RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

1. Sous-espaces stables, polynôme d'un endomorphisme

1.1. **Sous-espaces stables.**

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice M.
Montrer si $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ est l'équation d'un sous-espace stable par u alors le vecteur A (supposé non nul) de coordonnées (a_1, a_2, a_3) est un vecteur propre de M^{T}.
Réciproque ?

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{D}}$

Soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = 0$ avec $\operatorname{Rg} A = 2n$.
Prouver que A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{F}}$

Trouver les sous-espaces stables par l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2. **Polynôme d'un endomorphisme.**

Exercice 1.2.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit $E = \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6},\ (a,b,c,d) \in \mathbb{Q}^4\} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ (cf. *question (ii) page 51*).
On considère l'endomorphisme définit par $u(\alpha) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})\alpha$.

(1) Écrire la matrice A de u dans la base $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$.
(2) Chercher le polynôme minimal de A. Qu'en penser ?

---

2. Réduction d'un endomorphisme

2.1. **Valeurs propres, vecteurs propres.**

Exercice 2.1.1. $\boxed{\textbf{F T}}$
Valeurs propres et vecteurs propres de :

$$M = \begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix} \ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 - \{0\} \ ; N = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \dots & \alpha_2 & 0 \\ . & . & . & . \\ \alpha_n & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \ ; P = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.1.2. $\boxed{\textbf{F}}$
Éléments propres des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$:

(1) $f(P)(X) = (2X+1)P(X) + (1-X^2)P'(X)$. Sous espaces invariants de dimension finie ?
(2) $g(P)(X) = (X^2-1)P''(X) + (2X+1)P'(X)$,
(3) $h(P)(X) = (X-a)(X-b)P'(X) - nXP(X)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2.1.3. $\boxed{\textbf{F}}$
Trouver les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a' & b' \\ 1 & a'' & b'' \end{pmatrix}$ dont $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres.

Exercice 2.1.4. $\boxed{\textbf{F C}}$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui admet n valeurs propres distinctes, trouver toutes les matrices qui commutent avec A.

Exercice 2.1.5. $\boxed{\textbf{I C}}$
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(*i*) $\operatorname{Rg} A = n-1$ et la seule valeur propre de A est 0,
(*ii*) A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$,
(*iii*) il existe X_1, X_2, ... X_n des vecteurs colonnes, tels que, si $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une matrice carrée d'ordre n, $Y = (X_2, \dots, X_n, 0)$, $A = YX^{-1}$.

2.2. **Polynôme caractéristique.**

EXERCICE 2.2.1. **I C**

Soit $E = \mathbb{R}^3$, on considère l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
Quels sont les s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ stables par cet endomorphisme?

EXERCICE 2.2.2. **D**

Si $M = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & b_n & \dots & a_n+b_n \end{pmatrix}$ montrer que $\det M = P(1 + \dfrac{b_1}{a_1} + \cdots + \dfrac{b_n}{a_n})$ où $P = a_1 a_2 \dots a_n$ (les termes a_i étant supposés non nuls).
Dans le cas où les a_i sont égaux et les b_i non tous nuls, déterminer les éléments propres de M.

EXERCICE 2.2.3. **F**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.
Calculer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.

2.3. **Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.**

EXERCICE 2.3.1. **F**

Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables ; déterminer les éléments propres de A.

EXERCICE 2.3.2. **F**

Chercher une C.N.S. sur $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ pour que : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

EXERCICE 2.3.3. **F T**

Diagonaliser : $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2.3.4. **F**

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent en dimension finie. Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable ?

Exercice 2.3.5. $\boxed{\textbf{F C}}$

Quelles sont les matrices diagonalisables n'ayant qu'une valeur propre ?

Exercice 2.3.6. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on définit

$$u\ : f \in E \mapsto u(f)(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

(1) Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de u.
(2) Diagonaliser u sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2.3.7. $\boxed{\textbf{F T}}$

Soit E_n l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n, avec $n \geqslant 2$. On considère l'application $f\ : P \in E_n \mapsto Q \in \mathbb{C}[X]$ où $Q(x) = P(1) + \displaystyle\int_0^1 (1 + 2tx)^2 P'(t)\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que f est linéaire et à valeurs dans E_n.
(2) Trouver $\dim \operatorname{Ker} f$.
(3) Chercher les valeurs propres de f, f est-elle diagonalisable?

Exercice 2.3.8. $\boxed{\textbf{F}}$

Trouver les puissances n-iéme des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} u - a & a - v \\ u - v - a & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.3.9. $\boxed{\textbf{F}}$

On appelle $M_{(a,b)}$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

(1) Montrer que l'ensemble E des matrices $M_{(a,b)}$ quand (a, b) décrit $\mathbb{C}^2$ est une algèbre commutative.
(2) Diagonaliser la matrice $M_{(a,b)}$.
(3) Calculer ${M_{(a,b)}}^n$ à l'aide du 2. ou en calculant les coefficients par récurrence.

Exercice 2.3.10. $\boxed{\textbf{I C}}$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\exists (a, b, c) \in K^3\ : (f - a.\operatorname{Id})(f - b.\operatorname{Id})(f - c.\operatorname{Id}) = 0.$$

Montrer directement que f est diagonalisable (on suppose (a, b, c) distincts).

Exercice 2.3.11. $\boxed{\textbf{I C}}$
Quelles sont les matrices A sur $\mathbb{C}$ telles que :

$$A^2 = B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 2.3.12. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient A_1 et A_2 deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, non scalaires, montrer que A_1 et A_2 sont semblables ssi elles ont même polynôme caractéristique.
Peut-on généraliser ce résultat ?

Exercice 2.3.13. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit u un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle commutant de u (noté $\mathcal{C}(u)$) l'ensemble des endomorphismes v de $\mathcal{L}(E)$ tels que $v \circ u = u \circ v$.

(1) Montrer que
$$\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\dim E_\lambda(u))^2.$$
(2) Montrer que $\dim \mathcal{C}(u) \geqslant n$.
(3) Montrer que si u a toutes ses valeurs propres simples alors $\mathcal{C}(u) = \mathbb{K}[u]$.

Exercice 2.3.14. $\boxed{\textbf{I C}}$
Soient u et v dans $\mathcal{L}_K(E)$ trigonalisables, vérifiant $u \circ v = v \circ u$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont toutes deux triangulaires.

Exercice 2.3.15. $\boxed{\textbf{I T}}$

Trigonaliser la matrice : $\begin{pmatrix} 67 & 82 & 24 & -14 \\ -51 & -63 & -19 & 8 \\ -3 & -4 & -2 & -1 \\ 12 & 15 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 2.3.16. $\boxed{\textbf{D}}$
Soient E un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension finie $n \geqslant 1$, u et v deux endomorphismes de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ vérifiant : $uv - vu = u$.

(1) a) Montrer que $u^k v - v u^k = k u^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   b) En déduire que u est nilpotent.
(2) On suppose ici que u est de rang $n - 1$.
   a) Montrer que v admet n valeurs propres de la forme $\lambda_i = \alpha + i$, $i \in [1, n]$.
   b) Soit e_n un vecteur propre de v associé à λ_n. Montrer que la famille $(e_i)_{i \in [1,n]}$, où $e_i = u^{n-i}(e_n)$ est une base de E.
   Trouver les matrices de u et v dans cette base.
(3) On revient au cas général.
   a) Montrer que u et v admettent un vecteur propre commun.

b) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle u et v admettent des matrices triangulaires supérieures.

EXERCICE 2.3.17. $\boxed{\mathbf{D}}$
Pour tout couple (A,B) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, prouver l'équivalence de :
(i) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, AM et $AM+B$ ont même polynôme caractéristique,
(ii) B est nilpotente et $BA = 0$.
(Indications : $(i) \Rightarrow (ii)$: prouver que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}(BAM) = 0$,
$(ii) \Rightarrow (i)$: changer de base et se ramener au cas où $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$ où B_4 est triangulaire).

---

1. Indications :

Indication 1.1.1 Considérer $f : X \in \mathbb{R}^3 \mapsto X^{\mathrm{T}}A \in \mathbb{R}$, $g : X \in \mathbb{R}^3 \mapsto X^{\mathrm{T}}(M^{\mathrm{T}}A) \in \mathbb{R}$ formes linéaires et H le plan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. Étudier alors les 2 cas $\mathrm{Ker}\, g = \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Ker}\, g = H$. Réciproque évidente.

Indication 1.1.2 Prendre f l'endomorphisme associé à A, montrer que $\dim(\mathrm{Im}\, f^2) \leqslant n$, puis l'égalité en considérant la restriction g de f à $\mathrm{Im}\, f$ et en déduire que $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$.
Prendre $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}\, f$, puis $(e_{i+2n})_{i \in [1,n]}$ tels que $e_i = f^2(e_{i+2n})$ et $e_{i+n} = f(e_{i+2n})$ et montrer que la famille $(e_i)_{i \in [1,3n]}$ est libre.

Indication 1.1.3 Utiliser l'exercice précédent.

Indication 1.2.1 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $P_A(x) = x^4 - 10x^2 + 1$ est égal au polynôme minimal qui est un polynôme annulateur de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ dans $\mathbb{Q}$.

Indication 2.1.1 Les vap de M sont $x + \varepsilon i \sqrt{y^2 + z^2 + t^2}$ où $\varepsilon = \pm 1$. Les sep sont de dimension 2.
Les vap de N sont $\lambda_k = \pm \beta_k \beta_{n-k}$ où $\beta_i^2 = \alpha_i$ et les vep sont $x_1 = (\beta_1, 0, \dots, \varepsilon\beta_n)$ etc...
$P^2 = -I_{2n}$, les vap sont i et $-i$, les vep sont (X, iX) et $(X, -iX)$ où $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Indication 2.1.2

(1) Les vep de f sont de degré égal à 2, écrire alors la matrice de la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$. Les vap sont 1,-1,3 associées aux vep $X^2 - 1, X^2 - 2X + 1, X^2 + 2X + 1$. Les sous-espaces W invariants sont la somme directe de 1,2 ou 3 sous-espaces propres.
(2) Pour tout n, $n(n+1)$ est vap et P_n vep où le polynôme P_n est de degré n.
(3) Résoudre l'équation différentielle : $(nx + \lambda)y - (x-a)(x-b)y' = 0$, si $a \neq b$ on trouve les polynômes $P = (X-a)^m(X-b)^{n-m}$, $\lambda = -na + m(a-b)$, si $a = b$ alors : $P = (X-a)^n$, $\lambda = -na$.

Indication 2.1.3 On trouve : $a = a' = a'' = 2, b = b' = b'' = 1$.

Indication 2.1.4 Si $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est une base de vep, montrer que $\exists \mu_i$: $BE_i = \mu_i E_i$, puis utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange.

Indication 2.1.5 $(i) \Leftrightarrow (ii)$: si 0 est la seule valeur propre de A, alors montrer que $A^n = 0$, $\mathrm{Rg}\, A = n - 1$ et $A^{n-1} \neq 0$. Utiliser alors la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_k = f^{n-k}(\varepsilon_n)$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ est immédiat.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: poser $\eta_i = \varepsilon_{n-i}$ et se placer dans la base (η_i), avec $J = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = PJP^{-1}$, on choisit $X = P$.
La réciproque est immédiate, on pose $P = X$, A est semblable à J elle même.

Indication 2.2.1 Les valeurs propres de A sont 3 et $2 \pm i\sqrt{3}$, $E_3 = \mathrm{Vect}(e_1)$ est le seul sous-espace stable de dimension 1. Pour les sous-espaces stables de dimension 2 utiliser l'exercice 1.1.1.

Indication 2.2.2 Utiliser la linéarité du déterminant par rapport à la dernière colonne d'où $D_n = \Delta_n + \Delta'_n$ où

$$\Delta_n = \det \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & b_n & \dots & b_n \end{pmatrix} \text{ et } \Delta'_n = \det \begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2+b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & b_n & \dots & a_n \end{pmatrix},$$

$\Delta'_n = a_n D_{n-1}$ et $\Delta_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} b_n$.
Remarque : on peut aussi mettre a_i en facteur dans la i-ième ligne et on additionne toutes les lignes. On peut ainsi mettre en facteur le terme $1 + \dfrac{b_1}{a_1} + \cdots + \dfrac{b_n}{a_n}$ et faire apparaître une ligne de 1 et ramener le calcul au calcul d'un déterminant d'une matrice triangulaire.
Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = (a-\lambda)^{n-1}(a+b_1+b_2+\cdots+b_n-\lambda)$, si $b = b_1+\cdots+b_n \neq 0$ alors M est diagonalisable, si $b = 0$ alors M n'est pas diagonalisable.

Indication 2.2.3 Faire intervenir le produit matriciel par blocs et montrer que M est semblable à $\mathrm{Diag}(-A, 3A)$.

Indication 2.3.1 On a $PAP = B$ où P est une matrice de permutation, A admet la vap 6 associée au vep $(1,1,1)$, la vap $1-j$ associée au vep $(1, j^2, j)$, la vap $1-j^2$ associée au vep $(1, j, j^2)$.

Indication 2.3.2 A est diagonalisable ssi $bc + ab - ac \neq 0$.

Indication 2.3.3 Diagonaliser A et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication 2.3.4 La seule valeur propre de f est 0 et f n'est diagonalisable que si $f = 0$.

Indication 2.3.5 Ce sont les matrices scalaires.

Indication 2.3.6

(1) Résoudre l'équation différentielle $y = \lambda x y'$, les valeurs propres sont tous les réels de $]0,1]$ associé aux vecteurs propres $x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.
(2) Sur $\mathbb{R}_n[X]$, u admet les vap $\lambda_k = \frac{1}{k+1}$.

Indication 2.3.7

(1) Immédiat.
(2) Montrer l'indépendance linéaire des formes linéaires $\varphi_1(P) = P(1) + \int_0^1 P'(t)\,\mathrm{d}t$, $\varphi_2(P) = \int_0^1 tP'(t)\,\mathrm{d}t$, $\varphi_3(P) = \int_0^1 t^2 P'(t)\,\mathrm{d}t$, en déduire que $\mathrm{Rg}\, f = 3$.
(3) Les vap sont 0, 1, $2 \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}$, f est diagonalisable car $E_n = E_2 \oplus \mathrm{Ker}\, f$ et $f_{|E_2}$ est diagonalisable.

Indication 2.3.8 Diagonaliser A lorsque c'est possible, on trouve $A^n = \frac{1}{2v-u}\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha = (u-v)^n(a+v-u) - v^n(a-v)$, $\beta = (a+v-u)((u-v)^n - v^n)$, $\gamma = (a-v)(v^n - (u-v)^n)$,

$\delta = v^n(a+v-u)-(a-v)(u-v)^n$. Si $u=2v$ alors $(A-vI)^2=0$.
Pour B, écrire $B = I + \frac{a}{n}J$.

Indication 2.3.9

(1) On a $M_{(a,b)}M_{(a',b')} = M_{(aa'+2bb',ab'+a'b+bb')}$.
(2) $\lambda = a-b$ est vap associée au sep $x_1+x_2+x_3=0$, $\lambda = a+2b$ est vap associée au vep (1,1,1).
(3) On trouve $M_{(a,b)}{}^n = M_{(a_n,b_n)}$ où $a_n = \frac{1}{3}(2(a-b)^n+(a+2b)^n)$, $b_n = \frac{1}{3}(-(a-b)^n+(a+2b)^n)$.

Indication 2.3.10 Avec les P.I.L., écrire $1 = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(X-c)(X-b)}{(a-c)(a-b)}$ et montrer que E est somme des sep de f.

Indication 2.3.11 Montrer que A et B sont simultanément diagonalisables, on trouve $A = P\,\mathrm{Diag}(\varepsilon\sqrt{3},\varepsilon'\sqrt{2},\varepsilon'')P^{-1} = \begin{bmatrix} \varepsilon\sqrt{3} & -5\,\varepsilon\sqrt{3}+5\,\varepsilon'\sqrt{2} & 2\,\varepsilon\sqrt{3}-2 \\ 0 & \varepsilon'\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'' \end{bmatrix}$.

Indication 2.3.12 Distinguer les cas A_1 diagonalisable (donc A_2 aussi) et A_1 non diagonalisable. On ne peut pas généraliser ce résultat.

Indication 2.3.13

(1) Tout élément de $\mathcal{C}(u)$ stabilise les sep de u et réciproquement.
(2) Montrer que $\sum_{i=1}^{p} k_i = n$ entraîne que $\sum_{i=1}^{p} k_i^2 \geqslant n$ (k_i entiers).
(3) $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{C}(u)$ et montrer que $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u$ polynôme minimal de u.

Indication 2.3.14 Procéder par récurrence sur n comme dans le cours sur la trigonalisation, trouver une vap commune à u et v et raisonner sur les matrices.

Indication 2.3.15 1 est vap d'ordre 1 et 0 d'ordre 3, prendre $X_1 = (67,-51,-3,12)$ (vep associé à 1) et $\varepsilon_3 = (2,0,1,0) \in \mathrm{Ker}\, A^3$.

Indication 2.3.16

(1) a) Immédiat par récurrence.
 b) Raisonner par l'absurde, en considérant $\Phi : w \in \mathcal{L}(E) \mapsto \Phi(w) = wv - vw$ par exemple.
(2) Si $N_k = \mathrm{Ker}(u^k)$ alors montrer que $\dim N_k = k$ en considérant $u_k = u_{|| \mathrm{Im}\, u^{k-1}}$.
 a) Choisir e_n dans $E \setminus N_{n-1}$, $u^{n-1}(e_n) \neq 0$ et poser $e_{n-i} = u^i(e_n)$ pour obtenir une base de E, écrire v dans cette base.
 b) En partant de l'écriture de v dans une base trigonalisante, montrer que l'on peut se ramener au cas où la matrice de v est diagonale et prouver que la matrice de u est sous une forme réduite de Jordan.
(3) a) Montrer que N_1 est stable par v.
 b) Procéder par récurrence sur n en recopiant la démonstration du théorème de trigonalisation.

Indication 2.3.17

- $(i) \Rightarrow (ii)$ Montrer que B est nilpotente puis que $\mathrm{Tr}[(AM)^2] = \mathrm{Tr}[(AM+B)^2]$, que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}(BAM) = 0$ et conclure que $BA = 0$.
- $(ii) \Rightarrow (i)$ Il suffit de le prouver pour les endomorphismes u et v associés aux matrices A et B. $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$ et prendre une base de $\mathrm{Im}(u)$ que l'on complète en une base de $\mathrm{Ker}(v)$ par trigonalisation de v, on obtient les matrices données dans l'indication et B_4 est triangulaire avec des 0 sur la diagonale. Écrire la matrice M par blocs et traduire alors la propriété.

1. Solutions

Solution 1.1.1 On identifie $\mathbb{R}^3$ et l'ensemble des matrices unicolonnes, on fait de même avec u et M.
Soit $f : X \in \mathbb{R}^3 \mapsto X^{\mathrm{T}}A \in \mathbb{R}$, $g : X \in \mathbb{R}^3 \mapsto X^{\mathrm{T}}(M^{\mathrm{T}}A) \in \mathbb{R}$ et H le plan d'équation $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$. $\operatorname{Ker} f = H$, et si $X \in H$ alors $MX \in H$ donc $f(MX) = 0 = g(X)$ ce qui donne $H \subset \operatorname{Ker} g$. D'après le cours, on sait que $g = \lambda f$ d'où $M^{\mathrm{T}}A = \lambda A$ A est bien vecteur propre de M^{T}.
Réciproque évidente : en effet, si $M^{\mathrm{T}}A = \lambda A$ alors, comme $X \in H \Leftrightarrow X^{\mathrm{T}}A = 0$ on a

$$(MX)^{\mathrm{T}}A = X^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}A = \lambda X^{\mathrm{T}}A = 0$$

donc $MX \in H$.
Remarque : on peut aussi raisonner avec la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit H un plan stable par M et $\operatorname{Vect} A = H^{\perp}$ alors

$$\begin{aligned}(X \in H \Rightarrow MX \in H) &\Leftrightarrow ((A|X) = 0 \Rightarrow (A|MX) = 0) \Leftrightarrow ((A|X) = 0 \Rightarrow (M^{\mathrm{T}}A|X) = 0)\\ &\Leftrightarrow (M^{\mathrm{T}}A = \lambda A).\end{aligned}$$

Solution 1.1.2 Soit f l'endomorphisme associé à A, on sait que $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ car $f^3 = 0$. Comme $\operatorname{Rg} f = 2n$ on a $\dim \operatorname{Ker} f = n$ (formule du rang, cf. *théorème 8.19 page 136*) donc $\dim(\operatorname{Im} f^2) \leqslant n$.

On considère maintenant la restriction g de f à $\operatorname{Im} f$, en lui appliquant la formule du rang, on a :

$$\underbrace{\dim(\operatorname{Im} f)}_{=2n} = \underbrace{\dim(\operatorname{Im} f^2)}_{\leqslant n} + \underbrace{\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)}_{\leqslant n}$$

donc $\dim(\operatorname{Im} f^2) = n = \dim(\operatorname{Ker} f)$ et, par conséquent, $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Ker} f$.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} f$, comme $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Ker} f$ alors il existe des vecteurs $(e_{i+2n})_{i\in[1,n]}$ tels que $e_i = f^2(e_{i+2n})$ pour $i \in [1, n]$. On pose aussi $e_{i+n} = f(e_{i+2n})$. Montrons que la famille $(e_i)_{i\in[1,3n]}$ est libre.
Si $\sum_{i=1}^{3n} \lambda_i e_i = 0$ alors, en composant par f^2, on obtient $\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i+2n} e_i = 0$ d'où $\lambda_i = 0$ pour $i \in [2n + 1, 3n]$. On compose ensuite par f et on en déduit que $\lambda_i = 0$ pour $i \in [n + 1, 2n]$. On peut alors conclure $\lambda_i = 0$ pour $i \in [1, 3n]$.

Conclusion : la famille $(e_i)_{i\in[1,3n]}$ est une famille libre à $3n$ vecteurs, c'est donc une base. Dans cette base, la matrice de f a bien la forme indiquée.

Solution 1.1.3 On utilise l'exercice 1.1.1. Le polynôme caractéristique de A vaut $-(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+2)$. Le sous-espace stable de dimension 1 est le sous-espace propre associé à la valeur propre 2, c'est $E_2(u) = \operatorname{Vect}(1, 1, 1)$. Le sous-espace stable de dimension 2 est donné par le résultat de l'exercice 1.1.1, c'est le plan d'équation $x_2 + x_3 = 0$.

Solution 1.2.1

(1) On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) Le polynôme caractéristique de A est $x^4 - 10x^2 + 1$, ses racines sont $\varepsilon\sqrt{2} + \varepsilon'\sqrt{3}$ où $\varepsilon = \pm 1$ et $\varepsilon' = \pm 1$. Ses racines sont toutes distinctes donc le polynôme minimal de A est égal au polynôme caractéristique.

On remarque que le polynôme minimal de A est un polynôme annulateur de $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ dans $\mathbb{Q}$. En effet on a $P(u)(\alpha) = P(\sqrt{2}+\sqrt{3})\alpha$ pour tout $\alpha \in E$ donc $P(u) = 0 \Leftrightarrow P(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$.

Solution 2.1.1

- On a $M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} x-\lambda & -y & -z & -t \\ y & x-\lambda & -t & z \\ z & t & x-\lambda & -y \\ t & -z & y & x-\lambda \end{pmatrix}$ alors
$$(M-\lambda I_3)(M-\lambda I_3)^{\mathrm{T}} = ((x-\lambda)^2+y^2+z^2+t^2)I_4$$
d'où $\det M = ((x-\lambda)^2+y^2+z^2+t^2)^2$. Les valeurs propres sont donc : $x+\varepsilon i\sqrt{y^2+z^2+t^2}$ où $\varepsilon = \pm 1$. Les sous-espaces propres de dimension 2 sont obtenus avec les équations :
$$\begin{cases} X(z^2+t^2) & = -Z(yt-\varepsilon zi\sqrt{y^2+z^2+t^2}) + T(yz+\varepsilon ti\sqrt{y^2+z^2+t^2}) \\ Y(z^2+t^2) & = Z(yz+\varepsilon zi\sqrt{y^2+z^2+t^2}) + T(yt-\varepsilon ti\sqrt{y^2+z^2+t^2}) \end{cases}$$
- En résolvant les équations : $\alpha_1 x_n = \lambda x_1, \alpha_2 x_{n-1} = \lambda x_2, \dots, \alpha_n x_1 = \lambda x_n$ on trouve les valeurs propres : $\lambda_k = \pm\beta_k\beta_{n-k}$ où $\beta_i^2 = \alpha_i$ avec les vecteurs propres : $x_1 = (\beta_1, 0, \dots, \varepsilon\beta_n)$ etc...
- Le carré de P vaut $-I_{2n}$, les valeurs propres sont i et $-i$, les vecteurs propres sont donnés par : (X, iX) et $(X, -iX)$ où $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Solution 2.1.2

(1) les polynômes vecteurs propres de f sont de degré égal à 2 (il suffit de regarder les termes de plus haut degré de $f(P)$).
La matrice de la restriction de f à $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et elle admet $X^2-3X-X+3$ comme polynôme caractéristique. Les valeurs propres sont alors : 1,-1,3 associées aux vecteurs propres : $X^2-1, X^2-2X+1, X^2+2X+1$.
Les sous-espaces W invariants sont contenus dans $E = \mathrm{Vect}(1, X, X^2)$, d'où : W est la somme directe de 1,2 ou 3 sous-espaces propres.
Remarque : si λ désigne une valeur propre, on pouvait résoudre l'équation différentielle $(2x+1-\lambda)y-(x-1)y' = 0$ pour $x \in]-1,1[$ et chercher les solutions polynomiales. On trouvait alors $y = C(x^2-1)\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{(\lambda-1)/2}$ ce qui permettait de voir que $\lambda = -1$, 1, 3 sont les seules possibilités.

(2) Pour tout n, il existe un et un seul couple $(n(n+1), P_n)$, $n(n+1)$ valeur propre et P_n vecteur propre où le polynôme P_n est déterminé de manière unique par :
$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \text{ et } ka_k = \frac{(k-1)a_{k-1}}{(n-k+2)(n+k-1)} - a_{k-2}.$$
Ceci permet au passage de prouver que pour tout n, la restriction de g à $\mathbb{R}_n[X]$ est diagonalisable. L'utilisation d'équation différentielle dans ce cadre ne permet pas de conclure.

(3) h est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et si (P, λ) est un couple propre de h alors on résout l'équation différentielle :
$$(nx+\lambda)y-(x-a)(x-b)y' = 0$$

d'où

- si $a \neq b$ on trouve les polynômes : $P = (X-a)^m(X-b)^{n-m}$, $\lambda = -na + m(a-b)$. h a $n+1$ valeurs propres, donc est diagonalisable.
- Si $a = b$ alors : $P = (X-a)^n$, $\lambda = -na$.

Solution 2.1.3 En résolvant un système (donné par les relations $AX_i = \lambda_i X_i$ et l'élimination de λ_i), on trouve : $a = a' = a'' = 2, b = b' = b'' = 1$.
On peut aussi remarquer que les trois vecteurs propres X_1, X_2, X_3 forment une base et que la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ satisfait à $PX_i = \pm X_i$ donc $(PA - AP)X_i = 0$ i.e. $PA = AP$ d'où $b = b' = b'' = 1$, $a = a''$. Les calculs se finissent tous seuls.

Solution 2.1.4 Soit B une matrice qui commute avec A et $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ une base de vecteurs propres associée à $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, alors $A(BE_i) = \lambda_i BE_i \Rightarrow \exists \mu_i\ : BE_i = \mu_i E_i$. En utilisant les polynômes d'interpolation de Lagrange, on sait qu'il existe un polynôme P tel que : $P(\lambda_i) = \mu_i$ et donc, $B = P(A)$.

Solution 2.1.5

- $(i) \Leftrightarrow (ii)$: si 0 est la seule valeur propre de A, alors $A^n = 0$ et $\operatorname{Rg} A = n-1 \Rightarrow A^{n-1} \neq 0$. En effet, on choisit une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ telle que $f(e_1) = 0$ et $(f(e_2), \ldots, f(e_n))$ soit libre, on pose $E_{n-1} = \operatorname{Vect}(f(e_2), \ldots, f(e_n))$. Si $f(E_{n-1}) = E_{n-1}$ alors f possède une autre valeur propre que 0 ce qui est impossible donc on a $\dim f(E_{n-1}) = n-2$ et par récurrence, $\dim f(E_{n-k}) = n-k-1$.
  On écrit ensuite f dans la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ où ε_n est choisi pour que $f^{n-1}(\varepsilon_n) \neq 0$, $\varepsilon_k = f^{n-k}(\varepsilon_n)$.
  Il n'est pas très difficile à ce stade de vérifier que $(ii) \Rightarrow (i)$.
- $(ii) \Leftrightarrow (iii)$: si on pose $\eta_i = \varepsilon_{n-i}$, la matrice de f s'écrit dans la base (η_i) :
  $$J = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
  et $A = PJP^{-1}$, on choisit $X = P$.
  La réciproque est immédiate, on pose $P = X$, A est semblable à J elle même.

Solution 2.2.1 On a $P_A(x) = (3-x)(x^2 - 4x + 7)$ donc les valeurs propres de A sont 3 et $2 \pm i\sqrt{3}$.

- $\{0\}$ et E sont les sous-espaces stables par tous les endomorphismes.
- $E_3 = \operatorname{Vect}(e_1)$ est le seul sous-espace stable de dimension 1.
- Si H est un sous-espace stable de dimension 2 alors $H = \operatorname{Ker} f$ où $f \in E^*$. Or
  $$\forall x \in H,\ u(x) \in H \Rightarrow \forall x \in H,\ f \circ u(x) = 0$$
  donc $f \circ u$ s'annule sur H donc il existe $\lambda \in \mathbb{R} \mid f \circ u = \lambda f$ ce qui se traduit en termes matriciels de la façon suivante :
  $$FA = \lambda F \Rightarrow A^{\mathrm{T}} F^{\mathrm{T}} = \lambda F^{\mathrm{T}}$$

i.e. F^{T} est vecteur propre de A^{T}. La réciproque est immédiate donc les sous-espaces stables de dimension 2 sont tous obtenus de cette façon (cf. exercice 1.1.1).
H est donc le plan d'équation $2x - y - 6z = 0$.

Solution 2.2.2 Pour le calcul de $\det M = D_n$, on écrit la dernière colonne comme une somme de deux vecteurs et on utilise la linéarité du déterminant par rapport à cette colonne. On a donc : $D_n = \Delta_n + \Delta'_n$ où

$$\Delta_n = \det\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & \dots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & b_n & \dots & b_n \end{pmatrix} \text{ et } \Delta'_n = \det\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2+b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & b_n & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

On obtient alors : $\Delta'_n = a_n D_{n-1}$ et $\Delta_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1} b_n$ (en retranchant la dernière colonne à toutes les autres). Le résultat s'en déduit par récurrence.
Si les a_i sont égaux, en remplaçant les a_i par $a - \lambda$ on obtient le polynôme caractéristique : $P(\lambda) = (a-\lambda)^{n-1}(a + b_1 + b_2 + \dots + b_n - \lambda)$, le sous-espace propre associé à a est l'hyperplan : $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ (les b_i étant supposés non tous nuls).

- Si $b = b_1 + \dots + b_n \neq 0$ alors le sous-espace propre associé à $a + b$ est engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. M est donc diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est n (cf. *proposition 3.2.11 page 193*).
- Si $b = 0$ alors M n'est pas diagonalisable sauf si $b_1 = \dots = b_n = 0$ (ce qui est écarté).

Solution 2.2.3 On "remarque" que $\begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 2I_n & 2I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ (on a réduit la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$) donc $P_M(\lambda) = P_{-A}(\lambda) P_{3A}(\lambda) = 3^n P_A(-\lambda) P_A(\lambda/3)$.

Solution 2.3.1 Pour passer de A à B, il suffit d'échanger d'abord les 2 dernières lignes de A, puis les 2 dernières colonnes de la matrice obtenue. Ceci se traduit matriciellement par $PAP = B$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $P = P^{-1}$ alors les matrices A et B sont bien semblables.
Le polynôme caractéristique de A est : $(6-\lambda)(-1+j-\lambda)(-1+j^2-\lambda)$. On obtient alors les éléments propres suivants :

- à la valeur propre 6 on a le sous-espace propre $\mathrm{Vect}(1,1,1)$,
- à $1 - j$ on a le sous-espace propre $\mathrm{Vect}(1, j^2, j)$.
- à $1 - j^2$ on a le sous-espace propre $\mathrm{Vect}(1, j, j^2)$.

A est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (mais pas sur $\mathbb{R}$) (cf. *remarque 3.2.3 (i) page 194*).

Solution 2.3.2 Le polynôme caractéristique est : $P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda(bc + ab - ac)$, d'où la matrice est diagonalisable ssi $bc + ab - ac \neq 0$.
En effet, si on pose $\delta = bc + ab - ac$ on a :

- si $\delta \neq 0$ alors, si on appelle z une racine de δ ($z^2 = \delta$), les racines de P sont 0, z, $-z$. Elles sont toutes distinctes donc A est diagonalisable (cf. *remarque 3.2.3 (i) page 194*).
- Si $\delta = 0$ alors A n'a que 0 comme valeur propre et comme $A \neq 0$, A n'est pas diagonalisable.

Solution 2.3.3 On a $P(\lambda) = \lambda^2(2-\lambda)(6-\lambda)$ et $P^{-1}BP = \mathrm{diag}(0,0,2,6)$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une autre façon de s'y prendre est de procéder comme suit : $A = P\,\mathrm{Diag}(3,0)\frac{1}{2}P$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P^2 = 2I$. On écrit $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$ d'où

$$B = \begin{pmatrix} P & P \\ P & -P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Diag}(6,2) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} P & P \\ P & -P \end{pmatrix}$$

qui fournit le résultat et une possibilité d'extension à d'autres cas.

Solution 2.3.4 La seule valeur propre de f est 0 et f n'est diagonalisable que si $f = 0$ (cf. exercice 2.3.5).

Solution 2.3.5 Si A est diagonalisable, il existe une base de vecteurs propres $E_1, E_2, \ldots, E_n$ et pour tout i, on a $AE_i = \lambda E_i$ donc $A = \lambda I_n$.

Conclusion : les matrices diagonalisables n'ayant qu'une valeur propre sont les matrices scalaires.

Solution 2.3.6

(1) On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, on a alors à résoudre l'équation différentielle $y = \lambda x y'$. Les solutions sur $\mathbb{R}^*$ sont données par $y = Cx^{\frac{1}{\lambda}-1}$. On veut des solutions prolongeables par continuité en 0 ce qui impose de prendre $0 < \lambda \leqslant 1$. On vérifie ensuite que les fonctions associées sont bien vecteurs propres.

Conclusion : les valeurs propres sont tous les réels de $]0,1]$ associé aux vecteurs propres $x^{\frac{1}{\lambda}-1}$.

(2) Sur $\mathbb{R}_n[X]$, u a toutes ses valeurs propres distinctes : $\lambda_k = \dfrac{1}{k+1}$ pour $k \in [0,n]$, il est donc diagonalisable.

Solution 2.3.7

(1) f est linéaire par linéarité de la dérivation et de l'intégration. On écrit que

$$Q(X) = P(1) + \int_0^1 P'(t)\,\mathrm{d}t + 4X\int_0^1 tP'(t)\,\mathrm{d}t + 4X^2\int_0^1 t^2P'(t)\,\mathrm{d}t,$$

donc $f(Q)$ est un polynôme de degré $\leqslant 2 \leqslant n$.

(2) Montrons l'indépendance linéaire des formes linéaires $\varphi_1(P) = P(1) + \displaystyle\int_0^1 P'(t)\,\mathrm{d}t$, $\varphi_2(P) = \displaystyle\int_0^1 tP'(t)\,\mathrm{d}t$, $\varphi_3(P) = \displaystyle\int_0^1 t^2P'(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $P = a + bX + cX^2$ alors $\varphi_1(P) = a + 2b + 2c$, $\varphi_2(P) = \dfrac{b}{2} + 2\dfrac{c}{3}$, $\varphi_3(P) = \dfrac{b}{3} + \dfrac{c}{2}$. On vérifie alors que la restriction des formes linéaires $(\varphi_i)_{i=1,2,3}$ à $\mathbb{C}_2[X]$ donne une famille

indépendante.
On a alors $\operatorname{Rg} f = 3$ donc $\dim \operatorname{Ker} f = n-2$.

(3) On écrit la matrice de f dans E_2 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 8/3 \\ 0 & 4/3 & 2 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est égal à $(\lambda-1)[(\lambda-2)^2 - \dfrac{32}{9}]$, les valeurs propres sont 0, 1, $2\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, f est bien diagonalisable car on peut écrire $E_n = E_2 \oplus \operatorname{Ker} f$ et $f_{|E_2}$ est diagonalisable (c'est la *définition 3.2.5 page 193*).

Solution 2.3.8

- Calcul de A^n.
  - Si $u-2v \neq 0$, A est diagonalisable, $A^n = \dfrac{1}{2v-u}\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ où $\alpha = (u-v)^n(a+v-u) - v^n(a-v)$, $\beta = (a+v-u)((u-v)^n - v^n)$, $\gamma = (a-v)(v^n-(u-v)^n)$, $\delta = v^n(a+v-u) - (a-v)(u-v)^n$.
  - Si $u = 2v, a \neq v$: $(A-vI)^2 = 0 \Rightarrow A^n = v^{n-1}\begin{pmatrix} (n+1)v - na & n(a-v) \\ n(v-a) & na-(n-1)v \end{pmatrix}$
  - Si $u = 2v, a = v$: $A^n = v^n I$.
- Calcul de B^n. On a $B = I + \frac{a}{n}J$ avec $J^{2n} = I, J^{2n-1} = J$ d'où $B^n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha = \dfrac{1}{2}((1+\frac{a}{n})^n + (1-\frac{a}{n})^n)$, $\beta = \dfrac{1}{2}((1+\frac{a}{n})^n - (1-\frac{a}{n})^n)$.

Solution 2.3.9

(1) E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
Comme $M_{(a,b)}M_{(a',b')} = M_{(aa'+2bb',ab'+a'b+bb')}$ alors la multiplication est interne donc E est bien une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

(2) Le polynôme caractéristique de $M_{(a,b)}$ est $P(\lambda) = (a+2b-\lambda)(a-b-\lambda)^2$ donc on en déduit que
- $\lambda = a-b$ est valeur propre associée au sous-espace propre $x_1+x_2+x_3 = 0$,
- $\lambda = a+2b$ est valeur propre associée au vecteur propre (1,1,1).

(3) On trouve ${M_{(a,b)}}^n = M_{(a_n,b_n)}$ où $a_n = \dfrac{1}{3}(2(a-b)^n + (a+2b)^n)$, $b_n = \dfrac{1}{3}(-(a-b)^n + (a+2b)^n)$.
En effet,
- en diagonalisant $M_{(a,b)}$ on obtient $M_{(a,b)} = P\operatorname{Diag}(a-b, a-b, a+2b)P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $M^n_{(a,b)} = P\operatorname{Diag}[(a-b)^n, (a-b)^n, (a+2b)^n]P^{-1}$.
- On écrit $M^n_{(a,b)} = M_{(a_n,b_n)}$ d'où, avec $M^{n+1}_{(a,b)} = M^n_{(a,b)}M_{(a,b)}$, on arrive aux relations de récurrence
$$\begin{array}{rcrcl} a_{n+1} & = & aa_n & + & 2bb_n \\ b_{n+1} & = & ba_n & + & (a+b)b_n \end{array}.$$
De la première égalité on tire $2bb_n = a_{n+1} - aa_n$ et on multiplie la seconde par $2b$ soit
$$\begin{aligned} 2bb_{n+1} &= a_{n+2} - aa_{n+1} \\ &= 2b^2a_n + (a+b)2bb_n = 2b^2a_n + (a+b)[a_{n+1} - aa_n] \end{aligned}$$

donc $a_{n+2} = (2a+b)a_{n+1} - (a-b)(a+2b)a_n$. La résolvante de cette récurrence double admet $a-b$ et $a+2b$ comme racines (rien d'étonnant), le calcul fournit le résultat annoncé.

Solution 2.3.10 Les seules valeurs propres de f sont : a, b, c. Il suffit donc de montrer que : $E = E_a \oplus E_b \oplus E_c$. On utilise les polynômes d'interpolation de Lagrange (cf. *définition 2.1.7 page 182*) pour écrire :

$$1 = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(X-c)(X-b)}{(a-c)(a-b)} = L_c + L_b + L_a.$$

Donc $\forall x \in E\ : x = L_a(f)(x) + L_b(f)(x) + L_c(f)(x)$ i.e. $E = E_a + E_b + E_c$ et comme la somme de sous-espaces propres est toujours directe (cf. *théorème 3.3 page 190*), on peut conclure.

Remarque : le lemme des noyaux (*théorème 3.1 page 189*) permettait de conclure immédiatement ainsi que le *théorème 3.7 page 194*.

Solution 2.3.11 Les sous-espaces propres de B sont stables par A ($AB = BA$) et comme ils sont tous de dimension 1, A et B sont simultanément diagonalisables. En écrivant que $B = P\,\mathrm{Diag}(3,2,1)P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on sait que

$$A = P\,\mathrm{Diag}(\varepsilon\sqrt{3}, \varepsilon'\sqrt{2}, \varepsilon'')P^{-1} = \begin{bmatrix} \varepsilon\sqrt{3} & -5\,\varepsilon\sqrt{3} + 5\,\varepsilon'\sqrt{2} & 2\,\varepsilon\sqrt{3} - 2 \\ 0 & \varepsilon'\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'' \end{bmatrix}.$$

En fait, B stabilise un drapeau qui est lui-même stabilisé par A donc on peut chercher A sous la forme d'une matrice triangulaire.

$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & \varepsilon'\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon'' \end{pmatrix}$ où $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$, $\varepsilon'' = \pm 1$. D'où : $a = \varepsilon\sqrt{3}$, $b = 5(\varepsilon\sqrt{3} - \varepsilon'\sqrt{2})$, $c = 2(-\varepsilon\sqrt{3} - \varepsilon'')$.

Solution 2.3.12

- Si le polynôme caractéristique possède deux racines distinctes, c'est évident.
- S'il possède une racine double λ, alors les deux matrices A_1 et A_2 seront semblables à une matrice de Jordan : $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, donc semblables (la réduite de Jordan n'étant pas au programme, il faudra redémontrer ce résultat "à la main").

Pour la généralisation, c'est nettement moins simple, si toutes les racines du polynôme caractéristique sont distinctes, ça marche tout seul, sinon, en prenant la réduite de Jordan, on voit se pointer quelques difficultés avec les racines multiples !

Solution 2.3.13

(1) Soit $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ la décomposition de E en somme directe de sous-espaces propres de u. On prouve l'équivalence

$$u \circ v = v \circ u \Leftrightarrow \forall i \in [1,p],\ v(E_{\lambda_i}(u)) \subset E_{\lambda_{i}(u)}.$$

$\Rightarrow$ est une conséquence immédiate de la *proposition 3.2.3 page 190*.
$\Leftarrow$ Si $x = x_1 + \cdots + x_p$ est l'écriture de x dans la somme directe ci-dessus alors, comme $u(v(x_i)) = \lambda_i v(x_i)$, on a :

$$v \circ u(x) = v(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p) = \lambda_1 v(x_1) + \cdots + \lambda_p v(x_p)$$
$$u \circ v(x) = u(v(x_1) + \cdots + v(x_p)) = \lambda_1 v(x_1) + \cdots + \lambda_p v(x_p)$$

donc $u \circ v = v \circ u$.
Conclusion : on a bien équivalence. On peut alors établir une bijection entre les deux ensembles

$$\mathcal{C}(u) \text{ et } \mathcal{L}(E_{\lambda_1}) \times \cdots \times \mathcal{L}(E_{\lambda_p}).$$

(2) En fait il suffit de prouver que si $(k_i)_{i\in[1,p]}$ est une suite d'entiers de $\mathbb{N}^*$ alors $\sum\limits_{i=1}^{p} k_i = n$ entraîne que $\sum\limits_{i=1}^{p} k_i^2 \geqslant n$. Or en faisant la différence, on a

$$\sum_{i=1}^{p} k_i^2 - k_i = \sum_{i=1}^{p} k_i(k_i - 1) \geqslant 0$$

ce qui permet de conclure.

(3) On sait que $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{C}(u)$ (cf. *remarque 3.1.4 page 188*).
Soient λ_1, λ_2,..., λ_n les n valeurs propres distinctes de u alors le polynôme $\pi_u = \prod\limits_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ est le polynôme minimal de u. En effet, le polynôme minimal de l'endomorphisme u admet les valeurs propres de u comme racines et divise le polynôme caractéristique.
Montrons que $\dim \mathbb{K}[u] = \deg \pi_u = n$:

- Tout d'abord, soit $\pi_u = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$. Comme π_u est minimal alors la famille $(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^{n-1})$ est libre et $(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^n)$ est liée.
- Ensuite si $P \in \mathbb{K}[X]$ alors $P = \pi_u Q + R$ (division euclidienne de P par π_u) donne $P(u) = R(u)$ donc $\mathbb{K}[u] \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^{n-1})$, l'inclusion dans l'autre sens étant évidente on a l'égalité $\mathbb{K}[u] = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, u, \ldots, u^{n-1})$ et $\dim \mathbb{K}[u] = n$.

Comme on a

$$\dim \mathcal{C}(u) = \sum_{i=1}^{n} (\dim E_{\lambda_i}(u))^2 = n$$

car $\dim E_{\lambda_i} = 1$, on peut alors conclure $\mathbb{R}[u] = \mathcal{C}(u)$.

Solution 2.3.14 On procède comme pour la démonstration du *théorème 3.9 page 195*, par récurrence sur $n = \dim E$.
Si $n = 1$, pas de problème. On suppose que c'est vrai à l'ordre n i.e. que si u et v sont deux endomorphismes trigonalisables qui commutent sur un espace vectoriel de dimension n alors ils sont simultanément trigonalisables.
À l'ordre $n+1$: comme u et v sont trigonalisables, u et v ont des valeurs propres. On sait alors que, si λ est une valeurs propre de u, $E_\lambda(u)$ est stable par v et, comme $v_{||E_\lambda(u)}$ est aussi trigonalisable (il annule un polynôme scindé), on va trouver un vecteur propre commun à u et à v que l'on appelle e_1 et que l'on complète pour former une base $\mathcal{B}$. On aura alors dans cette base

$$U = \begin{pmatrix} \lambda & U' \\ 0 & U_n \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} \mu & V' \\ 0 & V_n \end{pmatrix}.$$

$P_U(X) = (X-\lambda)P_{U_n}$ et $P_V(X) = (X-\mu)P_{V_n}$ donc U_n et V_n sont trigonalisables, on vérifie aussi que $U_nV_n = V_nU_n$ et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes associés à U_n et V_n. Il existe donc P matrice de passage d'ordre n telle que

$$U_n = PTP^{-1} \text{ et } V_n = PT'P^{-1}$$

on aura alors

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & U'' \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & V'' \\ 0 & T' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$$

ce qui achève la récurrence.

Solution 2.3.15 On a $P_A = X^4 - X^3$, $X_1 = (67, -51, -3, 12)$ est un vecteur propre associé à 1 et $X_2 = (22, -17, -1, 4)$ est un vecteur propre associé à 0.
Si on pose $E_1 = (1, 0, 0, 0)$ alors : $A^2 = (X_1, X_2, -X_1 - E_1, -\dfrac{13}{3}X_1 - \dfrac{5}{3}E_1)$ en écrivant les vecteurs en colonne, et $A^3 = (X_1, 0, -2X_1, -6X_1) = A^4$. On a $\operatorname{Ker} A^3 = H$ hyperplan d'équation $x - 2z - 6t = 0$. Soit $\varepsilon_3 = (2, 0, 1, 0) \in \operatorname{Ker} A^3$ alors $A^2\varepsilon_3 = X_1 - E_1 \neq 0$.
Dans la base $\varepsilon_1 = A^2\varepsilon_3$, $\varepsilon_2 = A\varepsilon_3$, ε_3, $\varepsilon_4 = X_1$, la nouvelle matrice va s'écrire

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & (1) \end{pmatrix}.$$

Solution 2.3.16

(1) a) La première égalité se montre facilement par récurrence.
b) On considère l'endomorphisme $\Phi : w \in \mathcal{L}(E) \mapsto \Phi(w) = wv - vw$. On remarque que $\Phi(u^k) = ku^k$; si u n'est pas nilpotent alors Φ admet une infinité de valeurs propres ($k \in \mathbb{N}$), ce qui est impossible car on est en dimension finie.

(2) On pose $N_k = \operatorname{Ker}(u^k)$. Montrons alors que $\dim N_k = k$:
soit $u_k = u_{|| \operatorname{Im} u^{k-1}}$, u_k est nilpotente (car u l'est) donc $\dim \operatorname{Ker} u_k \geqslant 1$ et comme $\dim \operatorname{Ker} u = 1$, alors $\dim \operatorname{Ker} u_k \leqslant 1$ soit $\dim \operatorname{Ker} u_k = 1$ (si $u_k \neq 0$). On applique alors la formule du rang à u_k (cf. *théorème 8.1 page 136*) d'où

$$\dim \operatorname{Im} u^{k-1} = \operatorname{Rg}(u_{k-1}) = \dim \operatorname{Ker} u_k + \operatorname{Rg}(u_k) = 1 + \dim \operatorname{Im} u^k$$

donc $\dim \operatorname{Ker} u^k = k$ soit $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$ (cf. exercice 2.1.5).

a) On choisit e_n dans $E \setminus N_{n-1}$, $u^{n-1}(e_n) \neq 0$ et on pose $e_{n-i} = u^i(e_n)$. Il est alors facile de prouver que la famille $(e_i)_{i\in[1,n]}$ est une base de E.
On a ensuite $v(N_k) \subset N_k$, dans la base de (e_i), la matrice de v est triangulaire et ses termes diagonaux sont de la forme $\alpha + i$, c.q.f.d.

b) Si $i \geqslant 2$ alors $v(e_i) = (\alpha+i)e_i + \alpha_{1i}e_1 + \cdots + \alpha_{i-1i}e_{i-1}$ d'où, en prenant $e'_i = e_i + \frac{\alpha_{1i}e_1}{i-1}e_1$ alors, dans la base $(e_1, e'_2, \ldots, e'_n)$, la matrice de v s'écrit

$$\begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 & \ldots & 0 \\ & \ddots & * & * \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \alpha+n \end{pmatrix} \text{ et celle de } u \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit par le calcul matriciel, soit avec les endomorphismes, on prouve alors que la matrice de v dans cette base est diagonale.

D'où les matrices

$$M(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M(v) = \begin{pmatrix} \alpha+1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha+n \end{pmatrix}$$

(3) a) $N_1 \neq \{0\}$, N_1 est stable par v donc $v_{|N_1}$ admet un vecteur propre qui sera le vecteur propre commun recherché.

b) On procède ici par récurrence sur n en recopiant la démonstration du théorème qui dit que tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable (cf. *théorème 3.9 page 195*) :
pour $n = 1$, c'est immédiat.
si $M(u) = \begin{pmatrix} 0 & U' \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $M(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & V' \\ 0 & V \end{pmatrix}$ alors, en faisant les produits matriciels par blocs, on obtient $UV - VU = U$ donc on applique l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes de matrices U et V, il existe donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}UP = T_u$ et $P^{-1}VP = T_v$ d'où

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} M(u) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & U'P \\ 0 & T_u \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} M(v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & V'P \\ 0 & T_v \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'achever la récurrence.

Solution 2.3.17

- $(i) \Rightarrow (ii)$ On prend $M = 0$, alors le polynôme caractéristique de B est $(-X)^n$ ce qui prouve que B est nilpotente.
Comme AM et $AM + B$ ont même polynôme caractéristique, $(AM)^2$ et $(AM + B)^2$ ont mêmes valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité (on les trigonalise et on regarde ce qui se passe sur la diagonale).
On a alors, en utilisant le fait que $\mathrm{Tr}(B^2) = 0$ (B est nilpotente),

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}[(AM)^2] = \mathrm{Tr}[(AM+B)^2] &= \mathrm{Tr}[(AM)^2] + \mathrm{Tr}(AMB) + \mathrm{Tr}(BAM) + \mathrm{Tr}(B^2) \\ &= \mathrm{Tr}[(AM)^2] + 2\,\mathrm{Tr}(BAM) \end{aligned}$$

car $\mathrm{Tr}(AMB) = \mathrm{Tr}(BAM)$ (propriété de la trace, cf. *proposition 2.1.7 page 185*). On en déduit que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Tr}(BAM) = 0$.
On applique ce résultat à $M = (BA)^*$ et on trouve bien que $BA = 0$. En effet, comme pour toute matrice carrée complexes $\mathrm{Tr}(PP^*) = \sum_{i,j} |p_{ij}|^2$, alors $\mathrm{Tr}(PP^*) = 0 \Rightarrow P = 0$.
- $(ii) \Rightarrow (i)$ La propriété est intrinsèque, il suffit de la prouver pour les endomorphismes associés aux matrices A et B. Soient u et v les endomorphismes associés à A et B, on a $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v)$. On part alors d'une base de $\mathrm{Im}(u)$ $(e_1, \ldots, e_r)$ (en posant $r = \dim(\mathrm{Im}(u))$) que l'on complète en une base de $\mathrm{Ker}(v)$ et par trigonalisation de v, on obtient une base de E $(e_1, \ldots, e_n)$. Dans cette base, la matrice de u s'écrit $A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où A_1 est une matrice carrée d'ordre r, et celle de v : $B' = \begin{pmatrix} 0 & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$ où B_4 est triangulaire d'ordre $n - r$ avec des 0 sur la diagonale.
Soit w un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$. Dans la base que l'on vient de mettre en évidence, on

écrit la matrice M de w sous forme de blocs. On a alors

$$A'M = \begin{pmatrix} A_1M_1 + A_2M_3 & A_1M_2 + A_2M_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A'M + B' = \begin{pmatrix} A_1M_1 + A_2M_3 & A_1M_2 + A_2M_4 + B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} P_{uv}(x) &= \det(A_1M_1 + A_2M_3 - xI_r) \times \det(-xI_{n-r}) \\ &= \det(A_1M_1 + A_2M_3 - xI_r) \times \det(B_4 - xI_r) = P_{uv+w}(x). \end{aligned}$$