

ESPACES EUCLIDIENS ET PRÉHILBERTIENS

1. ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

1.1. Formes bilinéaires symétriques.

EXERCICE 1.1.1. F

Dans $\mathbb{R}^n$, on définit $q(x) = \sum_{i,j} b_{ij} x_i x_j$ avec $b_{ij} = \int_a^b f_i(t) f_j(t) dt$ où $(f_i)_{i \in [1,n]}$ est une famille libre de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
 q est-elle définie positive ?

EXERCICE 1.1.2. I

Soit q la forme quadratique $q(x) = \sum_{(i,j) \in [1,4]^2} \text{ch}(a_i - a_j) x_i x_j$ où $(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$.
Montrer que $q = f.g$ où f et g sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$.

EXERCICE 1.1.3. D C

Soit E un e.v. sur $\mathbb{R}$, soit $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant
(i) $\forall (x, y) \in E^2, q(x+y) + q(x-y) = 2q(x) + 2q(y)$,
(ii) $\forall (x, y) \in E^2, \varphi : \lambda \mapsto \varphi(\lambda) = q(x + \lambda y)$ est continue.
Prouver que l'application $f : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)]$ est une forme bilinéaire symétrique sur E .

EXERCICE 1.1.4. I T

Soit $q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$.

Montrer que q est définie positive ssi $a_{11} > 0, \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} > 0$

1.2. Produit scalaire.

EXERCICE 1.2.1. F

Soit F la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{p=1}^n \left(x_p + \frac{1}{p+1} (x_{p+1} + \dots + x_n) \right)^2.$$

Montrer que F est associé à un produit scalaire G . Chercher une base orthonormale pour G .

EXERCICE 1.2.2. I C

Si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, montrer que la matrice $B = A^T A$ est définie positive (i.e. la forme quadratique associée est définie positive).

Réciproquement : si B est une matrice symétrique définie positive, montrer que :

$$\exists A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) : B = A^T A.$$

EXERCICE 1.2.3. F T

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\varphi : (P, Q) \in E^2 \mapsto P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t) dt$.

- (1) Montrer que φ est un produit scalaire (que l'on note $(P|Q)$ par la suite).
 - (2) Trouver une base orthonormale de E en appliquant le procédé de Schmidt à la base canonique.
-

1.3. Orthogonalité.

EXERCICE 1.3.1. F

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E .

Montrer que $E = F \oplus F^\perp$.

EXERCICE 1.3.2. I

Cet exercice utilise les résultats du chapitre 5 sur les espaces vectoriels normés.

Dans un espace préhilbertien, on dit qu'une famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de vecteurs est totale ssi pour tout vecteur x de E , il existe une suite $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x - \sum_{p=0}^n x_p e_p\| = 0$.

Montrer qu'une famille orthonormale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale ssi pour tout couple (x, y) de vecteurs de E , la série $\sum (x|e_n)(y|e_n)$ est convergente et a pour somme $(x|y)$.

EXERCICE 1.3.3. I

Cet exercice utilise les résultats du chapitre 5 sur les espaces vectoriels normés.

Soit E un espace préhilbertien tel que $E = F \oplus G$, la somme étant directe orthogonale.

Prouver que F et G sont fermés et que $F^\perp = G$, $G^\perp = F$.

EXERCICE 1.3.4. F

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (1) Montrer que $(A, B) \mapsto \text{Tr}(AB^T)$ est un produit scalaire (que l'on note par la suite $(A|B)$).
 - (2) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques, déterminer $\mathcal{S}^\perp$.
 - (3) Soit $A = (a_{ij}) \in E$, calculer $\min_{M \in \mathcal{S}} \sum_{i,j} (a_{ij} - m_{ij})^2$ où $M = (m_{ij})$.
-

2. ESPACES EUCLIDIENS

2.1. Bases orthonormales.

 EXERCICE 2.1.1. F

Soient a et b deux vecteurs d'un espace euclidien E , on définit $a \otimes b$ par $(a \otimes b)(x, y) = (a.x).(b.y)$ où $.$ désigne le produit scalaire dans E . $a \otimes b$ est une forme bilinéaire, et par abus de langage, on note de même $a \otimes b$ l'application linéaire définie par

$$\forall x \in E, y \mapsto (a \otimes b)(x, y) = x.[(a \otimes b)(y)].$$

- (1) Si $A = (a_i)$ et $B = (b_i)$ désignent les matrices des coordonnées de a et b dans une base orthonormée, donner la matrice de l'application linéaire $a \otimes b$.
- (2) Caractériser l'application linéaire $h = id_E - 2a \otimes a$ où $\|a\| = 1$.

2.2. Projections orthogonales.

 EXERCICE 2.2.1. D

Cet exercice utilise les résultats du chapitre 5 sur les espaces vectoriels normés (cf. pages 217..256).

Soit E un espace préhilbertien réel.

- (1) Pour x et y de E , vérifier que $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.
- (2) Soit C une partie de E , convexe et complète (cf. définition 5.1.35 page 233). Montrer que, pour tout x de E , il existe un et un seul $p(x)$ dans C tel que :

$$\forall y \in C, \|x - y\| \geq \|x - p(x)\|.$$

- (3) Si C est un sous-espace vectoriel de E complet (que l'on notera F), montrer que, pour tout y de F , $(x - p(x)|y) = 0$. En déduire la nature de p .
- (4) Dans le cas général (i.e. C convexe et complet), montrer que, pour tout (x, z) de E^2 , $\|x - z\| \geq \|p(x) - p(z)\|$.

 EXERCICE 2.2.2. I

Soit E un espace euclidien et p, q 2 projecteurs orthogonaux de E .

- (1) a) Montrer l'équivalence

$$p \circ q \text{ est un projecteur orthogonal} \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p.$$

- b) Si $p \circ q$ est un projecteur orthogonal, montrer que $\text{Im}(p \circ q) = \text{Im } p \cap \text{Im } q$ et que $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker } p + \text{Ker } q$.

- (2) a) Montrer l'équivalence

$$p + q - p \circ q \text{ est un projecteur orthogonal} \Leftrightarrow p \circ q = q \circ p.$$

- b) Si $p + q - p \circ q$ est un projecteur orthogonal, montrer que $\text{Im}(p + q - p \circ q) = \text{Im } p + \text{Im } q$.

 EXERCICE 2.2.3. I

Soit p et q 2 projecteurs orthogonaux de E euclidien. On définit la relation d'ordre sur $\mathcal{L}(E)$ par

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in E, ((g - f)(x)|x) \geq 0.$$

Montrer l'équivalence des propositions :

- (1) $p - q$ est un projecteur orthogonal,
 - (2) $p \leq q$,
 - (3) $\text{Im } p \subset \text{Im } q$,
 - (4) $q \circ p = p$,
 - (5) $p \circ q = p$,
 - (6) $q \circ p + p \circ q = 2p$.
-

2.3. Adjoint d'un endomorphisme.

EXERCICE 2.3.1. F

Soit $E = \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

- (1) Montrer que $(X|Y) = \text{Tr}(X^T Y)$ définit un produit scalaire sur E .
 - (2) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et $f : X \in E \mapsto AX - XB \in E$. Trouver l'adjoint de f .
-

2.4. Réduction des endomorphismes autoadjoints.

EXERCICE 2.4.1. F

Chercher une b.o.n. de vecteurs propres pour la matrice : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2.4.2. F

Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n , A étant à valeurs propres strictement positives.

Montrer que le polynôme caractéristique de $A^{-1}B$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2.4.3. F T

Réduire dans le groupe orthogonal la forme :

$$q(x) = -2x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_3x_1.$$

EXERCICE 2.4.4. F C

Soit E e.v. euclidien de dimension n , $f \in E, \ell \in \mathcal{L}(E)$ tels que la forme $B(u, v) = (\ell(u)|v)$ soit symétrique, définie positive.

Minimiser le rapport : $(\ell(v)|v)/(v|f)^2$.

EXERCICE 2.4.5. F C

Soit A une matrice symétrique d'ordre n dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (avec leurs ordres de multiplicité).

Montrer que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2$$

si $A = (a_{ij})$.

EXERCICE 2.4.6. I C

- (1) Soit A une matrice symétrique positive et $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Montrer que tout vecteur propre de A^k est un vecteur propre de A (considérer une base de vecteurs propres de A^k).
 - (2) Soient A et B deux matrices symétriques positives, montrer que : $A^k = B^k \Rightarrow A = B$.
-

EXERCICE 2.4.7. I C

Soit A une matrice symétrique définie positive et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de A (où chaque e_i est associé à la valeur propre λ_i). Si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base (e_i) , on pose :

$$\ln(A) = P\Lambda P^{-1}$$

où $\Lambda = \text{Diag}(\ln \lambda_1, \dots, \ln \lambda_n)$.

- (1) Montrer que cette définition est indépendante du choix de la base (e_i) . $\ln A$ est-elle une matrice symétrique ?
 - (2) Montrer que $\exp(\ln A) = A$ et que, si B est symétrique, $\ln(\exp B) = B$. Calculer $\ln(A_1 A_2)$ lorsque $A_1 A_2 = A_2 A_1$, A_1, A_2 étant symétriques définies positives.
 - (3) Si $M \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $A = M^T M$ est définie positive, on pose $Q = \exp(\frac{1}{2} \ln A)$. Montrer que $H = MQ^{-1}$ est orthogonale.
 - (4) Montrer que la décomposition $M = HQ$ (H orthogonale, Q symétrique définie positive) est unique.
-

EXERCICE 2.4.8. I

Soient A et B deux matrices symétriques réelles dont les valeurs propres sont ≥ 0 (resp. > 0). Montrer que $\text{Tr}(AB) \geq 0$ (resp. > 0).

EXERCICE 2.4.9. I

Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives. Si α et β sont les valeurs propres les plus grandes de A et B , montrer que la plus grande des valeurs propres de $A + B$ est inférieure ou égale à $\alpha + \beta$ (de même pour les plus petites valeurs propres).

Étudier les valeurs propres de $(I - \lambda A)(I + \lambda A)^{-1}$ si $\lambda > 0$.

EXERCICE 2.4.10. I Transformée de Legendre-Fenchel.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, positive, on définit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ par :

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, g(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} ((x|y) - \frac{1}{2}(Ax|x))$$

(On a identifié $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et on a noté $(x|y)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$)

- (1) Si A est inversible, montrer que $g(y) = \frac{1}{2}(A^{-1}y|y)$,
 - (2) Dans le cas général, prouver que : $g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_0|y) & \text{où } Ax_0 = y \text{ si } y \in \text{Im } A \\ +\infty & \text{si } y \notin \text{Im } A \end{cases}$.
-

EXERCICE 2.4.11. I Quotient de Rayleigh.

Si A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $r_A(x) = \frac{(Ax|x)}{\|x\|^2}$ pour $x \neq 0$.

- (1) Montrer que $r_A(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = r_A(S(0, 1))$ où $S(0, 1)$ désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
 - (2) Soient λ et μ les valeurs propres maximum et minimum de A , prouver que $r_A(S(0, 1)) = [\mu, \lambda]$.
-

EXERCICE 2.4.12. F T

Nature des coniques d'équation : $x^2 + 2atxy + y^2 + 2ax = a^2t^2$ où a et t sont des paramètres réels.

EXERCICE 2.4.13. I C

Montrer que les coniques d'équation $x^2 - 2y^2 - 3x + 1 = 0$ et $x^2 + 6xy + y^2 - 11x + 7y + 18 = 0$ dans un repère orthonormé sont semblables.

Trouver une CNS pour que deux coniques propres données soient semblables.

2.5. Quadriques usuelles.

EXERCICE 2.5.1. F T

Trouver une équation réduite de la quadrique représentée par :

1. $(x + y)(y - z) + x - y + z = 0$
 2. $x^2 - 2y^2 - z^2 - 4yz + 2xz + 2y + 2z + 3 = 0$
 3. $x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 12yz + 4zx - 6xy + 4x - 2y + z + 4 = 0$
- et préciser leurs éléments.
-

EXERCICE 2.5.2. F C

Soit C le cône d'équation :

$$ayz + bzx + cxy = 0, \quad abc \neq 0.$$

Déterminer le cône C' dont les génératrices sont les droites orthogonales en O aux plans tangents à C .

EXERCICE 2.5.3. I

Soient, dans l'espace affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(0, 0, h)$, $A'(0, 0, -h)$; on considère les droites D d'équations : $x = az + p, y = bz + q$ telles que

$$\begin{cases} (i) & d(A, D) = d(A', D) = R \quad (R > 0 \text{ est une constante donnée}) \\ (ii) & \text{les plans } (A, D) \text{ et } (A', D) \text{ soient perpendiculaires} \end{cases}.$$

- (1) Calculer l'angle que fait D avec l'axe Oz .
 - (2) Déterminer le lieu de la trace de D avec le plan xOy (i.e. l'intersection de D et du plan xOy).
 - (3) Former l'équation du lieu de D .
-

EXERCICE 2.5.4. [I TC]

Soit E l'espace affine orienté rapporté à un R.O.N. direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et l'ellipsoïde $\mathcal{A}$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

- (1) Soit q la forme quadratique $q(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ et φ la forme polaire associée. Si P est un plan, passant par l'origine, qui coupe $\mathcal{A}$ selon un cercle et si $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormée de ce plan alors montrer que l'on a
- $$(1) : \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \quad (2) : q(\vec{u}) = q(\vec{v}).$$
- (2) En déduire les plans passant par O qui coupent l'ellipsoïde $\mathcal{A}$ suivant un cercle.

EXERCICE 2.5.5. [I C]

Dans l'espace affine euclidien rapporté à un R.O.N., on considère la parabole $(\mathcal{P})$ d'équations :

$$z = 0, y^2 = 2px \text{ (où } p > 0 \text{)}.$$

Déterminer l'ensemble des sommets des cônes de révolution contenant $(\mathcal{P})$ (on pourra remarquer que le sommet se trouve forcément dans le plan xOz).

EXERCICE 2.5.6. [I C]

Dans l'espace usuel, soit A le point de coordonnées $(1, 1, 0)$ et Σ la surface d'équation :

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0.$$

- (1) Déterminer l'équation cartésienne du cône C de sommet A tangent à la surface Σ .
 (2) Caractériser la courbe $\Gamma = C \cap \Sigma$.

EXERCICE 2.5.7. [I TC]

Déterminer les plans qui coupent le cône $C : x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ suivant un cercle.
 Lieu des centres des cercles précédents.

3. ESPACES PRÉHILBERTIENS COMPLEXES, HERMITIENS

3.1. Espaces préhilbertiens complexes.

EXERCICE 3.1.1. [F C]

Soit V un espace hermitien, f un endomorphisme de V tel que

$$\forall (x, y) \in V^2, (f(x)|y) = (x|f(y))$$

Montrer alors que :

$$\forall x \in V, (f(x)|x) \in \mathbb{R}.$$

Réciproque ?

EXERCICE 3.1.2. [I]

Reprendre l'exercice 1.3.2 dans le cas complexe.
 Donner un exemple de telles familles

3.2. Espaces vectoriels hermitiens.

EXERCICE 3.2.1. I

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(1) Montrer que $(A|B) = \text{Tr}(\overline{A}^T B)$ est un produit scalaire sur E . On note $A^* = \overline{A}^T$ par la suite.

(2) Vérifier l'égalité

$$\|A^*B - BA^*\|^2 - \|AB - BA\|^2 = \text{Tr}[(A^*A - AA^*)(B^*B - BB^*)].$$

(3) En déduire l'équivalence

$$AA^* = A^*A \Leftrightarrow (\forall B \in E, (AB = BA \Rightarrow A^*B = BA^*)).$$

1. INDICATIONS :

Indication 1.1.1 Écrire $q(x)$ comme intégrale du carré d'une fonction, q est définie positive.

Indication 1.1.2 Utiliser la trigonométrie hyperbolique, les sommes suivantes interviennent $\sum_{i=1}^4 (\text{ch } a_i \pm \text{sh } a_i) x_i$.

Indication 1.1.3 C'est un peu du bidouillage, on prouve que $f(x, 2y) = 2f(x, y)$, on en déduit que $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$ et on utilise la continuité de φ .

Indication 1.1.4 Reconnaître le début d'un carré de la forme $a_{11}(x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3)^2$, refaire la même chose avec x_2 , on trouve $q(x) = a_{11}L_1(x)^2 + \frac{\delta}{a_{11}}L_2(x)^2 + \frac{\Delta}{\delta}x_3^2$ où L_1 et L_2 sont des formes linéaires.

Indication 1.2.1 Résoudre le système
$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + \dots + x_n) = 0 \\ x_p + \frac{1}{p+1}(x_{p+1} + \dots + x_n) = 1 \\ x_n = 0 \end{cases}$$
, ce qui fournit la

B.O.N. et permet de conclure.

Indication 1.2.2 Le sens direct est immédiat, pour la réciproque, B est la matrice d'un produit scalaire, A est l'inverse de la matrice de passage à une B.O.N.

Indication 1.2.3 φ est un produit scalaire est facile à démontrer, avec Schmidt, on trouve $P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = \sqrt{3}(X^2 - X), P_3 = \sqrt{\frac{20}{21-10\sqrt{3}}}\left(X^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}X^2 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)X\right)$.

Indication 1.3.1 Utiliser la projection orthogonale sur F .

Indication 1.3.2 Montrer que $x_k = (x|e_k)$.

- $\Rightarrow$ Utiliser l'inégalité de Bessel pour montrer que $\sum (x|e_p)^2 = \|x\|^2$ puis la relation $ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$ pour conclure.
- $\Leftarrow$ Utiliser la relation $\|x\|^2 = \sum_{p=0}^n (x|e_p)^2 + \|x - \sum_{p=0}^n x_p e_p\|^2$.

Indication 1.3.3 Utiliser le critère séquentiel pour un fermé et la continuité du produit scalaire. Montrer alors, par double inclusion, que $G = F^\perp$.

Indication 1.3.4

- (1) Immédiat.
- (2) $\mathcal{S}^\perp = \mathcal{A}$ ensemble des matrices antisymétriques.
- (3) Utiliser la décomposition $E = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$, la borne inférieure vaut $\frac{1}{4} \sum_{i,j} (a_{ij} - a_{ji})^2$.

Indication 2.1.1

- (1) La matrice cherchée est AB^T .
- (2) h est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(a)^\perp$.

Indication 2.2.1

- (1) C'est l'identité du parallélogramme.

- (2) Soit $d = d(x, C)$, considérer une suite y_n dans C telle que $d \leq \|x - y_n\| \leq d + \frac{1}{n}$ et montrer que (y_n) est de Cauchy. L'unicité se démontre par l'absurde.
- (3) Pour y dans F et pour t dans $\mathbb{R}$, $z = p(x) + ty$ est dans F donc $\|x - p(x)\|^2 \leq \|x - p(x) - ty\|^2$, en déduire que $(x - p(x)|y) \leq 0$ puis l'égalité. p est la projection orthogonale sur F .
- (4) Reprendre le 3. avec $u = p(x) + t(y - p(x))$, $t \in [0, 1]$ alors $(p(x) - x|p(x) - y) \leq 0$ et appliquer cette inégalité à $y = p(z)$, renverser les rôles de x et z et additionner ces 2 inégalités pour en déduire que $\|p(x) - p(z)\|^2 \leq -(z - x|p(x) - p(z)) \leq \|z - x\| \cdot \|p(x) - p(z)\|$.

Indication 2.2.2 Utiliser la propriété p est un projecteur orthogonal ssi $p^2 = p$ et $\forall (x, y) \in E^2$, $(x|p(y)) = (p(x)|y) = (p(x)|p(y))$.

- (1) a) $\Rightarrow$ Immédiat, $\Leftarrow (p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p \circ q$ puis $(p \circ q)^* = q^* \circ p^* = q \circ p = p \circ q$.
 b) Montrer que $\text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im } p \cap \text{Im } q$ puis, si $x = p(y) = q(z)$ alors $p(x) = x = p \circ q(z)$. Pour montrer que $\text{Ker}(p \circ q) = \text{Ker } p + \text{Ker } q$, raisonner sur les dimensions.
- (2) a) $\Rightarrow$ Montrer que $(p + q - p \circ q)(x)|y) = (x|(p + q - p \circ q)(y))$, Réciproque : calculer $(p + q - p \circ q)^2$ puis montrer que $(p + q - p \circ q)^* = p + q - p \circ q$ comme à la question (1).
 b) Utiliser $(\text{Im } p)^\perp = \text{Ker } p$ pour un projecteur orthogonal, $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q \subset \text{Ker}(p + q - p \circ q)$ est immédiat, si $p(x) + q(x) - p \circ q(x) = 0$ alors composer par p puis par q pour conclure que $x \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Indication 2.2.3 Utiliser les propriétés suivantes des projecteurs orthogonaux :

$\text{Im } p \subset \text{Im } q \Leftrightarrow \text{Ker } q \subset \text{Ker } p$, $p(x) \perp x - p(x)$,
 $(x|p(x)) = (p(x) + (x - p(x))|p(x)) = \|p(x)\|^2$,

p est un projecteur orthogonal ssi p est un projecteur et $\forall (x, y) \in E^2$, $(p(x)|y) = (x|p(y))$.

- (1) $\Rightarrow$ (2) Si $r = q - p$ alors $(r(x)|x) = \|r(x)\|^2$.
- (2) $\Rightarrow$ (3) Prouver que $\text{Ker } q \subset \text{Ker } p$.
- (3) $\Rightarrow$ (4) Si $y = p(x)$, montrer que $q \circ p(x) = q(y) = y$.
- (4) $\Rightarrow$ (5) Montrer que $\text{Ker } q \subset \text{Ker } p$ et, si $x = p(x) + (x - p(x))$, alors $p \circ q(x) = p(x)$.
- (5) $\Rightarrow$ (6) Montrer que $q \circ p(x) = p(x)$.
- (6) $\Rightarrow$ (1) Calculer $(q - p)^2$ et montrer que $((q - p)(x)|y) = (x|(q - p)(y))$.

Indication 2.3.1

- (1) Classique.
- (2) Montrer que $f^*(Y) = A^T Y - Y B^T$.

Indication 2.4.1 Les vep sont $e_i + \varepsilon e_{n-i+2}$ avec les vap $\varepsilon = \pm 1$ et e_1 avec 1.

Indication 2.4.2 Prendre le produit scalaire associé à A alors l'endomorphisme de matrice $A^{-1}B$ est symétrique.

Indication 2.4.3 $q(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - \frac{3}{2}(x_1 - x_3)^2 - (x_1 + x_2 + x_3)^2$.

Indication 2.4.4 Réduire la forme quadratique $Q(v) = B(v, v)$ dans une base orthonormale et remarquer que le rapport est invariant par homothétie. Si (f_i) désigne les coordonnées de f dans cette base, on trouve que le minimum vaut $\frac{1}{\sum_{i=1}^n f_i^2}$.

Indication 2.4.5 Calculer $\text{Tr}(A^2)$.

Indication 2.4.6

- (1) Montrer que $E_A(\lambda_i) \subset E_{A^*}(\lambda_i^l)$ et raisonner sur les dimensions.
- (2) Montrer que A et B ont les mêmes sep.

Indication 2.4.7

- (1) Raisonner avec u endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A et les sep de u . $\ln A$ est symétrique.

- (2) $\exp(\ln A) = A$ est immédiat, si B est symétrique alors $\exp B$ est symétrique définie positive puis diagonaliser B . $A_1 A_2$ est symétrique, A_1 , A_2 et $A_1 A_2$ partagent les mêmes sep. On montre alors que $\ln(A_1 A_2) = \ln(A_1) + \ln(A_2)$.
- (3) On a : $HH^T = MQ^{-2}M^T = M(M^T M)^{-1}M^T = I_n$.
- (4) Supposer que : $M = HQ = H'Q'$ alors $Q^2 = Q'^2$, prendre alors le logarithme et revenir aux matrices Q et Q' .

Indication 2.4.8 Écrire $A = PDP^T$ et $B = QD'Q^T$, où $D = \text{Diag}(\lambda_i)$, $D' = \text{Diag}(\mu_i)$. En posant $R = P^T Q = (r_{ij})$, montrer que $\text{Tr}(AB) = \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k (r_{k,i})^2 \geq 0$.

Indication 2.4.9

Si Q est la forme quadratique de matrice $A + B$, montrer que $\sup_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = \sup_{\lambda \in \text{Sp}(A+B)} \lambda$.

Montrer ensuite que $I + \lambda A$ est inversible et diagonaliser simultanément $I - \lambda A$ et $(I + \lambda A)^{-1}$. Les vap de $C = (I - \lambda A)(I + \lambda A)^{-1}$ sont $\frac{1 - \lambda \alpha_i}{1 + \lambda \alpha_i}$. La plus grande vap de C est $\frac{1 - \lambda \alpha_1}{1 + \lambda \alpha_1}$, la plus petite vap de C est $\frac{1 - \lambda \alpha_n}{1 + \lambda \alpha_n}$.

Indication 2.4.10

- (1) Utiliser l'égalité $(A^{-1}(y - Ax)|y - Ax) = (A^{-1}y|y) - 2(x|y) + (x|Ax)$ et en déduire que $(x|y) - \frac{1}{2}(Ax|x) \leq \frac{1}{2}(A^{-1}y|y)$.
- (2) Si $y \notin \text{Im } A$ alors $\exists x_0 \in \text{Ker } A$ tel que $(y|x_0) > 0$. Si $y \in \text{Im } A$, le résultat est immédiat en utilisant le 1.

Indication 2.4.11 Montrer que r_A est invariant par homothétie. Utiliser par exemple que l'image d'un connexe par r_A est un connexe.

Indication 2.4.12 Si $at = 1$ alors on a une parabole, si $at < 1$ alors on obtient une ellipse, si $at > 1$ on a une hyperbole.

Indication 2.4.13 Si $Q_i(x, y) + L_i(x, y) + a_i = 0$, $i = 1, 2$ sont les équations de deux coniques propres $\mathcal{C}_i$ où Q_i est le polynôme homogène du second degré, L_i le polynôme homogène du premier degré, a_i un réel non nul, alors la C.N.S. cherchée est :

les matrices M_1 et M_2 des formes quadratiques Q_1 et Q_2 admettent des valeurs propres proportionnelles et les déterminants des formes quadratiques obtenus en remplaçant x par $\frac{X}{T}$ et Y par $\frac{Y}{T}$ et en multipliant par T^2 sont de même signe (en supposant que le rapport de proportionnalité entre les valeurs propres est positif).

Indication 2.5.1

- 1 - On a un paraboloïde hyperbolique (écrire $(x + y)(y - z) = \frac{1}{4}[(x + 2y - z)^2 - (x + z)^2]$).
- 2 - C'est un cylindre hyperbolique : $[(x + z)^2 - 2(y + z)^2 + 2(y + z) + 3 = 0]$.
- 3 - C'est un cylindre parabolique : $[(x - 3y + 2z)^2 + 4x - 2y + z + 4 = 0]$.

Indication 2.5.2 On trouve $a^2 X^2 + b^2 Y^2 + c^2 Z^2 - 2(bcYZ + caZX + abXY) = 0$.

Indication 2.5.3

- (1) L'équation des plans (A, D) et (A', D) s'écrit $(q - \varepsilon bh)x - (p + \varepsilon ah)y + (pb - aq)(z - \varepsilon h) = 0$ ($\varepsilon = \pm 1$) puis en traduisant les conditions données, on obtient l'existence de t tel que $a = \frac{R}{\sqrt{2h^2 - R^2}} \cos t$, $b = \frac{R}{\sqrt{2h^2 - R^2}} \sin t$.
L'angle $\alpha = \widehat{Oz, D}$ est déterminé par $\cos \alpha = \sqrt{1 - R^2/(2h^2)}$, $\sin \alpha = \frac{R\sqrt{2}}{2h}$.
- (2) On trouve un cercle de centre O , de rayon $R/\sqrt{2}$.
- (3) C'est un hyperboloïde à une nappe : $(2h^2 - R^2)(x^2 + y^2) - R^2 z^2 = \frac{R^2}{2}(2h^2 - R^2)$.

Indication 2.5.4

- (1) M appartient à un cercle ssi $\overrightarrow{OM} = r(\vec{u} \cos \theta + \vec{v} \sin \theta)$ donc
 $M \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \frac{1}{2}[q(\vec{u}) + q(\vec{v})] + \frac{1}{2}[q(\vec{u}) - q(\vec{v})] \cos 2\theta + \varphi(\vec{u}, \vec{v}) \sin 2\theta = \frac{1}{r^2}$ et conclure.

(2) En ordonnant les réels $a \leq b \leq c$, si $a = b = c$, tout plan convient.

Si $a < c$ alors, prendre $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ comme équation pour P avec $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. La condition (1) se traduit par $\alpha\beta\gamma = 0$ et la condition (2) par $\frac{\alpha^2\beta^2}{a^2} + \frac{(\alpha^2+\gamma^2)^2}{b^2} + \frac{\beta^2\gamma^2}{c^2} = \left(\frac{\gamma^2}{a^2} + \frac{\alpha^2}{c^2}\right)$.

Étudier alors les 3 cas : $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ pour conclure que tous les plans qui répondent à la question contiennent l'axe Oy .

Indication 2.5.5 Si $S(x_0, 0, z_0)$ est le sommet du cône, $z_0 \neq 0$, l'équation du cône de sommet S ayant pour ensemble directeur la parabole $(\mathcal{P})$ est : $z_0^2 Y^2 - 2pZ(x_0 Z - z_0 X) = 0$, $Z \neq 0$.

ce cône est de révolution ssi la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & pz_0 \\ 0 & z_0^2 & 0 \\ pz_0 & 0 & -2px_0 \end{pmatrix}$ admet une vap double. La

C.N.S. s'écrit : $z_0^2 + 2px_0 - p^2 = 0$.

Indication 2.5.6

(1) $M(x, y, z)$ appartient au cône ssi AM est tangente à la surface Σ . On obtient l'équation $x^2 - 2z^2 - 4xy + 2x + 4y - 3 = 0$.

(2) Γ a pour équations $x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$, c'est une conique. On montre alors que l'on a une hyperbole équilatère.

Indication 2.5.7 Si $P = ax + by + cz - h = 0$ est l'équation du plan cherché faire un changement de repère orthonormé pour que l'équation de P soit $Z = h'$, l'équation de C s'écrit $X^2 + Y^2 + Z^2 + (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z) = 0$. Une condition nécessaire est que P soit parallèle à l'un des plans : $y \pm z\sqrt{2} = 0$.

Si $P = y - z\sqrt{2} - h$: on trouve un cercle de centre $(0, -h/3, -2\sqrt{2}h/3)$ de rayon $\sqrt{2}|h|/\sqrt{3}$.

L'autre cas se ramène au précédent.

Indication 3.1.1 L'implication directe est immédiate, pour la réciproque, calculer $(f(x+y)|x+y)$ et $(f(x+iy)|x+iy)$.

Indication 3.1.2 C'est le même genre de calcul en utilisant l'identité de polarisation. Prendre comme exemple $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où $e_n(t) = e^{int}$.

Indication 3.2.1

(1) Classique.

(2) L'application $A \mapsto A^*$ vérifie les mêmes propriétés que $A \mapsto A^T$, on se sert de la propriété $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, on développe les produits $(A^*B - BA^*)^*(A^*B - BA^*)$, $-(AB - BA)^*(AB - BA)$, $-(A^*A - AA^*)(B^*B - BB^*)$ et on prend les traces de chacune des matrices obtenues.

(3) Immédiat.

1. SOLUTIONS

Solution 1.1.1 En fait on a : $q(x) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n x_i f_i(t) \right)^2 dt \geq 0$ donc q est positive.

$q(x) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i f_i = 0$ (car les f_i sont continues, cf. *théorème 4.19 page 78*) et comme les f_i forment une famille libre on en déduit que $x_i = 0$ donc q est définie.

Solution 1.1.2 En utilisant les formules de trigonométrie hyperbolique (cf. *page 33*) on a

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{(i,j) \in [1,4]^2} \operatorname{ch} a_i x_i \operatorname{ch} a_j x_j - \sum_{(i,j) \in [1,4]^2} \operatorname{sh} a_i x_i \operatorname{sh} a_j x_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^4 \operatorname{ch} a_i x_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^4 \operatorname{sh} a_i x_i \right)^2 = f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

$$\text{où } f(x) = \sum_{i=1}^4 (\operatorname{ch} a_i + \operatorname{sh} a_i) x_i \text{ et } g(x) = \sum_{i=1}^4 (\operatorname{ch} a_i - \operatorname{sh} a_i) x_i$$

Solution 1.1.3 On remarque que $q(0) = 0$ (avec $x = y = 0$), puis $q(-y) = q(y)$ (avec $x = 0$) donc f est symétrique, il suffit donc de prouver que f est linéaire par rapport à la première variable.

On prouve tout d'abord que $f(x + x', y) = f(x, y) + f(x', y)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(x', y) &= \frac{1}{4} [q(x + y) + q(x' + y) - q(x - y) - q(x' - y)] \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} q(x + x' + 2y) - \frac{1}{2} q(x + x' - 2y) \right] = \frac{1}{2} f(x + x', 2y) \end{aligned}$$

là, il suffit de prouver que $f(x, 2y) = 2f(x, y)$: or

$$\begin{aligned} f(x, 2y) &= \frac{1}{4} [q(x + 2y) - q(x - 2y)] = \frac{1}{4} [q(x + 2y) + q(x) - (q(x) + q(x - 2y))] \\ &= \frac{1}{4} [2q(x + y) + 2q(x) - 2q(x - y) - 2q(y)] = 2f(x, y) \end{aligned}$$

On pose $g(\lambda) = f(\lambda x, y)$ alors g est continue et $g(\lambda + \lambda') = g(\lambda) + g(\lambda')$. g est donc linéaire (on utilise la caractérisation des applications linéaires).

Conclusion : f est une forme bilinéaire symétrique.

Remarque : on a ainsi prouvé le théorème de Von Neumann qui dit que, si $\|\cdot\|$ est une norme sur E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel alors cette norme est associée à un produit scalaire ssi elle vérifie l'identité du parallélogramme $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (cf. *proposition 9.1.5 (ii) page 161*).

Solution 1.1.4

($\Leftarrow$) On utilise la transformation suivante (réduction de Gauss) :

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{11} \left[x_1^2 + 2x_1 \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 \right) \right] + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{23} x_2 x_3 \\ &= a_{11} \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 \right)^2 + \frac{a_{22} a_{11} - a_{12}^2}{a_{11}} x_2^2 + \frac{a_{33} a_{11} - a_{13}^2}{a_{11}} x_3^2 + 2 \frac{a_{23} a_{11} - a_{12} a_{13}}{a_{11}} x_2 x_3 \\ &= a_{11} L_1(x)^2 + \frac{\delta}{a_{11}} L_2(x)^2 + \frac{\Delta}{\delta} x_3^2 \end{aligned}$$

où $L_1(x) = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3$, $L_2(x) = x_2 + \frac{a_{23}a_{11} - a_{12}a_{13}}{\delta}x_3$. Donc comme $a_{11} > 0$, $\delta > 0$ et $\Delta > 0$ on en déduit que q est définie positive.

($\Rightarrow$) On a $q(1, 0, 0) = a_{11} > 0$. On vérifie ensuite que $a_{11}\delta = q(-a_{12}, a_{11}, 0) > 0$ donc $\delta > 0$. On peut ensuite réduire q par la méthode de Gauss et prendre $L_1(x) = L_2(x) = 0$, $x_3 \neq 0$ pour avoir $\Delta > 0$.

En fait, si q est définie positive alors le déterminant de la matrice de la restriction de q à n'importe quel sous-espace vectoriel est > 0 ce qui permettait d'avoir directement $a_{11} > 0$, $\delta > 0$, $\Delta > 0$.

Solution 1.2.1 F est positive, de plus, elle est définie car $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

On a en fait la décomposition de Gauss de F car les formes linéaires $f_p(x_1, \dots, x_n) = x_p + \frac{1}{p+1}(x_{p+1} + \dots + x_n)$ sont indépendantes (leur écriture matricielle donne une matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont non nuls). Chercher une base orthogonale c'est alors

résoudre le système
$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + \dots + x_n) = 0 \\ x_p + \frac{1}{p+1}(x_{p+1} + \dots + x_n) = 1 \\ x_n = 0 \end{cases} \quad \text{d'où } e'_p = -\frac{1}{p}(e_1 + \dots + e_{p-1}) + e_p, \text{ la}$$

famille $(e'_1, \dots, e'_n)$ est ainsi une base orthonormale.

Solution 1.2.2 On a : $X^T A^T A X = Y^T Y$ où $Y = AX$, donc B est positive et comme A est inversible : $Y = 0 \Leftrightarrow X = 0$ donc B est définie.

Réciproquement, B est associée à un produit scalaire et il existe une matrice de passage P dans une base orthonormée telle que : $X = PY$. En exprimant que $X^T B X = Y^T Y$ (norme du vecteur de coordonnées X dans l'ancienne base et de coordonnées Y dans la base orthonormale) on a :

$$X^T B X = Y^T Y = X^T A^T A X$$

où $A = P^{-1}$ et en conclusion : $B = A^T A$.

Solution 1.2.3

(1) φ est évidemment bilinéaire symétrique et $\varphi(P, P) = P(0)^2 + \int_0^1 P'(t)^2 dt$ montre que φ est positive.

Montrons que φ est définie. Si $\varphi(P) = 0$ alors $P(0) = 0$ et P' s'annule sur $[0, 1]$ donc $P' = 0$ car P' est un polynôme. On arrive finalement à $P = 0$.

(2) En appliquant l'algorithme de Schmidt on trouve successivement

- $P_0 = 1$,
- $P_1 = X$,
- $P_2 = \sqrt{3}(X^2 - X)$,
- $P_3 = \sqrt{\frac{20}{21 - 10\sqrt{3}}} \left(X^3 - \frac{\sqrt{3}}{2}X^2 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)X \right)$.

Solution 1.3.1 On utilise la projection sur un espace vectoriel de dimension finie F (cf. *proposition 4.2.2 page 200*). Tout vecteur x de E va s'écrire $x = x - p(x + p(x))$ or $x - p(x) \in F^\perp$ et $p(x) \in F$. Comme de manière évidente $F^\perp \cap F = \{0\}$ on a le résultat annoncé.

Solution 1.3.2 On montre tout d'abord que $x_k = (x|e_k)$, en effet, par Cauchy-Schwarz on a, pour $n \geq k$,

$$|(x - \sum_{p=0}^n x_p e_p | e_k)| = |(x|e_k) - x_k| \leq \|x - \sum_{p=0}^n x_p e_p\|$$

d'où l'égalité annoncée en passant à la limite sur n .

- $\Rightarrow$ Grâce à l'inégalité de Bessel (cf. *théorème 4.3 page 201*), on a $\|x\|^2 \geq \sum_{p=0}^n (x|e_p)^2$ donc la série $\sum (x|e_p)^2$ converge et sa limite vaut $\|x\|^2$ car, grâce à Pythagore, $\|x\|^2 = \sum_{p=0}^n (x|e_p)^2 + \|x - \sum_{p=0}^n x_p e_p\|^2$.
On utilise ensuite la relation $ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$ pour conclure (on se sert de l'identité de polarisation, cf. *proposition 9.1.5 (iii) page 161*).
- $\Leftarrow$ On utilise là aussi la relation $\|x\|^2 = \sum_{p=0}^n (x|e_p)^2 + \|x - \sum_{p=0}^n x_p e_p\|^2$ qui fournit immédiatement la réciproque (en choisissant $x_p = (x|e_p)$).

Solution 1.3.3 Soit $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \in E$ alors $x = x_F + x_G$. Comme $(x_n|x_G) = 0$ pour tout n , la continuité du produit scalaire permet, grâce à un passage à la limite, d'obtenir $(x|x_G) = 0$. Or $(x|x_G) = (x_G|x_G)$ donc $x_G = 0$ ce qui donne $x = x_F \in F$ et par conséquent F est fermé (on utilise la caractérisation séquentielle de l'adhérence, cf. *théorème 5.9 page 227*).

On procède de même pour G .

On a immédiatement $G \subset F^{\perp}$ car la somme est orthogonale.

Montrons l'autre inclusion : si $y \in F^{\perp}$ alors $y = y_F + y_G$ et $(y|y_F) = 0$ entraîne $y_F = 0$ et donc $y = y_G \in G$.

Conclusion : $G = F^{\perp}$ et par symétrie $F = G^{\perp}$.

Solution 1.3.4

- (1) Immédiat, ne pas oublier le fait que $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$ et remarquer que $\text{Tr}(AA^T) = \sum_{i,j} a_{ij}^2$.
- (2) Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques et $B \in \mathcal{A}$ alors, pour toute matrice $A \in \mathcal{S}$, on a

$$\text{Tr}(AB^T) = -\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA^T) = \text{Tr}(BA) = \text{Tr}(AB) = 0$$

donc $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}^{\perp}$ et comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont en somme directe, $E = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$ est une somme directe orthogonale soit $\mathcal{S}^{\perp} = \mathcal{A}$.

- (3) On demande de chercher la borne inférieure de $\|A - M\|^2$ pour $M \in \mathcal{S}$. On écrit $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$ (décomposition de A selon la somme directe orthogonale $\mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$) et on sait que la borne inférieure est atteinte pour $M = \frac{1}{2}(A + A^T)$ et qu'elle vaut $\frac{1}{4}\|A - A^T\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{i,j} (a_{ij} - a_{ji})^2$.

Solution 2.1.1

- (1) Si X et Y désignent les matrices des coordonnées de x et y alors $(a \otimes b)(x, y) = X^T A B^T Y$ d'où la matrice cherchée AB^T .
- (2) $AA^T X = A(A^T X)$ donc $a \otimes a(x) = (a.x)a$. On a alors $h(x) = x - 2(a.x)a$ donc h est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(a)^\perp$.
En effet, si $x = \lambda a + b$ est la décomposition de x dans la somme directe $\text{Vect}(a) \oplus \text{Vect}(a)^\perp$ alors

$$h(x) = \lambda a + b - 2((\lambda a + b).a)a = b - \lambda a$$

et on se réfère à la *définition 9.1.14* page 162.

Solution 2.2.1

- (1) C'est l'identité du parallélogramme (cf. *proposition 9.1.5 (ii)* page 161).
- (2) On va faire intervenir une suite de Cauchy. Soit $d = d(x, C)$ (où on suppose que $C \neq \emptyset$ et $x \notin C$), on sait que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe y_n dans C tel que

$$d \leq \|x - y_n\| \leq d + \frac{1}{n}.$$

Montrons que (y_n) est de Cauchy : on applique le 1 à $x - y_n$ et à $x - y_{n+p}$:

$$\|2x - (y_n + y_{n+p})\|^2 + \|y_n - y_{n+p}\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_{n+p}\|^2 \leq 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{n+p}\right)^2$$

donc, comme $\frac{1}{2}(y_n + y_{n+p})$ est dans C (C convexe), on a $\|2x - (y_n + y_{n+p})\|^2 = 4\|x - \frac{1}{2}(y_n + y_{n+p})\|^2 \geq 4d^2$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \|y_n - y_{n+p}\|^2 &\leq 2\left(d^2 + \frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2} + d^2 + \frac{2d}{n+p} + \frac{1}{(n+p)^2}\right) - 4d^2 \\ &\leq 4d\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+p}\right) + 2\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+p)^2}\right) \leq \frac{2d}{n} + \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

que l'on peut rendre aussi petit que l'on veut. La suite (y_n) étant de Cauchy, elle converge dans C complet. Si y désigne sa limite alors, par continuité de la norme, on a $d = \|x - y\|$. On a donc existence.

Montrons l'unicité : soit y' un autre élément de C tel que $d = \|x - y'\|$. On sait que $\frac{y + y'}{2}$ est dans C et que c'est le pied de la hauteur menée de x sur le segment yy' (le triangle xyy' est isocèle). Si $y \neq y'$ alors $\|x - \frac{1}{2}(y + y')\| < d$ ce qui est impossible donc $y = y'$ ce qui assure l'unicité (on peut aussi utiliser l'inégalité précédente avec $y = y_n$ et $y' = y_{n+p}$).

Remarque : on a prouvé ainsi que l'on pouvait définir la projection sur un convexe complet.

- (3) Soit y quelconque dans F , alors, pour tout t de $\mathbb{R}$, $z = p(x) + ty$ est dans F , donc $\|x - p(x)\|^2 \leq \|x - p(x) - ty\|^2$, ce qui donne, après simplification,

$$0 \leq -2t(x - p(x)|y) + t^2\|y\|^2$$

pour tout t . Le discriminant du trinôme en t est donc négatif i.e.

$$(x - p(x)|y) \leq 0$$

et comme ceci est aussi vrai pour $-y$, on en déduit que

$$\forall y \in F, (x - p(x)|y) = 0.$$

De plus p est linéaire, en effet, p est caractérisé par la dernière relation $(x - p(x)|y) = 0$ (évident avec Pythagore) donc $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ et $p(x_1 + x_2) = p(x_1) + p(x_2)$.

Finalement, si $x \in F$, $p(x) = x$ donc $p^2 = p$. Conclusion : p est la projection orthogonale sur F .

- (4) En reprenant le 3. avec $u = p(x) + t(y - p(x))$, $t \in [0, 1]$ ($u \in C$ car $p(x) \in C$ et on suppose $y \in C$, on obtient $(p(x) - x|p(x) - y) \leq 0$ en divisant par t et en passant à la limite quand $t \rightarrow 0$. On applique cette inégalité à $y = p(z)$

$$(p(x) - x|p(x) - p(z)) \leq 0$$

puis, en renversant les rôles de x et z

$$(z - p(z)|p(x) - p(z)) \leq 0.$$

En additionnant ces 2 inégalités, on a

$$((z - x) + (p(x) - p(z))|p(x) - p(z)) \leq 0$$

soit

$$\|p(x) - p(z)\|^2 \leq -(z - x|p(x) - p(z)) \leq \|z - x\| \cdot \|p(x) - p(z)\|$$

grâce à Cauchy-Schwarz. Si $p(x) = p(z)$, on a bien l'inégalité demandée, sinon, on divise par $\|p(x) - p(z)\|$ dans l'inégalité précédente.

Conclusion : p est lipschitzienne.

Solution 2.2.2 On utilise ici la propriété caractéristique des projecteurs orthogonaux (cf. proposition 4.2.8 page 203) p est un projecteur orthogonal ssi $p^2 = p$ et $\forall (x, y) \in E^2$, $(x|p(y)) = (p(x)|y) = (p(x)|p(y))$.

- (1) a) $\Rightarrow$ On a $(p \circ q(x)|y) = (q(x)|p(y)) = (x|q \circ p(y)) = (x|p \circ q(y))$ et ceci pour tout x et y donc $p \circ q = q \circ p$.

$\Leftarrow$ On a $(p \circ q)^2 = p \circ q \circ p \circ q = p \circ p \circ q \circ q = p \circ q$ donc $p \circ q$ est un projecteur. Ensuite $(p \circ q)^* = q^* \circ p^* = q \circ p = p \circ q$ ce qui prouve que $p \circ q$ est un projecteur orthogonal.

- b) Comme $p \circ q = q \circ p$ on a immédiatement $\text{Im}(p \circ q) \subset \text{Im } p \cap \text{Im } q$.

Inclusion dans l'autre sens : soit $x = p(y) = q(z)$ alors $p(x) = p^2(y) = p(y) = x = p \circ q(z)$ donc $x \in \text{Im}(p \circ q)$ c.q.f.d.

On utilise la propriété vraie en dimension finie : $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ et le fait que, pour un projecteur orthogonal, $\text{Im } p = (\text{Ker } p)^\perp$.

$$\begin{aligned} \text{Ker}(p \circ q) &= (\text{Im}(p \circ q))^\perp = (\text{Im } p \cap \text{Im } q)^\perp \\ &= (\text{Im } p)^\perp + (\text{Im } q)^\perp = \text{Ker } p + \text{Ker } q. \end{aligned}$$

- (2) a) Si $p + q - p \circ q$ est un projecteur orthogonal alors

$$\begin{aligned} (p + q - p \circ q)(x)|y) &= (x|p(y)) + (x|q(y)) - (x|q \circ p(y)) = (x|(p + q - q \circ p)(y)) \\ &= (x|(p + q - p \circ q)(y)) \end{aligned}$$

d'où $p \circ q = q \circ p$.

Réciproque : comme p et q commutent on peut faire le calcul suivant :

$$\begin{aligned} (p + q - p \circ q)^2 &= p^2 + q^2 + 2p \circ q + (p \circ q)^2 - 2(p + q) \circ p \circ q \\ &= p + q + 3p \circ q - 2p \circ q - 2p \circ q = p + q - p \circ q \end{aligned}$$

i.e. $p + q - p \circ q$ est un projecteur.

On prouve ensuite que $(p + q - p \circ q)^* = p + q - p \circ q$ comme à la question (1) ce qui achève la démonstration.

- b) On utilise le fait que pour un projecteur orthogonal p , $(\text{Im } p)^\perp = \text{Ker } p$. La propriété à prouver se ramène donc à montrer que

$$\begin{aligned}\text{Im}(p + q - p \circ q)^\perp &= \text{Ker}(p + q - p \circ q) \\ &= (\text{Im } p + \text{Im } q)^\perp = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q.\end{aligned}$$

On a évidemment $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q \subset \text{Ker}(p + q - p \circ q)$, montrons l'autre inclusion : si $p(x) + q(x) - p \circ q(x) = 0$ alors on compose par p ce qui donne $p(x) = 0$. En composant par q et en tenant compte de la relation $p \circ q = q \circ p$ on a aussi $q(x) = 0$ soit $x \in \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

Solution 2.2.3 On va prouver les équivalences par un cycle. On utilise les propriétés suivantes des projecteurs orthogonaux :

- $\text{Im } p \subset \text{Im } q \Leftrightarrow (\text{Im } q)^\perp \subset (\text{Im } p)^\perp \Leftrightarrow \text{Ker } q \subset \text{Ker } p$,
- $x = p(x) + (x - p(x))$ et $p(x) \perp x - p(x)$.
- $(x|p(x)) = (p(x) + (x - p(x))|p(x)) = \|p(x)\|^2$.
- p est un projecteur orthogonal ssi p est un projecteur et $\forall (x, y) \in E^2$, $(p(x)|y) = (x|p(y))$.

- (1) $\Rightarrow$ (2) Soit $r = q - p$ alors $(r(x)|x) = (r(x)|r(x) + (x - r(x))) = \|r(x)\|^2 \geq 0$.
 (2) $\Rightarrow$ (3) On prouve ici la propriété équivalente $\text{Ker } q \subset \text{Ker } p$. Soit $x \in \text{Ker } q$ alors $((q-p)(x)|x) = (-p(x)|x) = -\|p(x)\|^2 \geq 0$ donc $p(x) = 0$ soit $x \in \text{Ker } p$.
 (3) $\Rightarrow$ (4) On sait que pour un projecteur q , si $y \in \text{Im } q$ alors $q(y) = y$. On a alors $q \circ p(x) = q(y) = y$ car $y = p(x) \in \text{Im } p \subset \text{Im } q$.
 (4) $\Rightarrow$ (5) $q \circ p = p \Rightarrow \text{Im } p \subset \text{Im } q$ et donc $\text{Ker } q \subset \text{Ker } p$ d'où $q(x - p(x)) = 0$ car $x - p(x) \in \text{Ker } p$. Soit $x = p(x) + (x - p(x))$ alors

$$p \circ q(x) = p \circ (q \circ p)(x) + p \underbrace{[q(x - p(x))]}_{=0} = p \circ (p \circ q)(x) = p^2(x) = p(x).$$

- (5) $\Rightarrow$ (6) $p \circ q = p \Rightarrow \text{Ker } q \subset \text{Ker } p$ donc $\text{Im } p \subset \text{Im } q$ et par conséquent $q \circ p(x) = p(x)$.
 (6) $\Rightarrow$ (1) $(q - p)^2 = q^2 - p \circ q - q \circ p + p^2 = q - p$ donc $q - p$ est un projecteur. On a ensuite $((q - p)(x)|y) = (q(x)|y) - (p(x)|y) = (x|q(y)) - (x|p(y)) = (x|(q - p)(y))$ et finalement $q - p$ est un projecteur orthogonal.

Solution 2.3.1

- (1) Classique cf. exercice 1.3.4.
 (2) On cherche f^* telle que $(f(X)|Y) = (X|f^*(Y))$.

$$\begin{aligned}\text{Tr}[(X^T A^T - B^T X^T)|Y] &= \text{Tr}(X^T A^T Y) - \underbrace{\text{Tr}(B^T X^T Y)}_{=\text{Tr}(X^T Y B^T)} \\ &= \text{Tr}[X^T (A^T Y - Y B^T)]\end{aligned}$$

$$\text{donc } f^*(Y) = A^T Y - Y B^T.$$

Solution 2.4.1 A étant une matrice symétrique est diagonalisable (cf. . corollaire 4.8 page 204).

On trouve directement les vecteurs propres $e_i + \varepsilon e_{n-i+2}$ associés aux valeurs propres $\varepsilon = \pm 1$ et e_1 avec 1.

Solution 2.4.2 C'est une conséquence directe du cours sur la réduction simultanée de 2 formes quadratiques : l'endomorphisme u symétrique (pour la forme quadratique associée à la matrice A) ayant pour matrice $A^{-1}B$ est diagonalisable : matriciellement, cela donne (si $u(x) \rightarrow A^{-1}BX$) :

$$(x, u(x)) = (u(x), x) \Leftrightarrow X^T A(A^{-1}B)X = X^T BX = X^T (A^{-1}B)^T AX.$$

Solution 2.4.3 On trouve après réduction : $q(x) = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3)^2 - \frac{3}{2}(x_1 - x_3)^2 - (x_1 + x_2 + x_3)^2$.

En effet, la matrice de la forme quadratique est $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ de polynôme caractéristique $x^3 + 3x^2 - 9x - 27$ et de valeurs propres 3 et -3 comptée deux fois.

Solution 2.4.4 On peut réduire la forme quadratique $Q(v) = B(v, v)$ dans une base orthonormale (cf. *théorème 4.9 page 205*) pour écrire :

$$\frac{(\ell(v)|v)}{(v|f)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^2}{(\sum_{i=1}^n v_i f_i)^2}.$$

En posant $x_i = v_i \sqrt{\alpha_i}$ on obtient $\frac{(\ell(v)|v)}{(v|f)^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(\sum_{i=1}^n x_i f_i / \sqrt{\alpha_i})^2}$. On remarque que le rapport est

invariant par homothétie, on prend alors les (x_i) tels que $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Le rapport est minimum lorsque $(\sum_{i=1}^n x_i f_i / \sqrt{\alpha_i})^2$ est maximum avec la condition imposée. Or, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(\sum_{i=1}^n \frac{x_i f_i}{\sqrt{\alpha_i}})^2 \leq \sum_{i=1}^n \frac{f_i^2}{\alpha_i} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque l'on a $x_i = \lambda \frac{f_i}{\sqrt{\alpha_i}}$. Dans ce cas, le minimum vaut $\frac{1}{\sum_{i=1}^n f_i^2 / \alpha_i}$.

Solution 2.4.5 On a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A^2) &= \text{Tr}(AA^T) && \text{car } A \text{ est symétrique} \\ &= \sum_{i,j} a_{ij}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \end{aligned}$$

car A^2 admet les λ_i^2 comme valeurs propres avec leurs ordres de multiplicité et $\text{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ (cf. *remarque 3.2.3 page 192*).

Solution 2.4.6

- (1) Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ sont les valeurs propres distinctes de A , elles sont toutes positives et $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_q^k$ sont les valeurs propres toutes distinctes de A^k .
 Soient E_i et E'_i les sous-espaces propres associés aux λ_i et λ_i^k , on a évidemment : $E_i \subset E'_i$
 et $\bigoplus_{i=1}^q E_i = \mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^q E'_i$ donc $\dim E_i = \dim E'_i$ soit encore $E_i = E'_i$. Tout vecteur de E'_i est donc un vecteur de E_i .
 Une conséquence de cette égalité est que $\exists P \in GL_n(\mathbb{R}) : A^k = PD^kP^{-1}$ et $A = PDP^{-1}$.
- (2) Ceci est une conséquence immédiate du 1.
 En effet A et B partagent les mêmes sous-espaces propres et la restriction des endomorphismes associés à A et B sur chacun de ces sous-espaces est égale.

Solution 2.4.7

- (1) Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A et $\ln u = v$ celui associé à $\ln A$. Si E_λ est le sous-espace propre de u associé à λ , c'est aussi le sous-espace propre de v associé à $\ln \lambda$. Donc comme la restriction de v à chaque sous-espace propre (notion intrinsèque) est une homothétie, cette définition est bien indépendante de la base choisie. Si on prend une base orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, P sera orthogonale et par conséquent, $\ln A$ sera symétrique.
- (2) On a : $\exp(\ln A) = P \exp \Lambda P^{-1} = PDP^{-1} = A$.
 Si B est symétrique, $\exp B$ est symétrique définie positive (en effet, ses valeurs propres sont e^λ où λ est valeur propre de B). En diagonalisant B on a $B = PD'P^{-1}$ où D' est une matrice diagonale. $\exp B = P \exp D'P^{-1}$ donc, en vertu du 1, on sait que $\ln(\exp B) = P \ln(\exp D')P^{-1}$. Or si $D' = \text{Diag}(\mu_i)$ alors $\exp D' = \text{Diag}(\exp(\mu_i))$ donc $\ln(\exp(D')) = D'$ et en conséquence $\ln(\exp(B)) = B$.
 On remarque ensuite que A_1A_2 est symétrique, A_1 et A_2 partagent les mêmes sous-espaces propres qui sont aussi ceux de A_1A_2 car ces matrices sont simultanément diagonalisables (on utilise le résultat de l'application (ii) page 194). On aura donc

$$\ln(A_1A_2) = P\Lambda_{12}P^{-1} \text{ où } \Lambda_{12} = \text{Diag}(\ln(\lambda_{1i}\lambda_{2i}))$$

la conclusion est alors immédiate.

- (3) On a : $Q^2 = A = M^T M$ et $H^T = (Q^T)^{-1} M^T = Q^{-1} M^T$ d'où :

$$HH^T = MQ^{-2}M^T = M(M^T M)^{-1}M^T = I_n$$

donc H est orthogonale.

- (4) Supposons que : $M = HQ = H'Q'$ alors $M^T M = QH^T H Q = Q^2 = Q'^2$ (car H et H' sont orthogonales et Q et Q' sont symétriques). On peut alors prendre le logarithme d'où $2 \ln Q = 2 \ln Q'$ soit $\ln Q = \ln Q'$ et, en passant aux exponentielles, on a $Q = Q'$ (on parle ici de décomposition polaire par analogie à l'écriture $z = re^{i\theta}$ d'un nombre complexe).

Solution 2.4.8 A et B étant symétriques réelles sont diagonalisables dans des bases orthonormales (cf. corollaire 4.8 page 204). Soit $A = PDP^T$ et $B = QD'Q^T$, où $D = \text{Diag}(\lambda_i)$, $D' = \text{Diag}(\mu_i)$. On a donc

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(PDP^T QD'Q^T) = \text{Tr}[D(RD'R^T)]$$

en posant $R = P^T Q = (r_{ij})$, matrice orthogonale et en utilisant la propriété $\text{Tr}(CD) = \text{Tr}(DC)$ (cf. proposition 2.1.7 page 185). On a donc $\text{Tr}(AB) = \sum_{i,k} \lambda_i \mu_k (r_{k,i})^2 \geq 0$.

Si les λ_i et les μ_k sont > 0 alors, comme la matrice R est non nulle, il existe i et k tels que $r_{k,i} \neq 0$ et dans ce cas $\text{Tr}(AB) > 0$.

Remarque : on a plus simple, comme A est positive on sait que $(AX|X) \geq 0$. On se place alors dans une base de vecteurs propres de $B : (e_i)$ associés aux valeurs propres $\mu_i \geq 0$. On a alors

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n (Abe_i|e_i) = \sum_{i=1}^n \mu_i (Ae_i|e_i) \geq 0.$$

Si A et B sont définies positives alors les inégalités larges deviennent strictes.

Solution 2.4.9 On a pour toute matrice colonne $X : X^T A X \leq \alpha X^T X$ et $X^T B X \leq \beta X^T X$ d'où

$$X^T (A + B) X \leq (\alpha + \beta) X^T X.$$

On utilise alors le résultat du *théorème 4.9 page 205* avec la forme quadratique de matrice $A + B$. En effet, ce théorème signifie que

$$\sup_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2} = \sup_{\lambda \in \text{Sp}(A+B)} \lambda$$

donc, comme $\alpha + \beta$ est un majorant de $\sup_{x \neq 0} \frac{Q(x)}{\|x\|^2}$, on en déduit que $\sup_{\lambda \in \text{Sp}(A+B)} \lambda \leq \alpha + \beta$.

On procède de même pour les plus petites valeurs propres.

$I + \lambda A$ est bien inversible car les valeurs propres de A sont positives et donc $I + \lambda A$ n'admet pas la valeur propre 0.

$I - \lambda A$ et $(I + \lambda A)^{-1}$ commutent, elles sont donc simultanément diagonalisables (cf. *application (ii) page 194*). Si $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ sont les valeurs propres de A , on écrit $I + \lambda A = P \text{Diag}(1 + \alpha_i) P^{-1}$ et $I - \lambda A = P \text{Diag}(1 - \lambda \alpha_i) P^{-1}$ donc

$$C = (I - \lambda A)(I + \lambda A)^{-1} = P \text{Diag} \left(\frac{1 - \lambda \alpha_i}{1 + \lambda \alpha_i} \right) P^{-1}.$$

Les valeurs propres de $C = (I - \lambda A)(I + \lambda A)^{-1}$ sont alors $\frac{1 - \lambda \alpha_1}{1 + \lambda \alpha_1}, \frac{1 - \lambda \alpha_2}{1 + \lambda \alpha_2}, \dots, \frac{1 - \lambda \alpha_n}{1 + \lambda \alpha_n}$.

La plus grande valeur propre de C est $\frac{1 - \lambda \alpha_1}{1 + \lambda \alpha_1}$, la plus petite valeur propre de C est $\frac{1 - \lambda \alpha_n}{1 + \lambda \alpha_n}$

car la fonction $f(x) = \frac{1 - \lambda x}{1 + \lambda x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ pour $\lambda > 0$.

Solution 2.4.10

(1) On fait d'abord une recherche en dimension 1, ce qui donne l'idée d'utiliser l'égalité

$$\begin{aligned} (A^{-1}(y - Ax)|y - Ax) &= (A^{-1}y|y) - (A^{-1}y|Ax) - (x|y) + (x|Ax) \\ &= (A^{-1}y|y) - 2(x|y) + (x|Ax) \end{aligned}$$

car $(A^{-1}y|Ax) = (Ax|A^{-1}y) = x^T A^T A^{-1}y = x^T y$ (A est symétrique). A étant positive, on en déduit que

$$(x|y) - \frac{1}{2}(Ax|x) = \frac{1}{2}(A^{-1}y|y) - \frac{1}{2}(A^{-1}(y - Ax)|y - Ax) \leq \frac{1}{2}(A^{-1}y|y)$$

soit $g(y) = \frac{1}{2}(A^{-1}y|y)$, l'égalité n'étant obtenue que si $x = A^{-1}y$.

(2) • Si $y \notin \text{Im } A$ alors $\exists x_0 \in \text{Ker } A$ tel que $(y|x_0) > 0$ ($\text{Ker } A = \text{Im } A^\perp$, cf. *théorème 4.5 page 202*). Si on pose $x = \lambda x_0$ alors $(x|y) - \frac{1}{2}(Ax|x) = \lambda(x_0|y)$ i.e. $g(y) \geq \lambda(x_0|y)$ pour tout λ donc $g(y) = +\infty$.

- Si $y \in \text{Im } A$, le résultat est immédiat en utilisant le 1 (ici, x_0 ne sera pas unique).

Solution 2.4.11

- (1) On vérifie que $r_A(tx) = r_A(x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ i.e. $r_A(x)$ est invariant par homothétie.
- (2) Si on écrit $(Ax|x)$ dans une base orthonormée pour la forme quadratique associée, on aura : $(Ax|x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ où l'on aura rangé les valeurs propres de A dans l'ordre croissant. On a alors immédiatement $r_A(x) \in [\mu, \lambda]$ (cf. *théorème 4.9 page 205*), les bornes sont atteintes (ici, pas besoin de topologie).

Ensuite, entre chaque λ_i on pourra appliquer le T.V.I. à la fonction $r_A(x_i \cos \theta + x_{i+1} \sin \theta)$ où x_i est un vecteur propre associé à λ_i et donc $r_A(S(0, 1)) = [\mu, \lambda]$.

Remarque : si on utilise la connexité par arcs (cf. *paragraphe 5.3.2 pages 236 et 237*) alors $r_A(x) = (Ax|x)$ est une fonction continue sur $S(0, 1)$. Comme $S(0, 1)$ est connexe par arcs, on en déduit que $r(S(0, 1))$ est aussi connexe par arcs (cf. *théorème 5.31 page 237*). La conclusion est alors immédiate si on utilise les propriétés $r_A(x) \in [\mu, \lambda]$, $\mu \in r_A(S(0, 1))$ et $\lambda \in r_A(S(0, 1))$.

Solution 2.4.12 Après une rotation d'angle $\pi/4$, $X = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$, $Y = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$ on obtient l'équation

$$(1 + at)X^2 + (1 - at)Y^2 + \sqrt{2}a(X - Y) = a^2 t^2.$$

Quitte à changer x en $-x$, y en $-y$ on peut supposer $a \geq 0$ et $t \geq 0$.

- Si $at = 1$ alors l'équation devient $2X^2 + \sqrt{2}a(X - Y) = 1$ ce qui donne une parabole.
- Si $at < 1$ alors on obtient une ellipse (ou un cercle si $at = 0$) d'équation

$$(1 + at) \left[X + \frac{a}{\sqrt{2}(1 + at)} \right]^2 + (1 - at) \left[Y - \frac{a}{\sqrt{2}(1 - at)} \right]^2 = a^2 t^2 + \frac{a^2}{2(1 + at)} + \frac{a^2}{2(1 - at)} > 0.$$

- Si $at > 1$ on a une hyperbole qui admet la même équation que ci-dessus.

Solution 2.4.13 Si $Q_i(x, y) + L_i(x, y) + a_i = 0$, $i = 1, 2$ sont les équations de deux coniques propres $\mathcal{C}_i$ (cf. *définition 4.2.6 page 206*) où Q_i est le polynôme homogène du second degré, L_i le polynôme homogène du premier degré, a_i un réel non nul, alors la C.N.S. cherchée est :

les matrices M_1 et M_2 des formes quadratiques Q_1 et Q_2 admettent des valeurs propres proportionnelles et les déterminants des formes quadratiques obtenus en remplaçant x par $\frac{X}{T}$ et Y par $\frac{Y}{T}$ et en multipliant par T^2 sont de même signe (en supposant que le rapport de proportionnalité entre les valeurs propres est positif).

En effet, si les coniques sont semblables, en remarquant que si l'une d'elle est une parabole alors l'autre aussi (les paraboles n'ont pas de centre de symétrie), on distingue deux cas :

- elles sont dégénérées (i.e. ce sont des paraboles) alors M_1 et M_2 admettent une valeur propre nulle et une valeur propre non nulle ce qui convient bien et le déterminant est positif,
- les valeurs propres de M_1 et M_2 sont non nulles, on peut trouver deux repères ortho-normés $\mathcal{R}_i$ tels que $\mathcal{C}_i$ admette dans $\mathcal{R}_i$ une équation de la forme $\frac{x^2}{a_i^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b_i^2} = 1$, $\varepsilon = \pm 1$ (on a la même valeur pour ε car une ellipse ne peut être semblable à une hyperbole, la première est une courbe bornée, l'autre non). Comme elles sont semblables alors cela

signifie que les deux équations doivent se déduire l'une de l'autre par homothétie i.e. $\exists \lambda \neq 0 \mid a_2^2 = \lambda a_1^2$ et $b_2^2 = \lambda b_1^2$ ce qui achève de prouver le sens direct.

Réciproque : si les valeurs propres sont proportionnelles alors, après changement de repère on aura les équations réduites décrites ci-dessus avec un coefficient de proportionnalité ce qui permettra de conclure (si on a affaire à des paraboles alors on a vu, cf. *question (i) page 46*, qu'elles étaient semblables) (le signe du déterminant est là pour nous assurer que les seconds membres se correspondent).

Dans le cas qui nous préoccupe, la première matrice admet $(1, -2)$ comme valeurs propres et la deuxième $(-2, 4)$ donc on peut conclure (après avoir vérifié cependant que ces coniques étaient propres).

Solution 2.5.1

(1) On a un paraboloïde hyperbolique : on écrit

$$(x + y)(y - z) = \frac{1}{4} [(x + 2y - z)^2 - (x + z)^2]$$

et donc, en posant
$$\begin{cases} X &= \frac{1}{\sqrt{6}}(x + 2y - z) \\ Y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x + z) \\ Z &= \frac{1}{\sqrt{3}}(x - y - z) \end{cases}, \text{ l'équation devient (dans le nouveau repère orthonormé)}$$

$$\frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}Y^2 + \sqrt{3}Z = 0.$$

(2) C'est un cylindre hyperbolique : $[(x + z)^2 - 2(y + z)^2 + 2(y + z) + 3 = 0]$.

(3) C'est un cylindre parabolique : $[(x - 3y + 2z)^2 + 4x - 2y + z + 4 = 0]$.

Solution 2.5.2

Un vecteur orthogonal au plan tangent à C en $M(x, y, z)$ s'écrit
$$\begin{cases} X = bz + cy \\ Y = az + cx \\ Z = ay + bx \end{cases}, \text{ on résout ce}$$

système en (x, y, z) et on reporte dans l'équation de C pour obtenir l'équation de l'ensemble cherché :

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 - 2(bcYZ + caZX + abXY) = 0$$

qui est un autre cône.

Solution 2.5.3

(1) Équation des plans (A, D) et (A', D) :

$$(q - \varepsilon bh)x - (p + \varepsilon ah)y + (pb - aq)(z - \varepsilon h) = 0$$

où $\varepsilon = 1$ pour (A, D) , -1 pour (A', D) .

- $d(A, D) = d(A', D) \Leftrightarrow ap + bq = 0$.
- En posant $p = \lambda b, q = -\lambda a : (A, D) \perp (A', D) \Leftrightarrow \lambda^2(a^2 + b^2 + 1) = h^2$.
- Enfin $d(A, D)^2 = R^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = h^2 - \frac{R^2}{a^2 + b^2}$ (après simplification par $a^2 + b^2$).

On doit avoir : $R \leq |h|\sqrt{2}$; en choisissant $\lambda = \sqrt{h^2 - R^2/2}$ on trouve : $a = \frac{R}{\sqrt{2h^2 - R^2}} \cos t$, $b = \frac{R}{\sqrt{2h^2 - R^2}} \sin t$ (donc $R < |h|\sqrt{2}$). On en déduit l'angle $\alpha = \widehat{Oz, D}$ avec $\cos \alpha = \sqrt{1 - R^2/(2h^2)}$, $\sin \alpha = \frac{R\sqrt{2}}{2h}$.

(2) On trouve un cercle de centre O , de rayon $R/\sqrt{2}$.

(3) C'est un hyperboloïde à une nappe :

$$(2h^2 - R^2)(x^2 + y^2) - R^2 z^2 = \frac{R^2}{2}(2h^2 - R^2).$$

Solution 2.5.4

(1) M appartient à un cercle ssi $\overrightarrow{OM} = r(\overrightarrow{u} \cos \theta + \overrightarrow{v} \sin \theta)$ donc

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{A} &\Leftrightarrow q(\overrightarrow{OM}) = 1 \\ &\Leftrightarrow q(\overrightarrow{u}) \cos^2 \theta + q(\overrightarrow{v}) \sin^2 \theta + \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{r^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}[q(\overrightarrow{u}) + q(\overrightarrow{v})] + \frac{1}{2}[q(\overrightarrow{u}) - q(\overrightarrow{v})] \cos 2\theta + \varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \sin 2\theta = \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

et la famille $(1, \cos 2\theta, \sin 2\theta)$ étant libre on en déduit que $\varphi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$, $q(\overrightarrow{u}) = q(\overrightarrow{v})$ (et $q(\overrightarrow{u}) + q(\overrightarrow{v}) = \frac{2}{r^2}$).

Remarque : ceci est en fait une C.N.S.

(2) Ordonnons les réels $a \leq b \leq c$.

- Si $a = b = c$, tout plan convient.
- Si $a < c$ alors, en prenant $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ comme équation pour P et en choisissant $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, on obtient (on suppose $(\alpha, \gamma) \neq (0, 0)$ sinon $y = 0$ et on obtient une ellipse)

$$\overrightarrow{u} = \frac{\gamma \overrightarrow{i} - \alpha \overrightarrow{k}}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}, \quad \overrightarrow{v} = \frac{-\alpha \beta \overrightarrow{i} + (\alpha^2 + \gamma^2) \overrightarrow{j} - \beta \gamma \overrightarrow{k}}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}$$

alors,

- la condition (1) se traduit par $\alpha\beta\gamma = 0$
- et la condition (2) par $\frac{\alpha^2\beta^2}{a^2} + \frac{(\alpha^2 + \gamma^2)^2}{b^2} + \frac{\beta^2\gamma^2}{c^2} = \left(\frac{\gamma^2}{a^2} + \frac{\alpha^2}{c^2}\right)$.

On étudie alors les 3 cas :

- $\alpha = 0$ alors on a $\frac{\gamma^2}{a^2} = \gamma^2 \left(\frac{\gamma^2}{b^2} + \frac{\beta^2}{c^2}\right)$.

* Si $\gamma \neq 0$ alors en simplifiant par γ^2 on obtient $\frac{\gamma^2 + \beta^2}{a^2} = \frac{1}{a^2} = \frac{\gamma^2}{b^2} + \frac{\beta^2}{c^2}$

ce qui est impossible car $\frac{1}{a^2} > \frac{1}{c^2}$.

* Si $\gamma = 0$ alors $\beta = 1$ et le plan admet pour équation $y = 0$. L'intersection n'est pas un cercle.

- $\beta = 0$ alors, comme $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$, l'équation devient $\alpha^2 \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}$.

– $\gamma = 0$ on se retrouve dans les mêmes conditions que dans le premier cas.

Conclusion : tous les plans qui répondent à la question contiennent l'axe Oy (si $a = b$ on a un ellipsoïde de révolution).

Solution 2.5.5 Écartons le cas où le cône est un plan, alors son sommet n'est pas dans le plan de la parabole. Pour des raisons de symétrie, le sommet du cône se trouve dans le plan xOz privé de l'axe Ox .

Soit donc $S(x_0, 0, z_0)$ le sommet du cône, $z_0 \neq 0$, l'équation du cône de sommet S ayant pour ensemble directeur la parabole $(\mathcal{P})$ est : $z_0^2 Y^2 - 2pZ(x_0 Z - z_0 X) = 0$, $Z \neq 0$. ce cône est

de révolution ssi la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & pz_0 \\ 0 & z_0^2 & 0 \\ pz_0 & 0 & -2px_0 \end{pmatrix}$ admet une valeur propre double. Le

polynôme caractéristique de A est égal à : $(z_0^2 - \lambda)(\lambda^2 + 2px_0 - p^2 z_0^2)$. Comme le trinôme du second degré $\lambda^2 + 2px_0 - p^2 z_0^2$ ne peut avoir de racine double (le produit des racines est négatif) la C.N.S. s'écrira : $z_0^4 + 2pz_0^2 - p^2 z_0^2 = 0$, $z_0 \neq 0$ i.e. $z_0^2 + 2px_0 - p^2 = 0$.

Solution 2.5.6

(1) $M(x, y, z)$ appartiendra au cône ssi la droite AM est tangente à la surface Σ . L'équation paramétrique de la droite AM est $X = \frac{\lambda + x}{1 + \lambda}$, $Y = \frac{\lambda + y}{1 + \lambda}$, $Z = \frac{z}{1 + \lambda}$ d'où la condition $(\lambda + x)^2 + 2(\lambda + y)^2 - z^2 - (1 + \lambda)^2 = 0$ a une racine double i.e. $x^2 - 2z^2 - 4xy + 2x + 4y - 3 = 0$.

(2) Γ a pour équation $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 2z^2 - 4xy + 2x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$. En éliminant z entre ces deux

équations, on trouve $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - z^2 - 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ intersection d'un H1 et d'un plan, c'est

une conique. En projection sur le plan yOz : $6y^2 - z^2 - 4y = 0$ est une hyperbole de centre $\omega(0, 1/3, 0)$ de directions asymptotiques $(0, 1, \pm\sqrt{6})$. On relève sur le plan de l'hyperbole, le centre est $\Omega(1/3, 1/3, 0)$, les directions asymptotiques sont $(-2, 1, \pm\sqrt{6})$. Ces dernières sont orthogonales, on a une hyperbole équilatère.

Solution 2.5.7 Soit $P = ax + by + cz - h = 0$ l'équation du plan cherché. En faisant un changement de repère orthonormé pour que l'équation de P soit $Z = h'$ (avec $\vec{K} = \frac{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$), l'équation de C s'écrira :

$$x^2 + y^2 + z^2 + (y^2 - 2z^2) = X^2 + Y^2 + Z^2 + (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)(\alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z) = 0$$

(la quantité $x^2 + y^2 + z^2$ se conserve par changement de base orthonormée et on a factorisé $y^2 - 2z^2$).

Il est donc nécessaire que l'une des formes affines $\alpha X + \beta Y + \gamma h'$, $\alpha' X + \beta' Y + \gamma' h'$ soit constante pour que l'intersection soit un cercle et donc que P soit parallèle à l'un des plans : $y \pm z\sqrt{2} = 0$. Cas où $P = y - z\sqrt{2} - h$: on trouve effectivement un cercle de centre $(0, -h/3, -2\sqrt{2}h/3)$ de rayon $\sqrt{2}|h|/\sqrt{3}$.

L'autre cas se ramène au précédent en faisant une symétrie par rapport au plan xOy .

Le lieu cherché est donc la réunion des droites d'équations : $\begin{cases} x = 0 \\ z = \pm 2\sqrt{2}y \end{cases}$.

Solution 3.1.1 L'implication directe est immédiate car $\overline{(f(x)|x)} = (x|f(x)) = (x|f(x))$ donc $(f(x)|x) \in \mathbb{R}$.

Réciproque : en exprimant que

$$(f(x+y)|x+y) = \underbrace{(f(x)|x)}_{\in \mathbb{R}} + (f(x)|y) + (y|f(x)) + \underbrace{(f(y)|y)}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}$$

et que

$$(f(x+iy)|x+iy) = \underbrace{(f(x)|x)}_{\in \mathbb{R}} + (f(x)|iy) + (iy|f(x)) + \underbrace{(f(iy)|iy)}_{\in \mathbb{R}} \in \mathbb{R}$$

on a : $(f(y)|x) + (f(x)|y) = 2\alpha \in \mathbb{R}$ et $-(f(y)|x) + (f(x)|y) = 2i\beta$ où $\beta \in \mathbb{R}$ donc $(f(x)|y) = \alpha + i\beta$, $(f(y)|x) = \alpha - i\beta$ soit $(f(x)|y) = (x|f(y))$.

Solution 3.1.2 En fait tout marche de la même manière, tenir compte de l'identité de polarisation qui n'est plus la même dans le cas complexe.

L'exemple le plus classique est celui de la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ où $e_n(t) = e^{int}$, on utilise alors la formule de Parseval qui signifie en fait que cette famille est totale. On peut aussi indexer cette famille par $\mathbb{N}$, poser $f_0 = e_0$, $f_1 = e_1$, $f_2 = e_{-1}, \dots$, $f_{2n-1} = e_n$, $f_{2n} = e_{-n}$.

Solution 3.2.1

- (1) Classique là encore, cf. exercice 1.3.4.
- (2) L'application $A \mapsto A^*$ vérifie les mêmes propriétés que $A \mapsto A^T$. On se sert aussi de la propriété $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ (mais attention, ici cela ne signifie pas que l'on peut permuter le produit de matrices comme on veut en prenant la trace). On développe donc les produits

$$\begin{aligned} (A^*B - BA^*)(A^*B - BA^*) &= \underbrace{B^*AA^*B}_1 + \underbrace{-B^*ABA^*}_2 + \underbrace{-AB^*A^*B}_3 + \underbrace{AB^*BA^*}_4 \\ -(AB - BA)^*(AB - BA) &= \underbrace{-B^*A^*AB}_5 + \underbrace{B^*A^*BA}_6 + \underbrace{A^*B^*AB}_7 + \underbrace{-A^*B^*BA}_8 \\ -(A^*A - AA^*)(B^*B - BB^*) &= \underbrace{-A^*AB^*B}_9 + \underbrace{A^*ABB^*}_{10} + \underbrace{AA^*B^*B}_{11} + \underbrace{-AA^*BB^*}_{12}. \end{aligned}$$

On prend ensuite les traces de chacune des matrices obtenues.

- (1) = $\text{Tr}(B^*AA^*B) = \text{Tr}(AA^*BB^*)$ qui se simplifie avec (12).
 - (2) = $-\text{Tr}(ABA^*B^*)$ qui se simplifie avec (7) = $\text{Tr}(B^*ABA^*) = \text{Tr}(ABA^*B^*)$.
 - (3) = $-\text{Tr}(AB^*A^*B)$ qui se simplifie avec (6).
 - (4) = $-\text{Tr}(AB^*BA^*)$ qui se simplifie avec (9) = $-\text{Tr}(AB^*BA^*)$.
 - (5) = $-\text{Tr}(A^*ABB^*)$ qui se simplifie avec (10).
 - (8) = $-\text{Tr}(B^*BAA^*)$ et (11) = $\text{Tr}(AA^*B^*B) = \text{Tr}(A^*B^*BA) = \text{Tr}(B^*BAA^*)$.
- (3) Immédiat, en effet $AA^* = A^*A \Leftrightarrow \|A^*B - BA^*\| = \|AB - BA\|$.