}E_{k1} - a_{ij}E_{11}$ d'où $\operatorname{Tr}(D(E_{1i})E_{j1}) = \delta_{ij}a_{11} - a_{ij}$.
<u>Synthèse</u> : si D est une dérivation, posons $a_{ij} = -\operatorname{Tr}(D(E_{1i})E_{j1})$, alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(D(E_{ij}E_{lk})) &= \operatorname{Tr}(D(E_{ij})E_{l1}E_{1k}) = \operatorname{Tr}(E_{1k}D(E_{ij})E_{l1}) \\ &= \operatorname{Tr}(D(E_{1k}E_{ij})E_{l1}) - \operatorname{Tr}(D(E_{1k})E_{ij}E_{l1}) \text{ en utilisant la dérivation} \\ &= \delta_{ki}\operatorname{Tr}(D(E_{1j})E_{l1}) - \delta_{jl}\operatorname{Tr}(D(E_{1k}E_{i1})) \\ &= \delta_{jl}a_{ki} - \delta_{ki}a_{jl}.\end{aligned}$$

Si on écrit la matrice $D(E_{ij}) = \sum_{(u,v)\in[\![1,n]\!]^2} \alpha_{uv}E_{uv}$ dans la base canonique alors $D(E_{ij})E_{lk} = \sum_{(u,v)\in[\![1,n]\!]^2} \alpha_{uv}E_{uv}E_{lk} = \sum_{u=1}^{n} \alpha_{ul}E_{uk}$ donc $\operatorname{Tr}(D(E_{ij})E_{lk}) = \alpha_{kl}$ d'où

$$D(E_{ij}) = \sum_{(k,l)\in[\![1,n]\!]^2} (\delta_{jl}a_{ki} - \delta_{ki}a_{jl})E_{kl} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}E_{kj} - \sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{il}.$$

Si on pose $A = (a_{ij})$ alors on vérifie, en utilisant le calcul fait pour l'analyse, que $D_A(E_{ij}) = D(E_{ij})$ soit $D = D_A$.

Solution 1.4.4

(1) On vérifie immédiatement que $\sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{j=1}^{n} C_j$.

(2) Soit $A = -nI_n + J$ où J est la matrice ne comportant que des 1. On a $L_i(A) = C_j(A) = 0$. Soit $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i L_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j C_j + \nu D = 0$, en appliquant φ à A, on obtient $\nu = 0$. Puis, en prenant $\varphi(A + E_{in}) = 0$ on obtient $\lambda_i = 0$. Comme les C_j sont linéairement indépendantes, on en déduit que la famille est libre.

(3) Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, soit $s(A)$ la somme commune alors on peut écrire $A = \dfrac{s(A)}{n} J + A'$ où $s(A') = 0$. On note $\mathcal{A}'(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ des matrices vérifiant $s(A') = 0$ alors $\mathcal{A}(\mathbb{R}) = \mathrm{Vect}(J) + \mathcal{A}'(\mathbb{R})$. Vu que

$$\mathcal{A}'(\mathbb{R}) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, L_i \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} \mathrm{Ker}\, C_j \cap \mathrm{Ker}\, D$$

et que ces formes linéaires sont indépendantes, on en déduit que $\dim \mathcal{A}'(\mathbb{R}) = n^2 - 2n$ soit $\dim \mathcal{A}(\mathbb{R}) = (n-1)^2$.

Solution 1.5.1 On a : $A = BCD$ où $B = (\alpha_i^j)$, $D = (\beta_j^i)$ et $C = (c_{ij})$ où $c_{ij} = C_{i+j}^i a_{i+j}$ ($a_{i+j} = 0$ si $i + j > n$). $\det B = V(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, $\det D = V(\beta_0, \ldots, \beta_n)$ et $\det C = (-1)^{[n(n+1)/2]} a_n^{n+1} \prod_{h=0}^{n} \binom{n}{h}$.

Solution 1.5.2 On écarte le cas où A est la matrice nulle, soit $r = \mathrm{Rg}(A) \neq 0$.
Montrons qu'il existe un mineur d'ordre r non nul : on écrit $A = (C_1 C_2 \ldots C_n)$ où les C_i sont les colonnes de A. Comme le rang des (C_i) vaut r alors on peut trouver r colonnes formant une famille libre et, après renumérotation, supposer que la famille $(C_1, C_2, \ldots, C_r)$ est libre. Soit $B = (C_1 C_2 \ldots C_r)$ alors $\mathrm{Rg}(B) = r$ donc $\mathrm{Rg}(B^{\mathrm{T}}) = r$. $B^{\mathrm{T}} = (C_1' C_2' \ldots C_n')$ et, là aussi, on peut trouver $(C_1', C_2', \ldots, C_r')$ libre (après renumérotation). $A' = (C_1' C_2' \ldots C_r')$ est une matrice carrée d'ordre r et de rang r, elle est donc inversible, $\det(A') \neq 0$ ce qui prouve le résultat annoncé.
Si $r < n$, montrons que tout mineur d'ordre $\geqslant r + 1$ est nul. En effet, si A' est une matrice extraite d'ordre $r+k$ alors A' n'est pas inversible (sinon le rang de A serait $> r$) donc $\det A' = 0$.
Conclusion : on a bien prouvé le résultat annoncé.

Solution 1.5.3 On prend $B = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ d'où $AB = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$.
Comme B est inversible alors $\mathrm{Rg}(AB) = \mathrm{Rg}(A) = r$. Si $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \neq 0$ alors $\mathrm{Rg}(AB) > r$ ce qui est impossible donc $A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = 0$ c.q.f.d.