

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

1. SOUS-ESPACES STABLES, POLYNÔME D'UN ENDOMORPHISME

1.1. Sous-espaces stables.

EXERCICE 1.1.1. I C

Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on associe $u_\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par : $u_\sigma(x) = (x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}, \dots, x_{\sigma_n})$.

Montrer que les sous-espaces stables par tous les u_σ (où σ décrit \mathcal{S}_n) sont : $\{0\}$, la droite $D = \mathbb{R}(e_1 + e_2 + \dots + e_n)$, l'hyperplan H d'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ et \mathbb{R}^n .

EXERCICE 1.1.2. I

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$. Quels sont les sous-espaces stables par u ?

EXERCICE 1.1.3. I

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice M .

Montrer si $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ est l'équation d'un sous-espace stable par u alors le vecteur A de coordonnées (a_1, a_2, a_3) est un vecteur propre de M^T .

Réciproque ?

2. RÉDUCTION D'UN ENDOMORPHISME

2.1. Valeurs propres, vecteurs propres.

EXERCICE 2.1.1. F

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et L l'endomorphisme de E défini par :

$$L(P) = (X - \alpha)(P'(X) + P'(\alpha)) - 2(P(X) - P(\alpha)).$$

Trouver les éléments propres de L .

EXERCICE 2.1.2. F

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ définie par $f(P) = [(\alpha X + \beta)P]'$.

Trouver les éléments propres de f . À quelle condition sur (α, β) f est-elle diagonalisable ? (On suppose $(\alpha, \beta) \neq 0$).

EXERCICE 2.1.3. F

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que : $S^T A S = A$.

Calculer $\det A$; montrer que S est inversible et que S^T et S^{-1} sont semblables. Que dire des valeurs propres de S ?

EXERCICE 2.1.4. F C

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que $\text{Sp}(A) \subset E = \bigcup_{i=1}^n \overline{B} \left(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right)$.

Si on pose $E' = \bigcup_{i=1}^n \overline{B} \left(a_{ii}, \sum_{k \neq i} |a_{ki}| \right)$, montrer que $\text{Sp}(A) \subset E \cap E'$.

EXERCICE 2.1.5. F

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 3, f et g deux rotations de E , distinctes de Id_E et qui ne sont pas des symétries.

Si $f \circ g = g \circ f$, que peut-on dire de f et g ?

EXERCICE 2.1.6. I C

Soit P une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs (i.e. $p_{ij} > 0$ et $\forall i \in [1, n], \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$).

- (1) Montrer que 1 est valeur propre de P et que E_1 le sous-espace propre associé est de dimension 1.
 - (2) Pour tout valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de P , on a $|\lambda| \leq 1$.
 - (3) Si λ est une valeur propre telle que $|\lambda| = 1$ alors $\lambda = 1$.
-

2.2. Polynôme caractéristique.

EXERCICE 2.2.1. F

Si $bc - a^2 \neq 0$ et $n \geq 3$, chercher le déterminant et les éléments propres de

$$A = \begin{pmatrix} c & a & \dots & a & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & b \\ a & \dots & a & c & b \\ c & \dots & c & c & c \end{pmatrix}$$

(on trouve $\det A = (-1)^{n+1}(a-c)^{n-2}[(n-1)b^2 - c^2 - (n-2)ac]$).

EXERCICE 2.2.2. I

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 4A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Déterminer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A .

EXERCICE 2.2.3. D

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par f_1, \dots, f_n les fonctions de A telles que le polynôme caractéristique P_A de A s'écrive :

$$P_A(x) = (-1)^n (x^n + f_1(A)x^{n-1} + \dots + f_{n-1}(A)x + f_n(A))$$

- (1) Montrer que, pour tout i de $[1, n]$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $f_i(A.B) = f_i(B.A)$.
 (2) Soit Φ une fonction polynôme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans \mathbb{C} telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \Phi(A.B) = \Phi(B.A).$$

Montrer que Φ est un polynôme en f_1, \dots, f_n . On utilisera la densité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables (cf. exercice 2.1.10 du chapitre 5) et on admettra que toute fonction polynomiale symétrique des racines d'une équation algébrique s'exprime comme fonction polynomiale des coefficients de cette équation.

2.3. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie.

EXERCICE 2.3.1. F

Diagonaliser :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad N = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1/2 & v/u & w/u \\ u/v & -1/2 & w/v \\ u/w & v/w & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la transformation associée à N ?

EXERCICE 2.3.2. F

La matrice $M = \begin{pmatrix} i & -1 & -i & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & -1 & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

EXERCICE 2.3.3. F

La matrice $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & \beta \\ \sin \theta & \cos \theta & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable sur \mathbb{R} , sur \mathbb{C} ?

EXERCICE 2.3.4. F

Trouver les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant pour vecteurs propres \vec{V}_1, \vec{V}_2 et $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ où \vec{V}_1 et \vec{V}_2 ont pour coordonnées $(1,1,2)$ et $(1,-1,0)$.

EXERCICE 2.3.5. F

Trouver la puissance $n^{\text{ième}}$ de $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2.3.6. F

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer qu'il existe 2 suites (α_n) et (β_n) définies à partir du rang 2 telles que :

$$\forall n \geq 2 \quad A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2.$$

Calculer α_n et β_n .

EXERCICE 2.3.7. F

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

- (1) Déterminer $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = MA\}$.
 - (2) Montrer que $E = \text{Vect}(I_3, A, A^2)$.
-

EXERCICE 2.3.8. F C

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on suppose que le polynôme caractéristique de A n'est pas scindé sur \mathbb{R} .

Démontrer qu'il existe $(a, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$ $\beta \neq 0$ tel que A soit semblable à $A' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2.3.9. F T

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & a & -a \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$ avec $a \neq 0$.

- (1) Étudier les éléments propres de A .
 - (2) Montrer qu'il existe 3 vecteurs v_1, v_2, v_3 de K^3 tels que $Av_1 = -v_1$, $Av_2 = -v_2 + v_1$, $Av_3 = -v_3 + v_2 + v_1$.
 - (3) En déduire A^n .
-

EXERCICE 2.3.10. F

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{l} 1 \quad X^2 + X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 2 \quad X^3 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}. \end{array}$$

EXERCICE 2.3.11. F

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!}$ en fonction de I_3 et A (on utilisera la relation $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x$, cf. exemples de D.S.E. page 285).

EXERCICE 2.3.12. I

Soit E un \mathbb{C} -e.v. de dimension n , $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'application

$$T_f : g \in \mathcal{L}(E) \mapsto f \circ g - g \circ f \in \mathcal{L}(E).$$

Montrer que, si f est diagonalisable, T_f est diagonalisable.

EXERCICE 2.3.13. I C

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ deux matrices diagonalisables.

On pose $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \gamma I_n \\ \beta I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$.

Calculer BC et CB .

Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha A & \gamma A \\ \beta A & \delta A \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

EXERCICE 2.3.14. I

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$, on définit $\varphi : g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E) \mapsto f \circ g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.

- (1) Montrer que (λ valeur propre de f) \Rightarrow (λ valeur propre de φ).
 - (2) Chercher la dimension de $E_{\lambda}(\varphi)$ en fonction de celle de $E_{\lambda}(f)$.
 - (3) Que dire si f est diagonalisable ? Préciser, dans une bonne base, la matrice obtenue pour φ .
-

EXERCICE 2.3.15. I C

E est un K -e.v. de dimension n , U une partie non vide de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant :

- (1) $\forall f \in U$, f est diagonalisable,
- (2) $\forall (f, g) \in U^2$, $f \circ g = g \circ f$.

Montrer qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à tous les f de U .

EXERCICE 2.3.16. I C

Soient E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension n , f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer qu'il existe une base dans laquelle f et g sont simultanément trigonalisables.

EXERCICE 2.3.17. I

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $MA = AM$.

Montrer que $\det(M + A) = \det M$.

L'hypothèse $AM = MA$ est-elle indispensable ?

EXERCICE 2.3.18. D

Soient E un \mathbb{R} -e.v. de dimension $n \geq 2$, f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$(1) \quad f \circ g - g \circ f = f$$

(1) Montrer que f est nilpotent.

(2) Si $\dim \text{Ker } f = 1$, que peut-on dire de $\dim \text{Ker } f^k$?

(3) On suppose que $\dim \text{Ker } f = 1$ et que g est diagonalisable. Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres de g .

EXERCICE 2.3.19. F C

Si A et B sont 2 matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent, on sait que $\exp(A+B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$ (cf. proposition 8.1.2 page 298).

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cdot & \cdot \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer $\exp(M)$ à l'aide de $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et I_n .

Indication 1.1.1 Prendre F un sous-espace stable, $F \not\subset D$ puis montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que $e_i - e_j \in F$.

Indication 1.1.2 On montre que les sous-espaces stables par u sont $\{0\}$, $\text{Ker } u$, $\text{Im } u$, \mathbb{R}^3 .

Indication 1.1.3 Poser $f : X \in \mathbb{R}^3 \mapsto X^T A \in \mathbb{R}$, $g : X \in \mathbb{R}^3 \mapsto X^T (M^T A) \in \mathbb{R}$ et s'intéresser aux noyaux de ces formes linéaires.

Indication 2.1.1 Exprimer la matrice de L dans une bonne base (et non la base canonique).

Indication 2.1.2 Distinguer les cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$ puis résoudre l'équation différentielle.

Indication 2.1.3 En permutant les colonnes de A on trouve $\det A = 1$ puis $\det S = \pm 1$. Il est alors immédiat que S^{-1} et S^T sont semblables. Si λ est valeur propre de S alors $1/\lambda$ est aussi valeur propre de S .

Indication 2.1.4 Si λ est une valeur propre et si $x = (x_i)$ est un vecteur propre associé écrire que $\forall i \in [1, n]$, $(a_{ii} - \lambda)x_i = -\sum_{j \neq i} a_{ij}x_j$. puis choisir i_0 tel que $|x_{i_0}| = \sup_{j \in [1, n]} |x_j|$.

Indication 2.1.5 On prouve qu'une C.N.S. pour que $f \circ g = g \circ f$ est que f et g ont même axe.

Indication 2.1.6

(1) 1 vap de P est immédiat puis prendre v de composantes v_i et i_0 l'indice tel que $v_{i_0} = \max |v_i|$

(2) Prendre la norme du sup.

(3) Soit λ une valeur propre de P de module 1, x un vecteur propre associé de norme 1, se ramener au cas où $\sum_{j=1}^n p_{kj}x_j = 1 = \sum_{j=1}^n p_{kj}$.

On obtient alors $\sum_{j=1}^n p_{kj}(1-x_j) = 0$ et en prenant la partie réelle on prouve que $\Re(x_i) = 1$ pour tout i .

Indication 2.2.1 On retranche la colonne $i-1$ de la colonne i pour i prenant successivement les valeurs $n, n-1, \dots, 1$ et on développe par rapport à la dernière ligne. A est diagonalisable car la somme de ses sous-espaces propres est \mathbb{K}^n .

Indication 2.2.2 Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et s'en servir pour diagonaliser M par blocs.

Indication 2.2.3

- (1) On prouve que $P_{A.B} = P_{B.A}$.
- (2) Φ est invariant par similitude puis poser $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Phi(\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$ et montrer que Ψ est fonction des σ_i (fonctions symétriques élémentaires des λ_i) et utiliser un argument de densité.

Indication 2.3.1 Pour M , on résout l'équation $MX = \lambda X$ et on est ramené à une suite récurrente double. N admet -1 et 1 comme valeurs propres et on montre que N est la matrice d'une symétrie.

Indication 2.3.2 M est diagonalisable mais pas parce qu'elle est symétrique.

Indication 2.3.3 Si $\theta \neq 0[\pi]$ alors A n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} mais est diagonalisable sur \mathbb{C} .

Si $\theta = 0[2\pi]$ alors A est diagonalisable ssi $\alpha = \beta = 0$.

Si $\theta = \pi[2\pi]$ alors A est diagonalisable.

Indication 2.3.4 Après calculs $\begin{pmatrix} 1/6\lambda + 1/2\mu + 1/3\nu & 1/6\lambda - 1/2\mu + 1/3\nu & 1/3\lambda - 1/3\nu \\ 1/6\lambda - 1/2\mu + 1/3\nu & 1/6\lambda + 1/2\mu + 1/3\nu & 1/3\lambda - 1/3\nu \\ 1/3\lambda - 1/3\nu & 1/3\lambda - 1/3\nu & 2/3\lambda + 1/3\nu \end{pmatrix}$.

Indication 2.3.5 Diagonaliser A ou utiliser le binôme de Newton en écrivant $A = aJ + (1-a)I$ et on trouve $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(1-a)^n + (2a+1)^n & (2a+1)^n - (1-a)^n & (2a+1)^n - (1-a)^n \\ (2a+1)^n - (1-a)^n & 2(1-a)^n + (2a+1)^n & (2a+1)^n - (1-a)^n \\ (2a+1)^n - (1-a)^n & (2a+1)^n - (1-a)^n & 2(1-a)^n + (2a+1)^n \end{pmatrix}$.

Indication 2.3.6 Diagonaliser A ou utiliser le théorème de Cayley-Hamilton, on trouve $A^n = (2 - 2^{n-1})A + (2^{n-1} - 1)A^2$.

Indication 2.3.7 Diagonaliser A puis montrer que $\dim E = 3$ ou faire un raisonnement sur les endomorphismes.

Indication 2.3.8 Montrer que A est diagonalisable sur \mathbb{C} puis donner une réduction de A sur \mathbb{R} .

Indication 2.3.9 A n'est pas diagonalisable ($P_A(X) = -(1+X)^3$). Prendre ensuite $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0)$ et $v_3 = (1, 1/a, 0)$. Le calcul de A^n se fait dans la base (v_1, v_2, v_3) . On

trouve $A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -na & na \\ -n & 1 + \frac{n(n-1)}{2}a & -\frac{n(n-1)}{2}a \\ -n & \frac{n(n-1)}{2}a & 1 - \frac{n(n-1)}{2}a \end{pmatrix}$.

Indication 2.3.10 On diagonalise $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on se ramène au cas de matrices diagonales.

On trouve $X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

On fait de même avec l'autre équation, on trouve $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 4 - 2\omega & 2 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} \omega' & 0 \\ 4 - 2\omega' & 2 \end{pmatrix}$ où ω et ω' sont les racines de $x^2 + x - 1 = 0$.

Indication 2.3.11 On diagonalise A et on trouve finalement $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} = \text{ch } 2M + \text{ch } 4N = (2 \text{ch } 2 - \text{ch } 4)I_3 + \frac{1}{2}(\text{ch } 4 - \text{ch } 2)A$.

Indication 2.3.12 On trouve directement une base de vecteurs propres avec $u_{ij}(\sum_{k=1}^n x_k e_k) = x_j e_i$, (e_i) étant une base de vecteurs propres de f .

Indication 2.3.13 On fait un calcul matriciel par blocs, on obtient $BC = CB = M$ puis
$$\begin{pmatrix} r'P^{-1} & t'P^{-1} \\ s'P^{-1} & u'P^{-1} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} rP & tP \\ sP & uP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda D & 0 \\ 0 & \mu D \end{pmatrix}.$$

Indication 2.3.14

- (1) Prendre $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$ et g une projection sur $\text{Vect}(x)$.
- (2) Montrer que $E_\lambda(\varphi) \simeq \mathcal{L}(E, E_\lambda(f))$.
- (3) Si f est diagonalisable alors φ est diagonalisable.

Indication 2.3.15 On procède par récurrence sur $n = \dim E$.

Indication 2.3.16 On raisonne par récurrence sur n , on montre que f et g ont un vecteur propre commun et on s'inspire de la démonstration du théorème sur la trigonalisation.

Indication 2.3.17 Montrer la propriété dans le cas où M est inversible, trigonaliser $M^{-1}A$. Si M n'est pas inversible on prend une suite de matrices inversibles qui tend vers M .

L'hypothèse $AM = MA$ est indispensable, chercher un contre-exemple en dimension 2.

Indication 2.3.18

- (1) On montre par récurrence que $f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$ puis on raisonne par l'absurde avec $T : h \in \mathcal{L}(E) \mapsto h \circ g - g \circ h$.
- (2) On pose $N_k = \text{Ker}(f^k)$ et on montre que $\dim N_k = k$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- (3) Soient $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$ les valeurs propres de g , on prouve que $\lambda_1 = \lambda_2 - 1$. Si E_{λ_i} désigne le sous-espace propre de g , on prouve que $E_{\lambda_1} = \text{Ker } f$ puis $\dim f(E_{\lambda_i}) = \dim E_{\lambda_i}$ et on en déduit que $\dim E_{\lambda_i} = 1$.

Indication 2.3.19 On utilise la propriété $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$ avec $M = J - I_n$ et $\exp J = I_n + \frac{e^n - 1}{n} J$.

1. SOLUTIONS :

Solution 1.1.1 On remarque tout d'abord que $\{0\}$, D , H et \mathbb{R}^n sont stables par les u_σ .

Soit F un s.e.v. stable par u_σ ,

- si $F \subset D$ alors $F = \{0\}$ ou $F = D$;
- si $F \not\subset D$ alors $\exists a \in F \setminus D$ tel que : $a = \sum_{k=1}^n a_k e_k$ et $\exists i, j$ tels que $a_i \neq a_j$. Si τ est la transposition (i, j) alors $a - u_\tau(a) = (a_i - a_j)(e_i - e_j) \in F$ i.e. $(e_i - e_j) \in F$.

Comme $u_\sigma(a) \in F$ pour toute permutation σ , on en déduit que l'on peut reprendre le raisonnement précédent avec les couples (h, n) de $[1, n]^2$. On a donc $\forall h \in [1, n]$, $e_h - e_n \in F$. La famille $(e_h - e_n)_{h \leq n-1}$ est une famille libre de vecteurs de H (immédiat avec une combinaison linéaire) comme $\dim H = n - 1$, c'est donc une base de H par conséquent $H \subset F$. Il ne restera que deux possibilités pour F : $F = H$ ou $F = \mathbb{R}^n$.

Conclusion : les sous-espaces stables par tous les u_σ sont : $\{0\}$, D , H et \mathbb{R}^n .

Solution 1.1.2 Soit e_3 un vecteur tel que $u^2(e_3) \neq 0$, on pose $e_2 = u(e_3)$ et $e_1 = u^2(e_3)$. La famille (e_1, e_2, e_3) est une base de E (vérification immédiate). Dans cette base, u admet la

matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si F est un sous-espace stable de dimension 1 alors il est nécessairement engendré par un vecteur propre et comme 0 est la seule valeur propre de u (u est nilpotent) les vecteurs propres de F sont dans le noyau de u . Comme $\text{Ker } u$ est de dimension 1 (la matrice de u est de rang 2) alors $F = \text{Im } u$.
- Si F est un sous-espace stable de dimension 2 alors soit $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ l'équation de F . Si x est le vecteur de coordonnées (x_1, x_2, x_3) alors $u(x)$ a pour coordonnées $(x_2, x_3, 0)$ et doit vérifier $a_1 x_2 + a_2 x_3 = 0$ (car $u(F) \subset F$) et $a_1 x_3 = 0$ (car $u^2(F) \subset F$). Si $a_1 \neq 0$ alors $x_3 = 0$ et en reportant dans les 2 équations précédentes, on trouve $x_2 = x_1 = 0$ ce qui est impossible (dans ce cas $F = \{0\}$). On a donc $a_1 = 0$. De même on trouve $a_2 = 0$ donc l'équation de F est $x_3 = 0$ i.e. $F = \text{Im } u$.

Conclusion : les sous-espaces stables par u sont $\{0\}$, $\text{Ker } u$, $\text{Im } u$, \mathbb{R}^3 .

Solution 1.1.3 On identifie \mathbb{R}^3 et l'ensemble des matrices unicolonnes, on fait de même avec u et M .

Soit $f : X \in \mathbb{R}^3 \mapsto X^T A \in \mathbb{R}$, $g : X \in \mathbb{R}^3 \mapsto X^T (M^T A) \in \mathbb{R}$ et H le plan d'équation $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$. $\text{Ker } f = H$, et si $X \in H$ alors $MX \in H$ donc $f(MX) = 0 = g(X)$ ce qui donne $H \subset \text{Ker } g$. On a deux situations :

- Soit $\text{Ker } g = \mathbb{R}^3$ et donc $M^T A = 0$, A est bien vecteur propre de M^T (associé à la valeur propre 0).
- Soit $\text{Ker } g = H$ et donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $g = \lambda f$ (cf. *théorème 2.9 page 183*) d'où $M^T A = \lambda A$ A est bien vecteur propre de M^T .

Réciproque évidente : en effet, si $M^T A = \lambda A$ alors, comme $X \in H \Leftrightarrow X^T A = 0$ on a

$$(MX)^T A = X^T M^T A = \lambda X^T A = 0$$

donc $MX \in H$.

Solution 2.1.1 La première idée ici est d'écrire la matrice de L dans la base canonique de E , de chercher les valeurs propres avec le polynôme caractéristique mais les calculs risquent d'être laborieux. Il vaut mieux se poser la question : dans quelle base l'expression de L risque-t-elle

d'être la plus simple ? À partir de là, il semble naturel de penser à la base (e_0, \dots, e_n) où $e_k = (X - \alpha)^k$. Bingo ! on obtient $L(e_0) = 0$, $L(e_1) = 0$ et $L(e_k) = (k - 2)e_k$ pour $k \geq 2$ ce qui fournit effectivement les éléments propres de L .

Solution 2.1.2

- Si $\alpha = 0$, $f(P) = \beta P'$ et en raisonnant sur les degrés, on trouve que les seuls vecteurs propres sont les polynômes constants.
- Si $\alpha \neq 0$, on pose $Q = (\alpha X + \beta)P$ et dans ce cas, l'équation $[(\alpha X + \beta)P]' = \lambda P$ est équivalente à $(\alpha X + \beta)Q' = \lambda Q$.

On résout cette équation différentielle qui donne les solutions $Q(x) = (\alpha x + \beta)^\lambda$. On cherche alors les solutions polynomiales pour P et on trouve finalement que f admet $n + 1$ valeurs propres $\lambda_k = \alpha(k + 1)$ $k \in [0, n]$ associée aux vecteurs propres $(\alpha X + \beta)^k$.

Solution 2.1.3 On a $\det A = 1$ car, si on permute les colonnes de A avec la permutation

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & \dots & 2n \\ n & n+1 & \dots & 2n & 1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

alors on obtient la matrice $B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{pmatrix}$. $\det B = (-1)^n$ et $\varepsilon(p) = (-1)^n$ (signature de p) donc $\det A = 1$.

On utilise ensuite la formule $\det S^T A S = \det S^T \det A \det S = \det A$ d'où $\det S \in \{-1, +1\}$ donc S est inversible.

Puis, comme $A^{-1} S^T A = S^{-1}$, S et S^{-1} ont même polynôme caractéristique (c'est une propriété des déterminants, cf. *remarque 8.5.3 page 158*) et donc, si λ est valeur propre alors $1/\lambda$ est valeur propre.

Solution 2.1.4 Si λ est une valeur propre et si $x = (x_i)$ est un vecteur propre associé alors :

$$\forall i \in [1, n], (a_{ii} - \lambda)x_i = - \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j.$$

On choisit i_0 tel que $|x_{i_0}| = \sup_{j \in [1, n]} |x_j|$ alors

$$|a_{i_0 i_0} - \lambda| |x_{i_0}| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| |x_j| \leq \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| |x_{i_0}|$$

donc, en simplifiant par $|x_{i_0}| \neq 0$ on obtient

$$\lambda \in \overline{B} \left(a_{i_0 i_0}, \sum_{j \neq i_0} |a_{i_0 j}| \right) \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{B} \left(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right).$$

Pour $E \cap E'$ on écrit que A et A^T ont même polynôme caractéristique (cf. *remarque 3.2.3 page 192*) et on raisonne avec A^T .

Solution 2.1.5 Vu les contraintes imposées à f et g , la seule valeur propre réelle de f et g est 1. Comme f et g commutent, leurs sous-espaces propres sont stables (cf. *proposition 3.2.3 page 190*).

On arrive donc à la conclusion que f et g ont même axe.

Ceci est bien une C.N.S. en effet, si on prend la base orthonormée (e_1, e_2, e_3) où e_1 est le vecteur

propre commun à f et g alors les matrices de f et g s'écrivent $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ où R est une matrice de rotation d'ordre 2. Comme les rotations vectorielles forment un groupe commutatif, f et g commutent.

Solution 2.1.6

(1) On voit immédiatement que le vecteur u de composantes 1 est vecteur propre.

Soit maintenant v un vecteur propre associé à la valeur propre 1, on a $v_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}v_j$.

Comme $v \neq 0$ soit i_0 l'indice tel que $v_{i_0} = \max |v_i|$ (on a éventuellement changé le signe). Alors :

$$v_{i_0} = \sum_{j=1}^n p_{i_0j}v_j \leq v_{i_0}$$

l'égalité n'ayant lieu que si tous les v_i sont égaux à v_{i_0} . On a donc $v = \lambda u$ ce qui prouve que $v = \mu u$ i.e. E_1 est de dimension 1.

(2) Avec la norme du sup : $\|x\| = \sup |x_i|$, alors, si λ est valeur propre, $\lambda x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}x_j$ donne

$$|\lambda| \cdot |x_i| \leq \sum_{j=1}^n p_{ij} \|x\| = \|x\|$$

pour tout i , en particulier lorsque $|x_i| = \|x\|$ d'où $|\lambda| \cdot \|x\| \leq \|x\| \neq 0$ donc $|\lambda| \leq 1$.

(3) Soit λ une valeur propre de P de module 1, x un vecteur propre associé de norme 1.

On sait que $\|Px\| = 1$ et donc il existe $k \in [1, n]$ tel que $\left| \sum_{j=1}^n p_{kj}x_j \right| = 1$. En multipliant au besoin par $e^{i\theta}$ (où $\theta = -\text{Arg}(x_k)$), on se ramène au cas où $\sum_{j=1}^n p_{kj}x_j = 1 = \sum_{j=1}^n p_{kj}$.

On obtient alors $\sum_{j=1}^n p_{kj}(1-x_j) = 0$ et en prenant la partie réelle on prouve que $\Re(x_i) = 1$ pour tout i . En effet $1 - \Re(x_j) \geq 0$ car $\Re(x_j) \leq |x_j| \leq 1$ donc $\sum_{j=1}^n p_{kj}(1 - \Re(x_j)) = 0$ est une somme de termes positifs, de somme nulle donc $\Re(x_j) = 1$ pour tout j . Or $\Re(x_j)^2 + \text{Im}(x_j)^2 = 1$ donc $\text{Im} x_j = 0$ soit $x_j = 1$ pour tout j .

Conclusion : $x = u$ et $\lambda = 1$.

Solution 2.2.1 On retranche la colonne $i - 1$ de la colonne i pour i prenant successivement les valeurs $n, n - 1, \dots, 1$ et on développe par rapport à la dernière ligne. Pour avoir le polynôme caractéristique on remplace c par $c - \lambda$ d'où les racines du polynôme caractéristique $c - a$ et $\lambda_\varepsilon = c - a + \frac{1}{2}[na + \varepsilon\sqrt{(n-2)^2a^2 + 4(n-1)b^2}]$ (ou $\varepsilon = \pm 1$).

La recherche des vecteurs propres associés à $c - a$ donne les équations

$$\begin{aligned} c(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + bx_n &= 0 \\ a(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) + ax_n &= 0 \end{aligned}$$

soit $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = 0$ et $x_n = 0$. L'espace propre associé est de dimension $n - 2$ (cf. corollaire 2.12 page 184).

Les deux autres valeurs propres sont distinctes et leur sous-espace propre est de dimension 1. En faisant les calculs, on obtient en conclusion

- $c - a$: valeur propre associée aux vecteurs propres $e_i - e_1$ $i \in [2, n - 1]$.

- $\lambda_\varepsilon = c - a + \frac{1}{2}[na + \varepsilon\sqrt{(n-2)^2a^2 + 4(n-1)b^2}]$: valeur propre associée au vecteur propre $(1, \dots, 1, \frac{(n-1)b}{\lambda_\varepsilon - c})$.

On sait alors (cf. *proposition 3.2.11 page 193*) que A est diagonalisable.

Solution 2.2.2 On a $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (diagonalisation de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et si on pose $P = \begin{pmatrix} 2I_n & 2I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ ($P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} I_n & -2I_n \\ I_n & 2I_n \end{pmatrix}$) alors

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & 3A \end{pmatrix}$$

d'où $P_M(X) = \det \begin{pmatrix} -A - xI_n & 0 \\ 0 & 3A - xI_n \end{pmatrix} = (-3)^n P_A(-X) P_A(X/3)$.

Solution 2.2.3

- (1) Il suffit en fait de prouver que $P_{A.B} = P_{B.A}$, on utilise pour cela l'identité

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -xI_n & -B \\ 0 & AB - xI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B.A - xI_n & -B \\ 0 & -xI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$$

(cf. *question (i) page 193*) on utilise ensuite l'unicité de l'écriture d'un polynôme. On a donc

$$x^n + f_1(AB)x^{n-1} + \dots + f_n(AB) = x^n + f_1(BA) + \dots + f_n(BA)$$

d'où, par unicité de l'écriture d'un polynôme, $f_i(AB) = f_i(BA)$ pour tout i .

- (2) On sait que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (cf. exercice 2.1.10).

Si $\Phi(A.B) = \Phi(B.A)$ alors $\Phi(P^{-1}.A.P) = \Phi(A)$ donc Φ est invariant par similitude. Il en est de même des fonctions f_i . On se ramène donc à l'étude du cas des matrices diagonales.

Soit $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ le polynôme $\Phi(\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$ alors, comme $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\text{Diag}(\lambda_{\tau_1}, \dots, \lambda_{\tau_n})$ sont semblables (en effet, on passe de l'une à l'autre par permutation des vecteurs), Ψ est une fonction polynomiale en $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ symétrique, on sait alors que $\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Gamma(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ où Γ est un polynôme et σ_k sont les fonctions symétriques élémentaires des λ_i . On sait que $\sigma_i = (-1)^i f_i(A)$ où A est semblable à $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On a donc

$$\Phi(A) = \Gamma[-f_1(A), \dots, (-1)^n f_n(A)]$$

résultat qui se conserve par densité et continuité des applications polynomiales.

Solution 2.3.1

- Pour M : on cherche X et λ pour que $MX = \lambda X$ ce qui donne les équations :

$$x_k + (2 - \lambda)x_{k+1} + x_{k+2} = 0, \quad k \in [0, n-1]$$

où on pose $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et où on cherche λ pour que $x_{n+1} = 0$. On a une suite récurrence double de résolvante $r^2 + (2 - \lambda)r + 1 = 0$. On pose $\lambda = 2 + 2 \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$ (on pourrait aussi essayer $\lambda = 2 + 2 \text{ch } \theta$ mais cette transformation ne nous permet

pas de trouver ce que l'on cherche), les racines sont alors $r = e^{\pm i\theta}$ d'où l'expression de $x_k = \alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}$. Pour calculer α et β , on résout le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{i\theta} + \beta e^{-i\theta} = 1 \end{cases}$$

ce qui donne finalement $x_k = \frac{\sin k\theta}{\sin \theta}$ (formule valable même si $\theta = 0$). On veut alors $x_{n+1} = 0$ soit $\theta = \frac{p\pi}{n+1}$, $p \in [1, n]$. On trouve ainsi n valeurs propres distinctes, ce qui permet de diagonaliser M . On prendra les vecteurs propres suivants :

$$X_p = \begin{pmatrix} \sin \theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{pmatrix}$$

associés aux valeurs propres $\lambda_p = 2 + 2 \cos \theta_p$ où $\theta_p = \frac{p\pi}{n+1}$.

- N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ car -1 est valeur propre associé au vecteur propre $\begin{pmatrix} 1/u \\ 1/v \\ 1/w \end{pmatrix}$ et 1 est valeur propre associé au sous-espace propre $ux + vy + wz = 0$; c'est donc une symétrie vectorielle.

Solution 2.3.2 M bien que symétrique n'est pas nécessairement diagonalisable (le *corollaire 4.8 page 204* ne s'applique pas ici car M est une matrice à coefficients complexes).

$P_M(x) = (x - 2)^2(x - 2i)(x + 2)$; M sera diagonalisable ssi $\text{Rg}(M - 2I) = 2$ (cf. *proposition 3.2.11 page 193*). Dans $M - 2I$ on additionne la dernière ligne à toutes les autres et on trouve que le rang vaut 2.

Conclusion : M est bien diagonalisable.

Solution 2.3.3 On calcule le polynôme caractéristique : $P_A(X) = (1 - X)(X^2 - 2X \cos \theta + 1)$. On distingue alors plusieurs cas.

- Si $\theta \neq 0[\pi]$ alors A admet 1 comme seule valeur propre (simple). A n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} mais est diagonalisable sur \mathbb{C} (ses autres valeurs propres sont $e^{\pm i\theta}$).
- Si $\theta = 0[2\pi]$ alors A est diagonalisable ssi $\alpha = \beta = 0$ (1 est seule valeur propre et une matrice qui n'admet qu'une seule valeur propre n'est diagonalisable que si cette matrice est scalaire, conséquence immédiate de la *proposition 3.2.11 page 193*).
- Si $\theta = \pi[2\pi]$ alors A est diagonalisable (1 est valeur propre simple et -1 est valeur propre double).

Solution 2.3.4 Il s'agit des matrices PDP^{-1} où $D = \text{Diag}(\lambda, \mu, \nu)$ et P la matrice dont les vecteurs colonnes sont \vec{V}_1, \vec{V}_2 et $\frac{1}{2}\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$. On trouve après calculs

$$\begin{pmatrix} 1/6\lambda + 1/2\mu + 1/3\nu & 1/6\lambda - 1/2\mu + 1/3\nu & 1/3\lambda - 1/3\nu \\ 1/6\lambda - 1/2\mu + 1/3\nu & 1/6\lambda + 1/2\mu + 1/3\nu & 1/3\lambda - 1/3\nu \\ 1/3\lambda - 1/3\nu & 1/3\lambda - 1/3\nu & 2/3\lambda + 1/3\nu \end{pmatrix}$$

Solution 2.3.5

- Première démonstration : on diagonalise A . Avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2a+1 \end{pmatrix}$$

alors $A = PDP^{-1}$ et $A^n = PDP^{-1}$ d'où, après calculs...

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(1-a)^n + (2a+1)^n & (2a+1)^n - (1-a)^n & (2a+1)^n - (1-a)^n \\ (2a+1)^n - (1-a)^n & 2(1-a)^n + (2a+1)^n & (2a+1)^n - (1-a)^n \\ (2a+1)^n - (1-a)^n & (2a+1)^n - (1-a)^n & 2(1-a)^n + (2a+1)^n \end{pmatrix}.$$

- Deuxième démonstration : on utilise le binôme de Newton. On écrit $A = aJ + (1-a)I$ où J est la matrice remplie de 1.

$$A^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k (1-a)^{n-k} J^k = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n C_n^k (3a)^k (1-a)^{n-k} J + 3(1-a)^n I - (1-a)^n J \right)$$

car $J^k = 3^{k-1}J$ et $J^0 = I$. On en déduit alors que

$$A^n = \frac{1}{3} [(2a+1)^n J - (1-a)^n J + 3(1-a)^n I]$$

ce qui correspond bien au résultat obtenu précédemment.

Solution 2.3.6

- Première idée, on diagonalise : $P_A(X) = (1-\lambda)\lambda(\lambda-2)$ donc $A = P^{-1}DP$ où $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; on vérifie alors que $D^n = (2-2^{n-1})D + (2^{n-1}-1)D^2$ d'où

$$A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2 = (2-2^{n-1})A + (2^{n-1}-1)A^2.$$

- Deuxième idée, on utilise le théorème de Cayley-Hamilton (*théorème 3.6 page 192*), on a $A = A$, $A^2 = A^2$ et $A^3 = 3A^2 - 2A$ donc $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$ puis si $A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2$ alors

$$A^{n+1} = \underbrace{-2\beta_n}_{\alpha_{n+1}} A + \underbrace{(\alpha_n + 3\beta_n)}_{\beta_{n+1}} A^2$$

ce qui donne $\beta_{n+1} = 3\beta_n - 2\beta_{n-1}$ et donc $\beta_n = 2^{n-1} - 1$ et, comme $\alpha_n = -2\beta_{n-1}$, $\alpha_n = 2 - 2^{n-1}$.

- Troisième idée, on divise X^n par le polynôme caractéristique de A : $-X^3 + 3X - 2X$, $X^n = P_A(X)Q(X) + R(X)$ où $R(X) = aX^2 + bX + c$ est un polynôme de degré ≤ 2 . Comme $P_A(A) = 0$ alors $A^n = R(A)$ et pour calculer R , on utilise les valeurs propres de A : 0, 1, 2.

Il n'est pas nécessaire ici d'exprimer P_A .

Solution 2.3.7

- (1) On diagonalise A : $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{Diag}(0, -2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$ et $P = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} + 1 & -2\sqrt{2} + 1 \\ 0 & -\sqrt{2} - 1 & \sqrt{2} - 1 \\ 1 & 2\sqrt{2} + 2 & -2\sqrt{2} + 2 \end{pmatrix}$. Si on pose $M = PM'P^{-1}$ alors $AM = MA \Leftrightarrow DM' = M'D$ et comme D a ses trois valeurs propres distinctes, $M' = \text{Diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ (on peut faire le calcul...).

- (2) $\dim E = 3$ (engendré par PM_1P^{-1} , PM_2P^{-1} , PM_3P^{-1} où M_i est la matrice diagonale ayant un zéro en $i^{\text{ième}}$ position) et comme I, A, A^2 est une famille libre de E , on en déduit que $E = \text{Vect}(I, A, A^2)$.

Remarque : en fait, comme A a toutes ses valeurs propres simples, on pouvait faire un raisonnement sans calcul (ou presque). Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 ayant A pour matrice dans la base canonique. Les valeurs propres de u sont $0, -2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}$ (c'est là qu'il y a les calculs). Tout endomorphisme v tel que $u \circ v = v \circ u$ est diagonalisable dans la même base que u , en effet, les sous-espaces propres de u sont stables par v et sont de dimension 1 donc ils sont aussi sous-espaces propres de v . Si α, β, γ sont les valeurs propres de v , soit $P = a_0L_0 + a_1L_1 + a_2L_2$ où L_0, L_1, L_2 sont les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $0, -2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}$. On sait que l'on peut choisir les a_i tels que $P(0) = \alpha, P(-2 - \sqrt{2}) = \beta, P(-2 + \sqrt{2}) = \gamma$ (cf page 182). On en déduit que $v = P(u)$ et donc que $E = \mathbb{R}[u]$.

Solution 2.3.8 Si P_A n'est pas scindé sur \mathbb{R} , il n'admet pas de racines multiples sur \mathbb{C} donc A est diagonalisable sur \mathbb{C} . En effet, le polynôme P_A de degré trois sur \mathbb{R} , a toujours une racine réelle et ses deux autres racines sont nécessairement complexes conjuguées donc P_A a toutes ses racines simples.

Soit $a, \alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les valeurs propres de A associée à $(e_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ ($\varepsilon_3 = \bar{\varepsilon}_2$), il suffit alors de se placer dans la base $(e_1, \frac{1}{2i}(\varepsilon_2 - \varepsilon_3), \frac{1}{2}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3))$ (cf. *théorème 3.11 page 196*).

Solution 2.3.9

- (1) Le polynôme caractéristique de $A + I$ est $-X^3$ donc celui de A est $-(1 + X)^3$. Le sous-espace propre E_1 est l'espace vectoriel engendré par $v_1 = (0, 1, 1)$ (A n'est pas diagonalisable, cf. *remarque 3.2.4 (ii) page 194*).
- (2) On peut prendre $v_2 = (1, 0, 0)$ et $v_3 = (1, 1/a, 0)$.
- (3) Si $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $P^{-1}AP = B - I$ et

$$\begin{aligned} P^{-1}A^nP &= (-1)^n(I - B)^n \\ &= (-1)^n \left(I - nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2 \right) \end{aligned}$$

car $B^3 = 0$ donc $A^n = (-1)^n \left[I - n(A + I) + \frac{n(n-1)}{2}(A + I)^2 \right]$.

On obtient alors, pour tout n de \mathbb{Z} :

$$A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & -na & na \\ -n & 1 + \frac{n(n-1)}{2}a & \frac{-n(n-1)}{2}a \\ -n & \frac{n(n-1)}{2}a & 1 - \frac{-n(n-1)}{2}a \end{pmatrix}.$$

En fait, on pouvait écrire directement $A^n = (-1)^n[I - (A + I)]^n$ et utiliser la formule du binôme.

Solution 2.3.10

- (1) On diagonalise $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: $P^{-1}AP = \text{Diag}(0, 2)$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $Y = P^{-1}XP$ on se ramène à la résolution de $Y^2 + Y = D$. Comme $YD = DY$ on sait

que Y est diagonale. En effet, soit on fait le calcul, soit on utilise le fait que le commutant d'une matrice diagonalisable A dont toutes les valeurs propres sont distinctes est $\mathbb{K}[A]$ ensemble des polynômes matriciels en A (cf. exercice 2.3.7).

On obtient donc les solutions

$$Y_1 = \text{Diag}(0, 1), Y_2 = \text{Diag}(0, -2), Y_3 = \text{Diag}(-1, 1), Y_4 = \text{Diag}(-1, -2)$$

d'où finalement

$$X_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (2) De même, avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1}AP = \text{Diag}(-1, 4)$. On se ramène alors à la résolution de $Y^3 - 2Y = D$. On prouve aussi que Y est diagonale et on obtient les solutions suivantes pour Y :

$$Y_1 = \text{Diag}(1, 2), Y_2 = \text{Diag}(\omega, 2), Y_3 = \text{Diag}(\omega', 2)$$

où ω et ω' sont les racines de $x^2 + x - 1 = 0$. On obtient alors pour X :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 4 - 2\omega & 2 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} \omega' & 0 \\ 4 - 2\omega' & 2 \end{pmatrix}.$$

Solution 2.3.11 On vérifie que A est diagonalisable et que $P^{-1}AP = \text{Diag}(2, 2, 4)$ (par exemple). Vu que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \text{ch } x$, on aura

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} = P \text{Diag}(\text{ch } 2, \text{ch } 2, \text{ch } 4) P^{-1}.$$

Si on pose $M = P \text{Diag}(1, 1, 0) P^{-1}$, $N = P \text{Diag}(0, 0, 1) P^{-1}$, on vérifie que $M + N = I$, $2M + 4N = A$ d'où $M = 2I - A/2$, $N = A/2 - I$.

Conclusion :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} = \text{ch } 2M + \text{ch } 4N = (2 \text{ch } 2 - \text{ch } 4)I_3 + \frac{1}{2}(\text{ch } 4 - \text{ch } 2)A.$$

Solution 2.3.12 Exploisons directement l'hypothèse. Soit $(e_i)_{i \in [1, n]}$ une base de vecteurs propres de f , considérons la base $(u_{ij})_{(i, j) \in [1, n]^2}$ de $\mathcal{L}(E)$ où u_{ij} est l'application linéaire définie par : $u_{ij} \left(\sum_{k=1}^n x_k e_k \right) = x_j e_i$ (cf. *théorème 8.15 page 135*) ; alors

$$T_f(u_{ij}) = (\lambda_i - \lambda_j)u_{ij}$$

où λ_i est la valeur propre associée à e_i donc T_f est bien diagonalisable (cf. *proposition 3.2.10 page 193*).

Solution 2.3.13 On fait un calcul matriciel par blocs d'où $BC = CB = M$. On écrit ensuite que A et $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ sont diagonalisables :

$$P^{-1}AP = D \text{ et } \begin{pmatrix} r' & t' \\ s' & u' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ où } \begin{pmatrix} r' & t' \\ s' & u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix}^{-1}.$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} r'P^{-1} & t'P^{-1} \\ s'P^{-1} & u'P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha A & \gamma A \\ \beta A & \delta A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} rP & tP \\ sP & uP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda D & 0 \\ 0 & \mu D \end{pmatrix}$$

ce qui permet de dire que M est diagonalisable car $\begin{pmatrix} rP & tP \\ sP & uP \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r'P^{-1} & t'P^{-1} \\ s'P^{-1} & u'P^{-1} \end{pmatrix} = I_{2n}$ et donc M est semblable à une matrice diagonalisable.

Solution 2.3.14

- (1) Soit $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$ et g une projection sur $\text{Vect}(x)$ parallèlement à un hyperplan, alors, pour tout y de E , on a $f \circ g(y) = \lambda g(y)$ donc λ est une valeur propre de f (l'application g est bien sûr distincte de l'application nulle).
- (2) On a les équivalences suivantes :

$$(g \in E_\lambda) \Leftrightarrow (f \circ g = \lambda g) \Leftrightarrow (\forall x \in E, f(g(x)) = \lambda g(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, g(x) \in E_\lambda(f)).$$

Donc $E_\lambda(\varphi) \simeq \mathcal{L}(E, E_\lambda(f))$ (on fait correspondre à tout élément de $E_\lambda(\varphi)$ un élément de $\mathcal{L}(E, E_\lambda(f))$ par une application linéaire bijective) et par conséquent $\dim E_\lambda(\varphi) = n \dim E_\lambda(f)$ (en posant $n = \dim E$).

- (3) Si f est diagonalisable alors φ est diagonalisable. En effet

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(\varphi) = n \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda(f) = n^2$$

donc, grâce à la *proposition 3.2.11 page 193*, on peut conclure. Si $M_f = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alors $M_\varphi = \text{Diag}(\lambda I_n, \dots, \lambda_n I_n)$.

Solution 2.3.15 On procède par récurrence sur $n = \dim E$. Soit $P(n)$ la propriété :

Pour tout espace vectoriel E de dimension $\leq n$, pour toute partie non vide U de $\mathcal{L}(E)$ vérifiant (1) et (2), il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à tous les f de U .

- $P(1)$ est immédiate car toutes les bases conviennent.
- $P(n) \Rightarrow P(n+1)$: on distingue 2 cas
 - (i) U ne contient que des homothéties et dans ce cas $P(n+1)$ est vraie,

(ii) il existe $f \in U$ qui n'est pas une homothétie. On sait alors que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_p(f)$ où

les $E_p(f)$ désignent les sous-espaces propres de f .

On sait alors que $\forall g \in U, g(E_p(f)) \subset E_p(f)$ et $\dim E_p(f) \leq n$. On peut appliquer alors l'hypothèse de récurrence à tous les espaces $E_p(f)$ en prenant pour U_p la restriction de toutes les applications de U à $E_p(f)$. Les applications de U_p permutent et sont toutes diagonalisables (cf. *application (i) page 194*).

On prend une base dans chaque $E_p(f)$ formée de vecteurs propres communs à tous les éléments de U_p . On construit ainsi une base de E répondant à la question.

Solution 2.3.16 On raisonne par récurrence sur n ,

- pour $n = 1$, c'est évident.
- Montrons d'abord que f et g ont un vecteur propre commun : comme $f \circ g = g \circ f$ on en déduit que tout espace propre de f est stable par g (cf. *proposition 3.2.3 page 190*). Soit g_λ la restriction de g à E_λ sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ alors, tout comme f , g admet un vecteur propre e_1 dans E_λ qui est un vecteur propre commun à f et g .

La récurrence se fait alors de la même façon que celle qui permet de trigonaliser un

endomorphisme (cf. démonstration du *théorème 3.9 page 195*). On complète la famille (e_1) en une base, dans cette base les matrices de f et g s'écrivent

$$M(f) = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad M(g) = \begin{pmatrix} \mu & M \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

A et B sont des matrices d'ordre $n - 1$ qui commutent, on peut appliquer aux endomorphismes associés dans \mathbb{C}^{n-1} l'hypothèse de récurrence et conclure.

Solution 2.3.17

- Supposons dans un premier temps que M soit inversible.
On a $M + A = M(I_n + M^{-1}A)$, il suffit de prouver que $\det(I_n + M^{-1}A) = 1$. Or comme $AM = MA$, $M^{-1}A$ est nilpotente ($[M^{-1}A]^n = M^{-n}A^n = 0$), il existe donc une base dans laquelle l'endomorphisme u associé admettra une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale (en effet, en vertu du *théorème 3.9 page 195*, u est trigonalisable et sa seule valeur propre est 0). On alors $M^{-1}A = PTP^{-1}$ d'où

$$\det(I_n + M^{-1}A) = \det P \det(I_n + T) \det P^{-1} = \det(I_n + T) = 1$$

ce qui permet de conclure.

- Si M n'est pas inversible, 0 est valeur propre et, à partir d'un certain rang, $M + \frac{1}{p}I_n$ est inversible (l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cf. exercice 2.6 du chapitre 5 qui s'étend sans problème à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

On applique le résultat précédent à ces matrices et on passe à la limite.

Remarque : on peut se passer de topologie dans ce cas. En effet, comme M n'est pas inversible, on sait que $\dim \text{Ker } M \geq 1$ et que cet espace vectoriel est stable par A ($AM = MA$ et on utilise la *proposition 3.1.1 page 187*). Comme A est nilpotente, $A|_{\text{Ker } M}$ n'est pas injective donc $\text{Ker } A \cap \text{Ker } M \neq \{0\}$ et $A + M$ n'est pas inversible. On a alors $\det(A + M) = 0$.

Enfin, l'hypothèse $AM = MA$ est essentielle, prenons par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $\det M = 1$, $\det(M + A) = 0$.

Solution 2.3.18

- (1) On va montrer par récurrence sur k que $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$:
- C'est évidemment vrai pour $k = 1$.
 - Supposons donc que l'on ait $f^k \circ g - g \circ f^k = kf^k$, en composant à droite par f on a la relation

$$f^{k+1} \circ g - \underbrace{f \circ g}_{=g \circ f + f} \circ f^k = kf^{k+1}$$

$$\text{d'où } f^{k+1} \circ g - g \circ f^{k+1} = (k+1)f^{k+1}.$$

On considère maintenant $T : h \in \mathcal{L}(E) \mapsto h \circ g - g \circ h$, si f n'était pas nilpotente, T aurait une infinité de valeurs propres (k associé au vecteur propre $f^k \neq 0$) ce qui est absurde.

Conclusion : f est bien nilpotente.

- (2) On pose $N_k = \text{Ker}(f^k)$, montrons que $\dim N_k = k$ pour $k \in [1, n]$.
En effet, en considérant la restriction de v à $u(E)$, on prouve que

$$\text{Rg}(u) = \text{Rg}(v \circ u) + \dim(\text{Im } u \cap \text{Ker } v)$$

(formule du rang, cf. *théorème 8.19 page 136*) et donc

$$\dim \text{Ker}(v \circ u) = \dim \text{Ker } u + \dim(\text{Im } u \cap \text{Ker } v)$$

pour tout couple (u, v) d'applications linéaires. On en déduit que (en prenant $(u, v) = (f^k, f)$)

$$\dim \text{Ker } f^{k+1} = \dim \text{Ker } f^k + \dim(\text{Im } f^k \cap \text{Ker } f).$$

Grâce à l'égalité ci-dessus, on a $\dim \text{Ker } f^{k+1} \leq \dim \text{Ker } f^k + 1$ ($\dim \text{Ker } f = 1$). Donc $\dim \text{Ker } f^k \leq k$ par une récurrence évidente. Or $f^n = 0$ entraîne que $\dim \text{Ker } f^n = n$ donc toutes les inégalités sont des égalités (si $\dim \text{Ker } f^k < k$ alors $\dim \text{Ker } f^n < n$ ce qui est impossible).

On peut donc conclure que $\dim \text{Ker } f^k = k$.

- (3) Soit E_λ un sous-espace propre de g , $x \in E_\lambda$ alors $g(f(x)) = f(g(x)) - f(x) = (\lambda - 1)f(x)$ donc $f(E_\lambda) \subset E_{\lambda-1}$ (il se peut que $E_{\lambda-1} = \{0\}$ si $\lambda - 1$ n'est pas valeur propre de g).

Soient $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$ les valeurs propres de g , prouvons que $\lambda_1 = \lambda_2 - 1$:

en effet, si $\lambda_1 \neq \lambda_2 - 1$ alors $\lambda_1 - 1$ et $\lambda_2 - 1$ ne sont pas valeurs propres de g donc $f(E_{\lambda_1}) = \{0\}$ et $f(E_{\lambda_2}) = \{0\}$ i.e. $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \subset \text{Ker } f$ ce qui est en contradiction avec $\dim \text{Ker } f = 1$.

On prouve de même que $\lambda_i = \lambda_{i+1} - 1$.

On sait que $f(E_{\lambda_1}) = \{0\}$ donc $E_{\lambda_1} = \text{Ker } f$; $f|_{E_{\lambda_i}}$ est injective pour $i \geq 2$ car E_{λ_i} est contenu dans $\bigoplus_{j \geq 2} E_{\lambda_j}$ qui est un supplémentaire de $E_{\lambda_1} = \text{Ker } f$. Puis $\dim f(E_{\lambda_i}) = \dim E_{\lambda_i}$ i.e. $\dim E_{\lambda_{i-1}} \geq \dim f(E_{\lambda_i}) \geq \dim E_{\lambda_i}$ et comme $\dim E_{\lambda_1} = 1$ et $\dim E_{\lambda_i} \geq 1$, on en déduit que $\dim E_{\lambda_i} = 1$ c.q.f.d.

Solution 2.3.19 On peut envisager de prouver la propriété $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$ avec les séries (en débordant légèrement du programme). Les séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!}$ sont

absolument convergentes, on peut faire leur produit de Cauchy : $\exp A \cdot \exp B = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n$ où

$$C_n = \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(A+B)^n}{n!} \text{ car } A \text{ et } B \text{ commutent et donc } \exp A \cdot \exp B = \exp(A+B).$$

On a $M = J - I_n$ d'où, en utilisant la propriété ci-dessus, $\exp M = \exp J \cdot \exp(-I_n)$. Or $J^2 = nJ$ donc, par une récurrence immédiate, $J^p = n^{p-1}J$ ce qui permet de calculer

$$\begin{aligned} \exp J &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{J^p}{p!} = I + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{n^{p-1}}{p!} J \\ &= I_n + \frac{1}{n}(e^n - 1)J. \end{aligned}$$