ESPACES EUCLIDIENS ET PRÉHILBERTIENS

1. Espaces préhilbertiens réels

1.1. **Formes bilinéaires symétriques.**

Exercice 1.1.1. **I**

Trouver une C.N.S. pour qu'une forme quadratique q sur $\mathbb{R}^n$ euclidien soit telle qu'il existe n vecteurs v_i, $i \in [1,n]$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

où $a_{ij} = (v_i|v_j)$ pour tout $(i,j) \in [1,n]^2$.

Exercice 1.1.2. **I**

Soit $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. À tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on associe la matrice :

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & \ldots & x_n \\ x_1 & & & \\ \vdots & & A & \\ x_n & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

et on pose $Q(x) = \det(M(x))$.

(1) Montrer que Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.
(2) Déterminer la matrice de Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et, si A est inversible, dans la base des vecteurs colonnes de la matrice A.

Exercice 1.1.3. **I**

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, v un vecteur non nul de E, et q une forme quadratique définie positive sur E.
On pose, pour tout $x \in E$: $F(x) = \inf\{q(x + \lambda v), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(1) Montrer que F est une forme quadratique sur E.
(2) Que penser de la restriction de F à H, un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(v)$?

Exercice 1.1.4. **D C**

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout k, on note Δ_k le mineur principal extrait de A obtenu en conservant les k premières lignes et colonnes. On suppose que $\forall k \in [1,n]$, $\Delta_k \neq 0$.

(1) Prouver qu'il existe un couple unique $(L, U) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ de matrices triangulaires, L (lower) inférieure, U (upper) supérieure, de diagonales formées de 1, tel que $A = LDU$ où $D = \mathrm{Diag}(\Delta_1, \Delta_2/\Delta_1, \ldots, \Delta_n/\Delta_{n-1})$.
(2) Si A est symétrique, prouver que $L^T = U$.

(3) En déduire que si q est une forme quadratique non dégénérée de matrice A (vérifiant les conditions du 1.) alors il existe des formes linéaires indépendantes l_i telles que
$$q(x) = \Delta_1 l_1(x)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} l_2(x)^2 + \cdots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} l_n(x)^2.$$

1.2. **Produit scalaire.**

EXERCICE 1.2.1. $\boxed{\textbf{D}}$

Cet exercice utilise les résultats du chapitre 5 sur les espaces vectoriels normés (cf. *pages 217..256*).

Soit E l'espace vectoriel réel des suites $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $\sum x_k^2$ converge (cf. *définition 5.3.5 page 245* et *théorème 5.43 page 245*). Pour x et y dans E, on pose $(x|y) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k y_k$ et on note $\|.\|$ la norme associée.

Si $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée d'éléments de E, montrer qu'il existe une sous-suite $(y^k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la suite précédente et un élément a de E tels que, pour tout z de E, $\lim_{k\to+\infty}(y^k|z) = (a|z)$.

On dit que toute boule fermée de E est faiblement compacte.

(On pourra commencer par prouver que cette propriété est vraie pour $z = e^n$ où $e^n = (\delta_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$, puis on l'étendra à $F = \mathrm{Vect}(e^n)$ et enfin à E.)

EXERCICE 1.2.2. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, $a \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que la matrice $C = \begin{pmatrix} a & B^{\mathrm{T}} \\ B & A \end{pmatrix}$ est définie positive.

Trouver le minimum de $J : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $J(X) = X^{\mathrm{T}}AX - 2B^{\mathrm{T}}X + a$.

1.3. **Orthogonalité.**

EXERCICE 1.3.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Cet exercice utilise les résultats du chapitre 5 sur les espaces vectoriels normés (cf. *pages 217..256*).

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale dans un espace préhilbertien E.

Montrer que $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas un compact de E.

EXERCICE 1.3.2. $\boxed{\textbf{D C}}$

Cet exercice utilise les résultats du chapitre 5 sur les espaces vectoriels normés (cf. *pages 217..256*).

Soit H un espace de Hilbert (cf. *définition 5.1.37 page 233*).

(1) Montrer que, si F est un sous-espace fermé de H, alors : $F = H \Leftrightarrow F^{\perp} = \{0\}$.
(2) Soit f une forme linéaire continue sur H. Montrer qu'il existe $u \in H$ unique tel que : $\forall x \in H,\ f(x) = (u|x)$.
(3) Étudier l'application $f \mapsto u$ (linéarité, isomorphisme, isométrie).

---

2. Espaces euclidiens

2.1. **Projections orthogonales.**

Exercice 2.1.1. **F**
Soit p et q 2 projecteurs orthogonaux de E euclidien.

(1) Montrer l'équivalence des propositions
 a) $p+q$ est un projecteur orthogonal,
 b) $\forall x \in E$, $(p(x)|q(x)) = 0$,
 c) $p \circ q = 0$,
 d) $\forall x \in \operatorname{Im} p$, $\forall y \in \operatorname{Im} q$, $(x|y) = 0$.

(2) Si $p+q$ est un projecteur orthogonal, montrer que $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$.
Quel est le noyau de $p+q$?

Exercice 2.1.2. **D**
Soit p et q 2 projecteurs orthogonaux de E euclidien, on pose $r = p \circ q \circ p$.

(1) Montrer que $\forall (x,y) \in E^2$, $(x|r(y)) = (r(x)|y)$.
(2) Montrer que $\forall x \in E$, $\|r(x)\| \leqslant \|x\|$ et $(x|r(x)) \geqslant 0$.
(3) Soit $x \in E$, étudier la suite $(r^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2.1.3. **F**
Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ euclidien défini par les équations :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Déterminer la projection orthogonale sur F et pour $x \in \mathbb{R}^4$, calculer $\mathrm{d}(x, F)$.

Exercice 2.1.4. **F**
Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien, on définit F par

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 0 \quad \sum_{i=1}^{4} i x_i = 0.$$

Former la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base canonique.

2.2. **Réduction des endomorphismes autoadjoints.**

Exercice 2.2.1. **F**
Diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} e & a \\ a & e \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & c \\ c & b \end{pmatrix}$ (on diagonalisera simultanément A et B puis on permutera les lignes et les colonnes pour avoir $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}$).

Exercice 2.2.2. $\boxed{\textbf{F}}$

Diagonaliser la matrice d'ordre n : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.2.3. $\boxed{\textbf{F C}}$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ E espace euclidien de dimension n, trouver alors $\sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$. C'est ce qu'on appellera norme subordonnée de u au chapitre 5 (cf. *définition 5.1.32 page 231*) et que l'on notera simplement $\|u\|$.

Exercice 2.2.4. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit E un espace vectoriel euclidien ($\dim E = n \geqslant 2$) et u un endomorphisme symétrique de valeurs propres strictement positives.

S étant la sphère unité ($S = \{x \in E,\ \|x\| = 1$), déterminer le minimum sur S de

$$f(x) = (u(x)|x).(u^{-1}(x)|x).$$

Exercice 2.2.5. $\boxed{\textbf{I}}$

Soient A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définies positives. On pose $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij}b_{ij}$.

Montrer que C est définie positive (si on appelle q_B et q_C les formes quadratiques associées aux matrices B et C, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, on montrera qu'il existe des vecteurs $\overrightarrow{x}_k$ tels que $q_C(\overrightarrow{x}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k q_B(\overrightarrow{x}_k)$).

Exercice 2.2.6. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ euclidien représenté par $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans une base orthonormée Soient $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A.

Montrer que, pour $k \in [1, n]$:

$$\sum_{i=1}^{k} a_{ii} \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_j$$

(prendre (ε_i) une base orthonormée de vecteurs propres associés aux (λ_i) et montrer que $a_{ii} = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j (e_i|\varepsilon_j)^2 \leqslant \lambda_k + \sum\limits_{j=1}^{k} (\lambda_j - \lambda_k)(e_i|\varepsilon_j)^2$).

Exercice 2.2.7. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit E un e.v. euclidien (de dimension finie) et u un endomorphisme autoadjoint. Pour $x \in E$ on pose : $f(x) = \|u(x)\|^2 - (u(x)|x)^2$.

(1) f est-elle minorée ?
(2) À quelle condition f est-elle majorée ?
(3) Dans le cas où f est majorée, calculer $\sup\limits_{x \in E} f(x)$.

EXERCICE 2.2.8. **I**

E est l'ensemble des matrices réelles d'ordre n symétriques définies positives.
Soit $A = (a_{ij}) \in E$.

(1) Montrer que : $\forall(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in (\mathbb{R}^*)^n$, $B = (\gamma_i\gamma_j a_{ij}) \in E$.

(2) Montrer que $(\det A)^{1/n} \leqslant \dfrac{1}{n}\operatorname{Tr}(A)$ et en déduire que :

$$\det A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(3) Si $C \in E$ telle que $\det C = 1$ alors prouver que

$$\sqrt[n]{\det A} \leqslant \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(AC).$$

Quels sont les C pour lesquels il y a égalité ?
Prouver enfin que $\sqrt[n]{\det A} + \sqrt[n]{\det C} \leqslant \sqrt[n]{\det(A+C)}$ pour C de déterminant quelconque.
Étudier les cas d'égalité.

EXERCICE 2.2.9. **D**

Soit $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ une matrice symétrique positive telle que $\forall i \neq j$, $a_{ij} < 0$.
Montrer que $\forall i \in [1, n]$, $a_{ii} > 0$ et $\operatorname{Rg} A \in \{n-1, n\}$ (on procédera par récurrence en écrivant $Q(x) = \dfrac{1}{a_{nn}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{nj}x_j\right)^2 + R(x)$ où $R(x) = \sum\limits_{(i,j)\in[1,n-1]} \left(a_{ij} - \dfrac{a_{ni}a_{nj}}{a_{nn}}\right) x_i x_j$).

EXERCICE 2.2.10. **D**

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{L}(E)$ de valeurs propres $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n$.

(1) Si $\mathcal{F}_k$ désigne l'ensemble des s.e.v. de E de dimension k et S la sphère unité de E, montrer que

$$\lambda_k = \sup_{F\in\mathcal{F}_k} [\inf_{x\in F\cap S} (u(x))|x)].$$

(2) Déterminer $\inf\limits_{F\in\mathcal{F}_k} [\sup\limits_{x\in F\cap S} (u(x)|x)]$.

(3) Soit A un espace vectoriel normé, $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E et $\varphi\ : t \in A \mapsto u_t \in \mathcal{S}(E)$ une application continue.
Pour $k \in [1, n]$, et $t \in A$, on note $\lambda_k(t)$ la $k^{\text{ième}}$ plus grande valeur propre de U_t. Montrer que l'application $\psi\ : t \in A \mapsto \lambda_k(t) \in \mathbb{R}$ est continue.

EXERCICE 2.2.11. **D**

Soit H une matrice symétrique de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
On note $E = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | \|X\| = \|Y\| = 1, (X|Y) = 0\}$.
Démontrer que

$$\sup_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| = 2 \sup_{(X,Y)\in E} |X^{\mathrm{T}} H Y|.$$

Exercice 2.2.12. $\boxed{\textbf{D}}$

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique.

(1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et L un endomorphisme auto-adjoint défini positif. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \|x\|^2 + (L^{-p}(y)|y) \quad \geqslant \quad ((I+L)^{-p}(x+y)|x+y).$$

(2) Soient H et K deux endomorphismes auto-adjoints définis positifs. Montrer que :
$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (H^{-1}(x)|x) + (K^{-1}(y)|y) \quad \geqslant \quad ((H+K)^{-1}(x+y)|x+y).$$

2.3. **Quadriques usuelles.**

Exercice 2.3.1. $\boxed{\textbf{F C}}$

Montrer qu'il existe une similitude qui transforme la surface S d'équation $3x^2 + 5y^2 + z^2 = 1$ en la surface S' d'équation $5x^2 + 7y^2 + 9z^2 + 2axy + 2ayz = 1$ pour une valeur de a que l'on déterminera (dans une base orthonormée , la matrice d'une similitude est de la forme λU où $U \in O(3)$).

Exercice 2.3.2. $\boxed{\textbf{F}}$

Discuter la nature de la quadrique définie par :
$$x^2 + (2m^2+1)(y^2+z^2) - 2(xy+yz+xz) = 2m^2 - 3m + 1 \quad (m \in \mathbb{R}).$$

Exercice 2.3.3. $\boxed{\textbf{F T}}$

Déterminer l'équation réduite dans un repère orthonormé des quadriques :

(1) $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz + 2x + 2y - 4z + 2 = 0$
(2) $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2yz + 2xz + 4x - 2y - 3z - 1 = 0$.

Exercice 2.3.4. $\boxed{\textbf{I}}$

Discuter, suivant $(a,b,c) \in \mathbb{R}^{*3}$ la nature de la quadrique
$$a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) = 1.$$
(On suppose que a, b, c ne sont pas égaux.) Montrer qu'une C.N.S. pour que cette surface soit de révolution est $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$.

Exercice 2.3.5. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit E un espace euclidien de dimension finie n, f un endomorphisme autoadjoint de E dont la forme quadratique associée $q\ : x \mapsto (f(x)|x)$ est positive. On désigne par $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f et par A l'ensemble des bases orthonormées de E.
Montrer que
$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \inf_{(e_i)\in A} \prod_{i=1}^{n} (f(e_i)|e_i).$$

---

3. Espaces préhilbertiens complexes, hermitiens

3.1. Espaces vectoriels hermitiens.

Exercice 3.1.1. **I**

Soit f un endomorphisme d'un espace hermitien E de dimension n tel que :

$$\forall u \in E, \|u\| = 1, |(f(u)|u)| \leqslant 1.$$

Soient $(v_1, \ldots, v_k)$ une famille orthonormée de k vecteurs de E ($k \leqslant n$) et C la matrice de $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ de terme général : $c_{ij} = (f(v_i)|v_j)$.
Montrer que, si λ est une valeur propre de C, alors $|\lambda| \leqslant 1$. En déduire que $|\det C| \leqslant 1$.

Exercice 3.1.2. **D**

Soient $a_1, \ldots, a_p$ des points du plan affine euclidien $\mathcal{P}$. On pose :

$$E = \{m \in \mathcal{P} | \prod_{j=1}^{p} \|\overrightarrow{a_j m}\| < 1\}.$$

Montrer que E ne contient aucun disque fermé de rayon 1.
On montrera, à l'aide d'un produit scalaire hermitien, que, si P est un polynôme unitaire alors $\sup\limits_{|z|=1} |P(z)| \geqslant 1$.

Exercice 3.1.3. **I**

On pose $J = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{C})$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $M^* J M = J$ (M^* désigne la matrice $\overline{M}^{\mathrm{T}}$).
Montrer que A et D sont inversibles.

Indication 1.1.1 La C.N.S. cherchée est q positive.

Indication 1.1.2

(1) On a $Q(x) = -\sum_{(i,j)\in[1,n]^2} A_{ij} x_i x_j$ où A_{ij} est le cofacteur de a_{ij} dans la matrice A.
(2) La matrice de Q dans la base canonique est donc la matrice $B = -(A_{ij})$ et la matrice de Q dans la base des vecteurs colonnes de A sera $-\det A.A$.

Indication 1.1.3

(1) Soit B la forme polaire de q alors $F(x) = q(x) - \frac{B(x,v)^2}{q(v)}$.
(2) Avec l'inégalité de Schwarz on prouve que F est positive, la restriction de F à H est définie positive.

Indication 1.1.4

(1) C'est le pivot de Gauss assorti d'une récurrence pour prouver que les termes sur la diagonale de D sont bien ceux annoncés, on peut aussi prouver directement le résultat par récurrence.
Pour l'unicité, si $LDU = L'D'U'$ alors $(L'D')^{-1}LD = U'U^{-1}$ et conclure.
(2) $A = LDU = A^T = U^T D L^T$ et compte tenu de l'unicité, on a $L^T = U$.

(3) $X^TAX = Y^TDY$ où $Y = UX$, donc $q(x) = \Delta_1 l_1(x)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} l_2(x)^2 + \cdots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} l_n(x)^2$ où $l_i(x) = y_i$.

Indication 1.2.1 Vérifier la propriété pour $z = e^n$, puis, par linéarité, pour tout z appartenant à $F = \mathrm{Vect}(e^n)$ et enfin, par densité, à E (on utilise le procédé diagonal pour extraire une suite convergente), puis par bilinéarité du produit scalaire, écrire que $\forall z \in F,\ \lim_{k\to+\infty} (y^k|z) = (a|z)$. Pour conclure, utiliser la densité de F dans E :

Indication 1.2.2 $J(X)$ se présente comme un trinôme du second degré, il semble naturel de vérifier que J présente un minimum en $X_0 = A^{-1}B$:

Indication 1.3.1 Pour $i \neq j$, $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ et utiliser ceci pour prouver que l'on ne peut extraire de suite convergente.

Indication 1.3.2

(1) Pour la réciproque, raisonner par l'absurde, si $F \neq H$ prenons $a \in H \setminus F$ et montrer que la suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que : $\|a - x_n\|^2 \leqslant \mathrm{d}(a, F)^2 + \frac{1}{n}$ est de Cauchy, soit b sa limite, montrer que $a - b \in F^\perp$ et $F^\perp \neq \{0\}$.
(2) Si f est non nulle, $F = \operatorname{Ker} f$ est un hyperplan fermé de H soit $a \in F^\perp$, $\|a\| = 1$ et prendre $u = \alpha a$, α bien choisi.
(3) Si H' l'ensemble des formes linéaires continues sur H, l'application $f \in H' \mapsto u \in H$ est linéaire, elle admet une application réciproque : $\varphi\ : u \in H \mapsto (x \mapsto (u|x))$, on a ainsi une isométrie entre H et H'.

Indication 2.1.1

(1) Pour (a) $\Rightarrow$ (b)montrer que $pq = -qp$ puis utiliser le caractère orthogonal de p et q pour obtenir $(p(x)|q(x)) = 0$.
(b) $\Rightarrow$ (c) : montrer que $(qp(x)|y) + (y|pq(x)) = 0$ puis, en composant par p à droite puis à gauche que $pq = 0$.
(c) $\Rightarrow$ (d) : immédiat.
(d) $\Rightarrow$ (a) : montrer que $pq = qp = 0$ puis que $p + q$ est un projecteur orthogonal.
(2) On utilise le (1) : tout d'abord $\mathrm{Im}(p+q) \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ est immédiat. Montrons l'autre inclusion : si $x = p(y) + q(z)$ alors $p(x) = p(y)$ car $pq = 0$ et $q(x) = q(z)$ car $qp = 0$ donc $x = p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}(p + q)$.
Le noyau de $p + q$ vaut $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$: en effet, l'inclusion $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p + q)$ est évidente, montrons l'autre inclusion : si $p(x) + q(x) = 0$ alors, en composant par p et par q on arrive à $p(x) = q(x) = 0$.

Indication 2.1.2 1 : on utilise le caractère auto-adjoint de p et q.
2 : on a $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
3 : penser à écrire $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q \oplus F$ où $F \cap \operatorname{Im} q = \{0\}$.

Indication 2.1.3 Prendre une base orthonormée de F, la projection orthogonale sur F admet comme matrice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Avec $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$: $\mathrm{d}(x, F) = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2\right]$.

Indication 2.1.4 La matrice de s vaut $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Indication 2.2.1 On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, $S = S^{-1}$ obtenue à partir de la matrice unité d'ordre 4 en permutant les $2^{\text{ième}}$ et $3^{\text{ième}}$ lignes, alors
$R^{-1}S^{-1}R^{-1}MRSR = \mathrm{Diag}(e+a+b+c, e+a-b-c, e-a+b-c, e-a-b+c)$.

Indication 2.2.2 Avec $P = \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} & -\sqrt{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{n-2} & \\ 1 & 1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}$ on a
$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1+\sqrt{n-1}, 1-\sqrt{n-1}, 1, \dots, 1)$.

Indication 2.2.3 On trouve $\|u\| = \sup\limits_{i \in [1,n]} \lambda_i$ (en réduisant la forme quadratique $q(x) = \|u(x)\|^2$).

Indication 2.2.4 On se place dans une base orthonormée de vecteurs propres de u et de u^{-1} et on utilise Cauchy-Schwarz.

Indication 2.2.5 $\exists P \in O(n) : A = P^{\mathrm{T}}DP$ où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i > 0$ d'où $a_{ij} = \sum_{k=1}^n \lambda_k p_{ki}p_{kj}$ et on obtient $q_C(\overrightarrow{x}) = \sum_{i,j,k} \lambda_k p_{ki}p_{kj}b_{ij}x_ix_j$. Poser alors $\overrightarrow{x_k} = \sum_{i=1}^n p_{ki}x_i\overrightarrow{e_i}$ pour trouver $q_C(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k q_B(x_k) \geqslant 0$ et montrer que q_C est définie.

Indication 2.2.6 Si u est l'endomorphisme associé à A écrire que $u(\varepsilon_i) = \lambda_i\varepsilon_i$ et $a_{ii} = (u(e_i)|e_i)$ puis majorer a_{ii} par $\sum_{j=1}^k \lambda_j(e_i|\varepsilon_j)^2 + \lambda_k \sum_{j=k+1}^n (e_i|\varepsilon_j)^2$.

Indication 2.2.7 (1) Écrire f dans une B.O.N. pour u, f n'est pas minorée.
(2) Pour que f soit majorée, il faut que toutes les valeurs propres soient de même signe.
(3) $\sup f(x) = \frac{\lambda_n^2}{4}$ (en prenant les $\lambda_i \geqslant 0$).

Indication 2.2.8

(1) Écrire $B = DAD$ où $D = \mathrm{Diag}(\gamma_i)$.
(2) $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ et utiliser l'inégalité de la moyenne.
Puis $a_{ii} = E_i^{\mathrm{T}}AE_i > 0$, avec $\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$, $b_{ii} = 1$ et utiliser le (1).
(3) Écrire $C = \Delta^{\mathrm{T}}\Delta$ et $AC = \Delta^{-1}F\Delta$, $\det F = \det A$ et $\mathrm{Tr}(AC) = \mathrm{Tr}\, F$ d'où $\sqrt[n]{\det A} \leqslant \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(AC)$. On a égalité ssi $F = \alpha I$ où $\alpha > 0$ soit $C = \sqrt[n]{\det A}.A^{-1}$.
Enfin l'inégalité demandée équivaut à $\sqrt[n]{\det(AC^{-1})} + 1 \leqslant \sqrt[n]{\det(AC^{-1}+I)}$ ce qui est équivalent à $\ln\left[1 + \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln\lambda_i\right)\right] \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln\left(1+\exp(\ln\lambda_i)\right)$ où les λ_i sont les valeurs propres de F.
L'égalité n'a lieu que si $A = \alpha C$ avec $\alpha > 0$.

Indication 2.2.9 Prendre Q la forme quadratique associée à A et utiliser l'inégalité de Schwarz. Faire ensuite la récurrence sur n en posant $\varepsilon_j = e_j - \frac{a_{nj}}{a_{nn}}e_n$ pour $j \in [1, n-1]$.

Indication 2.2.10

(1) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ des vep associés aux vap $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, montrer que $\inf_{x \in F_k \cap S}(u(x)|x) = \lambda_k$. Poser ensuite $E_k = \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_n)$ et montrer que, si $\dim F = k$ alors $F \cap E_k \neq \{0\}$ et conclure à l'inégalité dans l'autre sens.
(2) $\inf_{F \in \mathcal{F}_k}[\sup_{x \in F \cap S}(u(x)|x)] = \lambda_{n+1-k}$.
(3) Prendre u_t et $u_{t'}$ deux images de φ, $\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n$ et $\lambda'_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda'_n$ leurs valeurs propres respectives et montrer que $(u_t(x) - u_{t'}(x)|x) \leqslant \|u_t - u_{t'}\|.\|x\|^2$, en déduire que $(u_{t'}(x)|x) \geqslant (u_t(x)|x) - \|u_t - u_{t'}\|$.
Utiliser alors le résultat du 1 pour obtenir $|\lambda_k - \lambda'_k\| \leqslant \|u_t - u_{t'}\|$.

Indication 2.2.11 Prendre une base orthonormée de vep et ranger les λ_i dans l'ordre croissant. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir $2|X^{\mathrm{T}}HY| \leqslant \lambda_n - \lambda_1$ et prendre $X = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n + e_1)$, $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n - e_1)$.

Indication 2.2.12

(1) Prendre $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de L et étudier le signe de $\Delta = \sum_{i=1}^n \left[x_i^2 + \frac{y_i^2}{\lambda_i^p} - \frac{(x_i+y_i)^2}{(1+\lambda_i)^p}\right]$.

(2) Prendre F la "racine carrée" de H endomorphisme symétrique défini positif et poser $L = F^{-1} \circ K \circ F^{-1}$, montrer que L est autoadjoint défini positif. Utiliser le (1) avec $t = F^{-1}(x)$, $z = F^{-1}(y)$.

Indication 2.3.1 Écrire l'équation de S et S' sous les formes $q(x) = X^{\mathrm{T}}AX = 1$ et $q'(X) = X^{\mathrm{T}}A'X = 1$. Montrer alors que la condition est réalisée ssi $U^{\mathrm{T}}A'U = \lambda^2 A$. Ceci est encore équivalent au fait que les polynômes caractéristiques de A et A' vérifient $P_{A'} = P_{\lambda^2 A}$. On en déduit alors que $\lambda^2 = 7/3$, $a^2 = 80/9$.

Indication 2.3.2

$$\begin{array}{rcl}
m > 1 & : & \text{ellipsoïde,} \\
m = 1 & : & \text{droite } (\lambda_1 = 4,\ \lambda_2 > 0,\ \lambda_3 = 0,\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} = 0, \\
1/2 < m < 1 & : & \text{hyperboloïde à deux nappes,} \\
m = 1/2 & : & \text{cône d'axe } Oz, \\
-1 < m < 1/2 & : & \text{hyperboloïde à une nappe,} \\
m = -1 & : & \text{cylindre à base elliptique,} \\
m < -1 & : & \text{ellipsoïde.}
\end{array}$$

Indication 2.3.3 On obtient les équations réduites suivantes $4X^2 + Y^2 - 2Z^2 + 1 = 0$ et $2X^2 + 3Y^2 + 2\sqrt{6}Z = 0$.

Indication 2.3.4 L'équation de la quadrique s'écrit $Q(x, y, z) = 1$ où Q est une forme quadratique de matrice M et on cherche ses valeurs propres.

- si $a + b + c > 0$ on a un hyperboloïde à une nappe,
- si $a + b + c = 0$, on a un cylindre hyperbolique,
- si $a + b + c < 0$ on a un hyperboloïde à deux nappes.

La surface est de révolution ssi la matrice M a deux valeurs propres égales.

Indication 2.3.5 On se place dans une base orthonormée de vecteurs propres (u_i) de f et $\inf_{(e_i)\in A} \prod_{i=1}^n (f(e_i)|e_i) \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$. On distingue les cas f non inversible et f inversible. Si (e_i) est une base orthonormée quelconque, P la matrice de passage de (u_i) à (e_i) alors $(f(e_i)|e_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j p_{ij}^2$ et on utilise la concavité de la fonction ln.

Indication 3.1.1 Prendre $F = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$, g l'endomorphisme de F qui admet la matrice C dans la base $(v_1, \dots, v_k)$ et montrer que, si u est un vecteur propre de C (donc de g) unitaire, on a : $g(u) = \lambda u$ et $|\lambda| = |(u|g(u))| = |(f(u)|u)| \leqslant 1$.

Indication 3.1.2 Le problème se ramène à prouver que, dans le plan complexe, l'ensemble des z tels que $|P(z)| < 1$ ne contient pas le disque de centre 0 et de rayon 1 ; démontrer pour cela le résultat suivant : si P désigne un polynôme normalisé alors $\sup_{|z|=1} |P(z)| \geqslant 1$.

Indication 3.1.3 Faire le calcul matriciel par blocs dans la relation $M^*JM = J$: $A^*A = I_n + C^*C$, $D^*D = I_p + B^*B$.

1. Solutions :

Solution 1.1.1

- Condition nécessaire :
  on a $q(x)=\sum\limits_{i,j}(x_iv_i|x_jv_j)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_iv_i\right)^2$, q est donc positive et $q(x)=X^{\mathrm{T}}(V^{\mathrm{T}}V)X$ où V est la matrice formée des vecteurs colonnes v_i : $V=(v_1|\dots|v_n)$.
- Condition suffisante :
  soit q une forme quadratique positive sur $\mathbb{R}^n$, A sa matrice dans la base canonique, on peut écrire
  $$q(x)=X^{\mathrm{T}}AX=X^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}I_p&0\\0&0\end{pmatrix}PX$$
  (cf. *interprétation matricielle page 198*). On a donc $A=P^{\mathrm{T}}P$ et on choisira pour V les vecteurs colonnes de P.

Conclusion : la C.N.S. cherchée est q positive.

Solution 1.1.2

(1) En développant selon la première ligne puis selon la première colonne dans chacun des déterminants obtenus, on obtient :
$$Q(x)=-\sum_{(i,j)\in[1,n]^2}A_{ij}x_ix_j$$
où A_{ij} est le cofacteur de a_{ij} dans la matrice A.

(2) La matrice de Q dans la base canonique est donc la matrice $B=-(A_{ij})$.
On utilise ensuite la formule de changement de base pour la matrice d'une forme quadratique en prenant A comme matrice de passage : $B'=A^{\mathrm{T}}BA$.
Comme B est l'opposé de la comatrice de A on a : $BA=-\det A.I_n$ (cf. *proposition 8.5.11 page 157*) et la matrice de Q dans la base des vecteurs colonnes de A sera $-\det A.A$.

Solution 1.1.3

(1) Soit B la forme polaire de q alors $q(x+\lambda v)=q(x)+2\lambda B(x,v)+\lambda^2q(v)$ et le minimum de ce trinôme du second degré est donné par $\lambda=-\dfrac{B(x,v)}{q(v)}$ et il vaut
$$F(x)=q(x)-\frac{B(x,v)^2}{q(v)}.$$
q et $B(.,v)^2$ sont des formes quadratique et comme l'ensemble des formes quadratiques est un espace vectoriel alors F est une forme quadratique.

(2) On utilise alors l'inégalité de Schwarz : $B(x,v)^2\leqslant q(x)q(v)$ et donc F est positive, les seuls vecteurs tels que $F(x)=0$ sont les vecteurs colinéaires à v (cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cf. *remarque 4.1.2 page 197*).
Soit H un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(v)$. La restriction de F à H est définie positive sur H car F est positive et $F(x)=0$ entraîne $x\in\mathrm{Vect}(v)$).

Solution 1.1.4

(1) C'est le pivot de Gauss assorti d'une récurrence pour prouver que les termes sur la diagonale de D sont bien ceux annoncés.
On peut aussi prouver directement le résultat par récurrence.
Si $n=1$, c'est immédiat.
On suppose alors que $A' = L'D'U'$ pour toute matrice de taille n où $D' = \mathrm{Diag}(\Delta_1, \ldots, \Delta_n/\Delta_{n-1})$.
Soit $A = \begin{pmatrix} A' & X^{\mathrm{T}} \\ Y & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$ une matrice de taille $n+1$, on écrit $A' = L'D'U'$ (en remarquant que les mineurs Δ_i sont les mêmes pour A et A' en prenant $i \in [1,n]$). On cherche à priori la forme des matrices L et U en fonction des matrices X et Y et on vérifie que l'on a bien $A = LDU$. Ceci donne le raisonnement suivant
Analyse : on écrit donc

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} L'D'U' & X \\ Y^{\mathrm{T}} & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} = LDU \\ &= \begin{pmatrix} L' & 0 \\ L_{n+1}^{\mathrm{T}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D' & 0 \\ 0 & \Delta_{n+1}/\Delta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U' & U_{n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L'D'U' & L'DU_{n+1} \\ L_{n+1}D'U' & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $\alpha = L_{n+1}^{\mathrm{T}} DU_{n+1} + \dfrac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}$ et, comme D', L' et U' sont inversibles alors

$$\begin{cases} L_{n+1}^{\mathrm{T}} &= Y^{\mathrm{T}}(D'U')^{-1} \\ U_{n+1} &= (L'D')^{-1}X \end{cases}.$$

Synthèse : on reprend les matrices L, D et U définies ci-dessus. On a $\det(LDU) = \Delta_{n+1} = \det A$ d'où, en développant les déterminants $\det(LDU) = \Delta_{n+1} = \det A$ par rapport à la dernière colonne, on obtient

$$\alpha\Delta_n + \Sigma = a_{n+1,n+1}\Delta_n + \Sigma$$

où Σ correspond aux autres termes du développement du déterminant. Comme $\Delta_n \neq 0$ alors $\alpha = a_{n+1,n+1}$ ce qui achève la récurrence.
Pour l'unicité, si $LDU = L'D'U'$ alors $(L'D')^{-1}LD = U'U^{-1}$, $(L'D')^{-1}LD$ est une matrice triangulaire supérieure (l'ensemble des matrice triangulaires supérieures est stable par la multiplication matricielle), $U'U^{-1}$ est triangulaire supérieure, donc $U'U^{-1}$ est diagonale ; comme les termes des diagonales de U et de U' sont égaux à 1, $U = U'$. On prouve ensuite facilement que $L = L'$, $D = D'$.

(2) $A = LDU = A^T = U^T DL^T$ et compte tenu de l'unicité, on a $L^T = U$.

(3) $X^T AX = Y^T DY$ où $Y = UX$, donc $q(x) = \Delta_1 l_1(x)^2 + \dfrac{\Delta_2}{\Delta_1} l_2(x)^2 + \cdots + \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} l_n(x)^2$ où $l_i(x) = y_i$; ceci est la transformation de Jacobi d'une forme quadratique.

Solution 1.2.1 On sait que E est un espace de Hilbert (cf. *théorème 5.43 page 245*). L'objectif de cet exercice est de prouver que toute partie bornée de E est faiblement compacte. La suite $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $e^n = (\delta_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$ est totale (i.e. tout x de E est limite de la suite $x^n = \sum_{p=0}^{n} x_p e^p$).

On va vérifier la propriété pour $z = e^n$, puis, par linéarité, pour tout z appartenant à $F = \mathrm{Vect}(e^n)$ et enfin, par densité, à E.

Soit M un majorant des $\|x^n\|$ alors $(x_k^n)^2 \leqslant \sum_{p=0}^{+\infty} (x_p^n)^2 \leqslant M^2$ et donc, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, $|x_n^k| \leqslant M$.

On va utiliser maintenant le procédé diagonal pour extraire une suite convergente.
La suite (x_0^k) est bornée donc on peut en extraire une suite convergente, $(x_0^{\varphi_0(k)})$. On note a_0 sa limite. À partir de la suite $(x_1^{\varphi_0(k)})$ qui est bornée, on peut extraire à nouveau une suite convergente $(x_1^{\varphi_0\circ\varphi_1(k)})$ de limite a_1 et par ce procédé on pourra ainsi mettre en évidence des suites extraites $(x_p^{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_p(k)})$ de limite a_p. Notons $a = (a_p)$, on va prouver que a convient.
Soit (y^p) la suite d'éléments de E définie par $y^p = x^{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_p(p)}$, si $k \geqslant p$ on peut écrire $y^k = x^{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_p(p_k)}$ où $p_k = \varphi_{p+1}\circ\ldots\circ\varphi_k(k)$. Comme $p_k \to +\infty$, y^k admet a_k comme limite. On a donc

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \lim_{k\to+\infty} (y^k|e^p) = (a|e^p).$$

Il reste à prouver que $a \in E$ pour terminer la première partie de la démonstration. Or

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} (x_n^k)^2 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (x_n^k)^2 \leqslant M^2$$

donc, en prenant $k = \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_N(l)$ (où l est à priori arbitraire), on a

$$\forall l \in \mathbb{N},\ \forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} (x_n^{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_N(l)})^2 \leqslant M^2$$

et, en prenant, dans cette somme finie, la limite quand $l \to +\infty$, comme pour chaque $n \leqslant N$, $x_n^{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_N(l)} = x_n^{\varphi_0\circ\ldots\circ\varphi_n(\varphi_{n+1}\circ\ldots\circ\varphi_N(l))}$ tend vers a_n, on a

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} a_n^2 \leqslant M^2$$

donc la série $\sum a_n^2$ converge i.e. $a \in E$.

Par bilinéarité du produit scalaire, on a

$$\forall z \in F,\ \lim_{k\to+\infty} (y^k|z) = (a|z).$$

Pour conclure, on utilise alors la densité de F dans E :
Pour tout z de E, il existe $z_n \in F$ tel que $\|z - z_n\| \leqslant \dfrac{1}{n}$. On écrit alors $(y^k - a|z) = (y^k - a|z - z_n) + (y^k - a|z_n)$ or, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|(y^k - a|z - z_n)| \leqslant \|y^k - a\|.\|z - z_n\| \leqslant (\|y^k\| + \|a\|)\frac{1}{n} \leqslant \frac{2M}{n}$$

car on a vu que $\|a\| \leqslant M$, de même pour $\|y^k\|$ (ou on dit que la suite $(\|y^k - a\|)_{k\in\mathbb{N}}$ est borné en tant que suite convergente). On choisit alors K tel que, $k \geqslant K$ entraîne $|(y^k - a|z_n)| \leqslant \dfrac{1}{n}$ (c'est la propriété que l'on a démontrée au point précédent) d'où

$$\forall k \geqslant K,\ |(y^k - a|z)| \leqslant \frac{1 + 2M}{n}$$

ce qui se traduit par $\lim\limits_{k\to+\infty} (y^k|z) = (a|z)$ pour tout z de E.

Solution 1.2.2 On remarque que, si $X \neq 0$ alors avec $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$, on a $Y^{\mathrm{T}}CY > 0$ i.e. $X^{\mathrm{T}}AX > 0$ donc A est définie positive donc inversible.

$J(X)$ se présente comme un trinôme du second degré, il semble naturel de vérifier que J présente un minimum en $X_0 = A^{-1}B$:

$$\begin{aligned} J(X+X_0) - J(X_0) &= X^{\mathrm{T}}AX + X^{\mathrm{T}}AX_0 + X_0^{\mathrm{T}}AX - 2B^{\mathrm{T}}X \\ &= X^{\mathrm{T}}AX \end{aligned}$$

car $X^{\mathrm{T}}AX_0$ est un réel donc égal à sa transposée et $X^{\mathrm{T}}AX_0 = X_0^{\mathrm{T}}AX = X^{\mathrm{T}}B = BX^{\mathrm{T}}$.
On a donc $J(X+X_0) - J(X) > 0$ pour $X \neq 0$ donc le minimum est atteint en un seul point $X_0 = A^{-1}B$ et il vaut $a - B^{\mathrm{T}}A^{-1}B$.

Solution 1.3.1 Toute suite extraite va s'écrire $(e_{\varphi(n)})$ or, pour $i \neq j$, $\|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$ (grâce à Pythagore on a $\|e_i - e_j\|^2 = 2$) donc la suite ci-dessus ne peut être une suite de Cauchy et ne peut par conséquent converger.

Solution 1.3.2

(1) On remarque tout d'abord que $H^{\perp} = \{0\}$ d'où l'implication dans un sens.
Pour la réciproque, raisonnons par l'absurde :
si $F \neq H$ prenons $a \in H \setminus F$. $\mathrm{d}(a, F) > 0$ car F est fermé. On sait qu'il existe une suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que : $\|a - x_n\|^2 \leqslant \mathrm{d}(a,F)^2 + \dfrac{1}{n}$.
Montrons que la suite (x_n) est de Cauchy : on applique l'identité du parallélogramme ($\|x-y\|^2 + \|x+y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, cf. *proposition 9.1.5 (ii) page 161* aux vecteurs $x = a - x_{n+p}$ et $y = a - x_n$, on obtient alors

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 = 2(\|a - x_{n+p}\|^2 + \|a - x_n\|^2) - 4\|a - (x_{n+p} + x_n)/2\|^2.$$

Comme $(x_{n+p} + x_n)/2 \in F$ on a : $\|a - (x_{n+p} + x_n)/2\|^2 \geqslant \mathrm{d}(a,F)^2$ d'où

$$\|x_{n+p} - x_n\|^2 \leqslant 2\left(2\,\mathrm{d}(a,F)^2 + \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n}\right) - 4\,\mathrm{d}(a,F)^2 = 2\left(\frac{1}{n+p} + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{4}{n}$$

donc la suite (x_n) est bien de Cauchy.
La suite (x_n) converge donc dans F (car F est un fermé dans un espace complet, cf. *proposition 5.1.16 page 233*), soit b sa limite. On a $\|a - b\| = \mathrm{d}(a,F) > 0$.
Montrons que $a - b \in F^{\perp}$: soit $x \in F$ alors $\|a-b\|^2 \leqslant \|a - x\|^2$. En appliquant cette inégalité à $x = b + \lambda y \in F$ on obtient

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ -2\lambda(a-b|y) + \lambda^2\|y\|^2 \geqslant 0$$

d'où $(a-b|y) = 0$ (trinôme du second degré en λ qui garde un signe constant) et donc $a - b \in F^{\perp}$ et $F^{\perp} \neq \{0\}$ c.q.f.d.

(2)
- Si f est la forme nulle, il suffit de prendre $u = 0$.
- Si f est non nulle, $F = \operatorname{Ker} f$ est un hyperplan fermé de H (image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue f, cf. *remarque 5.1.15 page 230*) donc $F^{\perp} \neq \{0\}$. Soit $a \in F^{\perp}$, $\|a\| = 1$, $g(x) = (a|x)$ est une forme linéaire non nulle. f et g ont même noyau et sont donc proportionnelles (cf. *théorème 2.9 page 183*) i.e. $f = \alpha g$, il suffira alors de prendre $u = \alpha a$; l'unicité est immédiate.

(3) Soit H' l'ensemble des formes linéaires continues sur H. L'application $f \in H' \mapsto u \in H$ est linéaire, elle admet une application réciproque : $\varphi\ : u \in H \mapsto (x \mapsto (u|x))$.
Cette application réciproque est elle aussi continue, de norme égale à $\|u\|$.
On dispose en fait d'une isométrie entre H et H' son dual topologique (i.e. l'ensemble des formes linéaires continues). Ce résultat est très classique dans la théorie des espaces de Hilbert et généralise le *théorème 9.4 page 162*.

Solution 2.1.1

(1) a) (a) $\Rightarrow$ (b) : $p+q$ est un projecteur orthogonal donc $(p+q)^2 = p^2+q^2+pq+qp = p+q$ ce qui entraîne que $pq = -qp$. On utilise ensuite le caractère orthogonal de p et q d'où

$$(p(x)|q(x)) = (qp(x)|x) = (x|pq(x)) = (pq(x)|x)$$

et comme ces 2 quantités sont opposées, on en déduit que $(p(x)|q(x)) = 0$.

b) (b) $\Rightarrow$ (c) : on a $(p(x+y)|q(x+y)) = 0 = (p(x)|q(x)) + (p(x)|q(y)) + (p(y)|q(x)) + (p(y)|q(y))$ donc, en utilisant l'hypothèse p et q orthogonaux, on a $(qp(x)|y) + (y|pq(x)) = 0$ et ceci pour couple (x, y) donc $pq + qp = 0$. On a ainsi $pq = -qp$ d'où, en composant par p à droite puis à gauche, $pq = -pqp$ et $pqp = -qp = pq$ d'où $pq = 0$ (on a aussi $qp = 0$).

c) (c) $\Rightarrow$ (d) : si $x \in \operatorname{Im} p$ alors $p(x) = x$, de même $q(y) = y$ donc $(x|y) = (p(x)|q(y)) = (x|pq(y)) = 0$.

d) (d) $\Rightarrow$ (a) : pour tout couple $(x, y) \in E^2$ on a $(pq(x)|y) = (q(x)|p(y)) = 0$ et $(qp(x)|y) = (p(x)|q(y)) = 0$ donc $pq = qp = 0$. Ainsi $(p+q)^2 = p^2+pq+qp+q^2 = p+q$, $p+q$ est un projecteur.
Montrons qu'il est orthogonal : $((p+q)(x)|y) = (p(x)|y) + (q(x)|y) = (x|p(y)) + (x|q(y)) = (x|(p+q)(y))$.

(2) On utilise le (1) : tout d'abord $\operatorname{Im}(p+q) \subset \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ est immédiat. Montrons l'autre inclusion : si $x = p(y) + q(z)$ alors $p(x) = p(y)$ car $pq = 0$ et $q(x) = q(z)$ car $qp = 0$ donc $x = p(x) + q(x) \in \operatorname{Im}(p+q)$.
Le noyau de $p+q$ vaut $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$: en effet, l'inclusion $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker}(p+q)$ est évidente, montrons l'autre inclusion : si $p(x) + q(x) = 0$ alors, en composant par p et par q on arrive à $p(x) = q(x) = 0$.

Solution 2.1.2

(1) Comme p et q sont orthogonaux alors $(x|r(y)) = (x|pqp(y)) = (p(x)|qp(y)) = (qp(x)|p(y)) = (r(x)|y)$.

(2) $\|r(x)\| = \|pqp(x)\| \leqslant \|qp(x)\| \leqslant \|p(x)\| \leqslant \|x\|$ car pour un projecteur orthogonal p, $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$. Ensuite $(x|r(x)) = (p(x)|qp(x)) = (y|q(y))$ si on pose $y = p(x)$ or $(y|q(y)) = \|q(y)\|^2 \geqslant 0$ car q est orthogonal.

(3) On remarque tout d'abord que, si p est un projecteur orthogonal, alors $\|p(x)\| = \|x\| \Leftrightarrow x = p(x)$.
on écrit $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q) \oplus F$ où $F \perp \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0\}$ alors $x = x_1 + x_2 + x_3$ où $x_1 \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$, $x_2 \in F$ et $x_3 \in (\operatorname{Im} p)^\perp$. $p(x) = x_1 + x_2$, $qp(x) = x_1 + q(x_2)$ et $r(x) = x_1 + pq(x_2)$ puis $r^n(x) = x_1 + (pq)^n(x_2)$.
Montrons que $pq(x_2) \perp \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$: soit $y \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$,

$$(pq(x_2)|y) = (q(x_2)|p(y)) = (x_2|qp(y)) = (x_2|y) = 0$$

car $p(y) = y$ et $q(y) = y$. pq peut être considéré comme un endomorphisme de $\mathcal{L}(F)$.
Montrons que $\|pq\| < 1$: en effet, par l'absurde, si $\|pq\| = 1$ alors, comme on est en dimension finie, il existe $x \in F$ tel que $\|x\| = 1$ et $\|pq(x)\| = \|x\|$. Compte tenu de la remarque préliminaire, $\|pq(x)\| \leqslant \|q(x)\| \leqslant \|x\| = \|pq(x)\|$ donc $q(x) = x$ puis $p(x) = x$ soit $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$ ce qui est impossible.
Conclusion : $\|pq(x_2)\| \leqslant k\|x_2\|$ avec $k < 1$ puis $\|(pq)^n(x_2)\| \leqslant k^n\|x_2\| \to 0$ donc $r^n(x) \to x_1$.

Solution 2.1.3 F est en fait défini par $x_1+x_3=0$ et $x_2+x_4=0$ d'où une base orthonormée de F :

$$f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1-e_3),\ f_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_2-e_4).$$

La projection orthogonale sur F est définie par $x\mapsto(x.f_1).f_1+(x.f_2).f_2$ (cf. *proposition 4.2.2 page 200*) de matrice :

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\-1&0&1&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix}.$$

Avec $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$: $\mathrm{d}(x,F)=\dfrac{1}{2}\left[(x_1+x_3)^2+(x_2+x_4)^2\right]$.

Solution 2.1.4 On cherche une base orthogonale de F : on peut prendre par exemple $u=(1,-2,1,0)$ et $v=(2,-1,-4,3)$.
La projection orthogonale sur F est donnée par $p(x)=(x.u)\dfrac{u}{\|u\|^2}+(x.v)\dfrac{v}{\|v\|^2}$ (cf. *proposition 4.2.2 page 200*). En remarquant que la symétrie s s'écrit $s(x)=2p(x)-x$ on en déduit la matrice de s :

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2&-4&-1&2\\-4&2&-2&-1\\-1&-2&2&-4\\2&-1&-4&-2\end{pmatrix}.$$

Solution 2.2.1 On sait d'une part que A et B sont diagonalisables car ce sont des matrices réelles symétriques (cf. *corollaire 4.8 page 204*) et d'autre part, comme elles commutent, qu'elles sont simultanément diagonalisables (cf. *application (ii) page 194*).
Avec $P=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$ alors

$$P^{-1}AP=D_A=\begin{pmatrix}e+a&0\\0&e-a\end{pmatrix},\ P^{-1}BP=D_B=\begin{pmatrix}b+c&0\\0&b-c\end{pmatrix}.$$

Si on prend $R=\begin{pmatrix}P&0\\0&P\end{pmatrix}$, $R^{-1}=\begin{pmatrix}P^{-1}&0\\0&P^{-1}\end{pmatrix}$ alors $R^{-1}MR=\begin{pmatrix}D_A&D_B\\D_B&D_A\end{pmatrix}$. Avec la matrice $S=S^{-1}$ obtenue à partir de la matrice unité d'ordre 4 en permutant les $2^{\text{ième}}$ et $3^{\text{ième}}$ lignes, on trouve :

$$S^{-1}R^{-1}MR=\begin{pmatrix}A'&0\\0&B'\end{pmatrix}\text{ où }A'=\begin{pmatrix}e+a&b+c\\b+c&e+a\end{pmatrix}\text{ et }A'=\begin{pmatrix}e-a&b-c\\b-c&e-a\end{pmatrix}.$$

On recommence et on trouve finalement :

$$R^{-1}S^{-1}R^{-1}MRSR=\mathrm{Diag}(e+a+b+c,e+a-b-c,e-a+b-c,e-a-b+c)$$

où $RSR=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$.

Solution 2.2.2 A étant symétrique réelle est diagonalisable (cf. *corollaire 4.8 page 204*), on pose u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé.

En réécrivant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \\ \vdots & & I_{n-1} & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$, on remarque que $u(e_i - e_n) = e_i - e_n$ pour $i \in [2, n-1]$.

Le calcul du polynôme caractéristique donne $P_u(\lambda) = (1-\lambda)^{n-2}((1-\lambda)^2 - (n-1))$ (on pose $\Delta_n = P_u(\lambda)$ puis, en développant par rapport à la dernière colonne on trouve $\Delta_n = (1-\lambda)\Delta_{n-1} + (-1)^n D_{n-1}$, on développe alors D_{n-1} par rapport à la dernière ligne). La recherche des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda = 1 \pm \sqrt{n-1}$ donne $x_1 = \pm\sqrt{n-1}$ et $x_i = 1$ pour $i \geqslant 2$. Avec $P = \begin{pmatrix} \sqrt{n-1} & -\sqrt{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{n-2} & \\ 1 & 1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}$ on a

$$P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(1+\sqrt{n-1}, 1-\sqrt{n-1}, 1, \dots, 1).$$

Solution 2.2.3 Soit q la forme quadratique $q(x) = \|u(x)\|^2$, il existe une base orthonormée (e_i) telle que $q(x) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ avec $\lambda_i \geqslant 0$ car q est positive (cf. *théorème 4.9 page 205*).

On a alors $\|u\| = \sup\limits_{i\in[1,n]} \lambda_i$. En effet, si on prend x vecteur de norme 1 alors

$$q(x) \leqslant \sup_{i\in[1,n]} \lambda_i . \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sup_{i\in[1,n]} \lambda_i$$

donc $\|u\| \leqslant \sup\limits_{i\in[1,n]} \lambda_i$. Il suffit alors de prendre $x = e_{i_0}$ où l'indice i_0 est tel que $\sup\limits_{i\in[1,n]} \lambda_i = \lambda_{i_0}$ pour avoir l'inégalité dans l'autre sens et conclure que $\|u\| = \sup\limits_{i\in[1,n]} \lambda_i$.

Solution 2.2.4 Dans une base orthonormée de vecteurs propres de u et de u^{-1} (cf. *théorème 4.7 page 204*) on a : $(u(x)|x) = \sum\limits_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$ et $(u^{-1}(x)|x) = \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{x_i^2}{\lambda_i}$.

Par Cauchy-Schwarz :

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\lambda_i}\right) \geqslant \sum_{i=1}^n (\sqrt{\lambda_i} x_i)(\frac{x_i}{\sqrt{\lambda_i}}) = 1$$

donc $\inf\limits_S f(x) \geqslant 1$. Comme $f(e_i) = 1$ alors f atteint sa borne inférieure et on a $\inf\limits_S f = 1$.

Solution 2.2.5 Comme A est symétrique, on sait que $\exists P \in O(n) : A = P^{\mathrm{T}} D P$ où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$, $\lambda_i > 0$ (cf. *corollaire 4.8 page 204*) et en faisant le produit des trois matrices on obtient $a_{ij} = \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k p_{ki} p_{kj}$.

Avec $\overrightarrow{x} = \sum\limits_{i=1}^n x_i \overrightarrow{e}_i$, on a $q_C(\overrightarrow{x}) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} b_{ij} x_i x_j = \sum\limits_{i,j,k} \lambda_k p_{ki} p_{kj} b_{ij} x_i x_j$.

On pose alors $\overrightarrow{x_k} = \sum\limits_{i=1}^n p_{ki} x_i \overrightarrow{e_i}$ donc $q_C(x) = \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k q_B(x_k) \geqslant 0$.

Montrons que q_C est définie :

$$\begin{aligned}
q_C(x)=0 &\Leftrightarrow \forall k\in[1,n],\ q_B(x_k)=0 && \text{car } \lambda_k>0\\
&\Leftrightarrow \forall k\in[1,n],\ \overrightarrow{x_k}=0 && \text{car } q_B \text{ est définie}\\
&\Leftrightarrow \forall (k,i)\in[1,n]^2,\ p_{ki}x_i=0 && \text{car } (e_i) \text{ est une base}\\
&\Rightarrow PX=0 && \text{où } P \text{ est la matrice de passage}\\
&\Rightarrow x=0
\end{aligned}$$

Solution 2.2.6 Si u est l'endomorphisme associé à A, on a : $u(\varepsilon_i)=\lambda_i\varepsilon_i$ et $a_{ii}=(u(e_i)|e_i)$. Comme $e_i=\sum\limits_{j=1}^{n}(e_i|\varepsilon_j).\varepsilon_j$ alors

$$a_{ii}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(e_i|\varepsilon_j)^2\leqslant\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(e_i|\varepsilon_j)^2+\lambda_k\sum_{j=k+1}^{n}(e_i|\varepsilon_j)^2$$

et on écrit que : $\sum\limits_{j\geqslant k+1}(e_i|\varepsilon_j)^2=1-\sum\limits_{j\leqslant k}(e_i|\varepsilon_j)^2$. On additionne ensuite ces k inégalités pour trouver

$$\begin{aligned}
\sum_{i\leqslant k}a_{ii} &\leqslant k\lambda_k+\sum_{j\leqslant k}(\lambda_j-\lambda_k)\left(\sum_{i\leqslant k}(e_i|\varepsilon_j)^2\right)\\
&\leqslant k\lambda_k+\sum_{j\leqslant k}(\lambda_j-\lambda_k) && \left(\text{car }\sum_{i\leqslant k}(e_i|\varepsilon_j)^2\leqslant 1\right)\\
&\leqslant\sum_{j\leqslant k}\lambda_j.
\end{aligned}$$

Solution 2.2.7

(1) On sait que E possède une base orthonormée de vecteurs propres de u : $(e_1,\dots,e_n)$ (cf. *théorème 4.7 page 204*). On suppose que $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n$ où $u(e_i)=\lambda_i e_i$.
On écarte le cas où $u=0$ (et donc $f=0$).
On a $f(te_i)=\lambda_i^2(t^2-t^4)$ et comme il existe un λ_i non nul, f n'est pas minorée.

(2) Supposons que $\lambda_1<0$ et $\lambda_n>0$ et prenons $v=\sqrt{-\lambda_1}e_n+\sqrt{\lambda_n}e_1$ alors $(u(v)|v)=0$ et $\|u(v)\|^2=\lambda_1\lambda_n(\lambda_1-\lambda_n)>0$. On obtient alors $f(tv)=t^2\lambda_1\lambda_n(\lambda_1-\lambda_n)$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}f(tv)=+\infty$, f n'est pas majorée. Pour que f soit majorée, il faut donc que toutes les valeurs propres soient de même signe.

(3) On se place donc dans le cas où $\lambda_1\geqslant 0$ (et $\lambda_i\geqslant 0$), l'autre cas s'y ramène en prenant $-u$ qui ne change pas la valeur de f..
Pour $x=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ie_i$ on a $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2\right)^2$ qui peut encore s'écrire :

$$f(x)=\frac{\lambda_n^2}{4}-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\lambda_n-\lambda_i)x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2-\frac{\lambda_n}{2}\right)^2$$

(on peut avoir cette idée en étudiant les cas simples $n = 1$, $n = 2$). On a donc $f(x) \leqslant \dfrac{\lambda_n^2}{4}$, cette quantité est bien un plus grand élément car $f\left(\dfrac{e_n}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\lambda_n^2}{4}$.
Si $\lambda_n > \lambda_{n-1}$ alors ce maximum n'est atteint que pour $x = \pm\dfrac{e_n}{\sqrt{2}}$.

Solution 2.2.8

(1) On a $B = DAD$ où $D = \mathrm{Diag}(\gamma_i)$ donc $X^{\mathrm{T}}BX = (DX)^{\mathrm{T}}A(DX) \geqslant 0$ et $X^{\mathrm{T}}BX = 0 \Leftrightarrow DX = 0 \Leftrightarrow X = 0$ donc $B \in E$.

(2) $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ alors

$$\sqrt[n]{\det A} \leqslant \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(A)$$

grâce à l'inégalité de la moyenne (cf. *question (iii) page 73*).
Puis, si $A \in E$ alors $a_{ii} = E_i^{\mathrm{T}}AE_i > 0$ (où E_i désigne la matrice du i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Donc, avec $\gamma_i = \dfrac{1}{\sqrt{a_{ii}}}$ on a $b_{ii} = 1$ et on applique l'inégalité précédente à B :

$$\det B = \det A \det D^2 \leqslant 1$$

(car $\mathrm{Tr}(B) = n$) d'où $\det A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.

(3) On écrit $C = \Delta^{\mathrm{T}}\Delta$ (C est la matrice d'un produit scalaire et Δ^{T} est la matrice de passage à une base orthogonale) où $\Delta \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $AC = \Delta^{-1}F\Delta$ où $F = \Delta A\Delta^{\mathrm{T}} \in E$.
On a $\det F = \det(AC) = \det A$ et $\mathrm{Tr}(AC) = \mathrm{Tr}\,F$ ce qui donne

$$\sqrt[n]{\det F} \leqslant \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}\,F \Rightarrow \sqrt[n]{\det A} = \sqrt[n]{\det(AC)} \leqslant \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(AC).$$

On a égalité ssi $F = \alpha I$ où $\alpha > 0$ soit $C = \sqrt[n]{\det A}.A^{-1}$.
Enfin l'inégalité demandée équivaut à $\sqrt[n]{\det(AC^{-1})} + 1 \leqslant \sqrt[n]{\det(AC^{-1} + I)}$ i.e., en posant $C^{-1} = \Delta^{\mathrm{T}}\Delta$ et $F = \Delta A\Delta^{\mathrm{T}}$, ceci est toujours équivalent à $\sqrt[n]{\det F} + 1 \leqslant \sqrt[n]{\det(I + F)}$ soit encore

$$1 + \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n}(1 + \lambda_i)\right)^{1/n}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de F et sont > 0. En passant aux logarithmes et exponentielles, ceci est encore équivalent à

$$\ln\left[1 + \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\lambda_i\right)\right] \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \exp(\ln\lambda_i)\right)$$

et comme la fonction $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est strictement convexe (de dérivée croissante, cf. *proposition 4.1.8 page 72*), l'inégalité est assurée.
L'égalité n'a lieu que si tous les λ_i sont égaux (car $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est strictement convexe, cf. *question (ii) page 73*) i.e. si $F = \alpha I$ ce qui s'écrit $A = \alpha C$ avec $\alpha > 0$.

Solution 2.2.9 Soit Q la forme quadratique associée à A, Q est positive donc $a_{ii} = Q(e_i) \geqslant 0$. Mais grâce à l'inégalité de Schwarz appliquée à Q (cf. *proposition 4.1.3 page 197*), on obtient

$$a_{ii}a_{jj} = Q(e_i)Q(e_j) \geqslant B(e_i, e_j)^2 = a_{ij}^2 > 0$$

donc $a_{ii} > 0$.
On a en particulier $\operatorname{Rg} A \geqslant 1$ ce qui permet d'affirmer que le résultat est acquis pour $n = 2$.
On fait alors une récurrence sur n :
on suppose le résultat vrai pour les matrices d'ordre $n - 1$. En utilisant la décomposition de Gauss, on a

$$Q(x) = \frac{1}{a_{nn}} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j \right)^2 + R(x)$$

où $R(x) = \sum_{(i,j)\in[1,n-1]} \left(a_{ij} - \frac{a_{ni}a_{nj}}{a_{nn}} \right) x_i x_j = \sum_{(i,j)\in[1,n-1]^2} a'_{ij} x_i x_j$.
On pose alors $\varepsilon_j = e_j - \frac{a_{nj}}{a_{nn}} e_n$ pour $j \in [1, n-1]$ et $B' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ qui est une famille libre.
La restriction R de Q à $F = \operatorname{Vect}(B')$ est une forme quadratique positive dont la matrice dans B' est donnée par les coefficients de R ci-dessus. On a $a'_{ij} < a_{ij} < 0$ donc $\operatorname{Rg} A' \geqslant n - 2$ et la matrice de Q dans la base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, e_n)$ est $C = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$
Vu que $\operatorname{Rg} Q = \operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg} A' + 1$ alors $\operatorname{Rg} A \in \{n - 1, n\}$.

Solution 2.2.10

(1) u est diagonalisable dans une base orthonormée (cf. *théorème 4.7 page 204*), soient $(e_1, \ldots, e_n)$ ces vecteurs associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Si on prend $F_k = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ alors

$$(u(x)|x) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_k x_k^2 \geqslant \lambda_k (x_1^2 + \cdots + x_k^2)$$

donc $\inf_{x\in F_k\cap S} (u(x)|x) = \lambda_k$.
Posons maintenant $E_k = \operatorname{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$, $\dim E_k = n + 1 - k$. Si $\dim F = k$ alors $F \cap E_k \neq \{0\}$ car $\dim F \cap E_k = \dim F + \dim E_k - \dim(F + E_k) \geqslant k + n - k + 1 - n = 1$ (cf. *théorème 8.18 page 136*) et donc $F \cap E_k \cap S \neq \emptyset$ d'où

$$\inf_{F\cap S} (u(x)|x) \leqslant \inf_{F\cap S\cap E_k} (u(x)|x) \leqslant \sup_{F\cap S\cap E_k} (u(x)|x) \leqslant \sup_{S\cap E_k} (u(x)|x) = \lambda_k.$$

(2) On applique le résultat précédent à $v = -u$, on obtient alors $\inf_{F\in\mathcal{F}_k} [\sup_{x\in F\cap S} (u(x)|x)] = \lambda_{n+1-k}$.

(3) Soit u_t et $u_{t'}$ deux images de φ, $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ et $\lambda'_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda'_n$ les valeurs propres respectives de u_t et $u_{t'}$.
Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(u_t(x) - u_{t'}(x)|x) \leqslant \|u_t(x) - u_{t'}(x)\|.\|x\| \leqslant \|u_t - u_{t'}\|.\|x\|^2.$$

Si on prend $x \in S$, on déduit de l'inégalité ci-dessus que $(u_{t'}(x)|x) \geqslant (u_t(x)|x) - \|u_t - u_{t'}\|$.
Du résultat du 1, on obtient : $\lambda'_k \geqslant \inf_{x\in E_k(t)\cap S} (u_{t'}(x)|x) \geqslant \lambda_k - \|u_t - u_{t'}\|$ (ici $E_k(t)$ désigne l'e.v. engendré par les vecteurs propres de u_t associés aux λ_i, $i \in [1, k]$).
On a donc $\lambda_k - \lambda'_k \leqslant \|u_t - u_{t'}\|$ et en permutant les rôles de t et t', on obtient $|\lambda_k - \lambda'_k\| \leqslant \|u_t - u_{t'}\|$.
Cette dernière inégalité permet d'affirmer que ψ est continue (et même lipschitzienne si φ l'est).

Solution 2.2.11 Grâce au *théorème 4.7 page 204*, on sait qu'une matrice symétrique est orthogonalement diagonalisable.
On prend ici une base orthonormée (e_i) telle que $He_i = \lambda_i e_i$. On sait que les λ_i sont réels et on suppose qu'ils sont rangés du plus petit au plus grand : $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ (ce qui donne $\sup\limits_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| = \lambda_n - \lambda_1$).
Plaçons-nous dans cette base par la suite. On note (x_i) et (y_i) les coordonnées respectives de X et Y. On a $\sum\limits_{i=1}^n x_i y_i = 0$.

$$X^{\mathrm{T}}HY = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i = \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i - \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}\right) x_i y_i$$
$$|X^{\mathrm{T}}HY| \leqslant \frac{\lambda_n - \lambda_1}{2} \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \frac{\lambda_n - \lambda_1}{2}$$

car $\left|\lambda_i - \dfrac{\lambda_1 + \lambda_n}{2}\right| \leqslant \dfrac{\lambda_n - \lambda_1}{2}$ vu que $\lambda_i \in [\lambda_1, \lambda_n]$ et, grâce à Cauchy-Schwarz, on a

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2} = 1$$

Ainsi $2|X^{\mathrm{T}}HY| \leqslant \lambda_n - \lambda_1$.
En prenant $X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_n + e_1)$, $Y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_n - e_1)$, on obtient l'égalité dans l'inégalité ci-dessus ce qui permet de conclure.

Solution 2.2.12

(1) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de L et pour $i \in [1, n]$, $L(e_i) = \lambda_i e_i$ $(\lambda_i > 0)$.
Pour x et y de coordonnées respectives (x_i) et (y_i) dans la base (e_i), on a $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^n x_i^2$, $L^{-p}(y) = \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{y_i}{\lambda_i^p} e_i$, $(I + L)^{-p}x = \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{x_i}{(1 + \lambda_i^p} e_i$ d'où
$$(L^{-p}(y), y) = \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\lambda_i^p} \text{ et } ((I + L)^{-p}(x + y), (x + y) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i + y_i)^2}{(1 + \lambda_i)^p}.$$
On étudie donc le signe de $\Delta = \sum\limits_{i=1}^n \left[x_i^2 + \dfrac{y_i^2}{\lambda_i^p} - \dfrac{(x_i + y_i)^2}{(1 + \lambda_i)^p}\right]$.
Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, étudions le signe de $\delta = x^2 + \dfrac{y^2}{\lambda^p} - \dfrac{(x + y)^2}{(1 + \lambda)^p}$:
$$\delta = \left[1 - \frac{1}{(1 + \lambda)^p}\right] x^2 - \frac{2xy}{(1 + \lambda)^p} + \left[\frac{1}{\lambda^p} - \frac{1}{(1 + \lambda)^p}\right] y^2$$

ceci est un trinôme en x qui a pour discriminant $-\dfrac{1}{\lambda^p}\left[1 - \dfrac{1 + \lambda^p}{(1 + \lambda)^p}\right] \leqslant 0$, donc $\delta \geqslant 0$, il en est de même de Δ.

(2) On sait que l'on peut définir la "racine carrée" d'un endomorphisme symétrique défini positif.
Soit F l'endomorphisme autoadjoint défini positif tel que $F^2 = H$. On pose $L = F^{-1} \circ$

$K \circ F^{-1}$. L est autoadjoint défini positif (en effet $(L(x)|x) = (K \circ F^{-1}(x)|F^{-1}(x)) > 0$ car K est défini positif et F^{-1} autoadjoint).
Soit $t = F^{-1}(x)$, $z = F^{-1}(y)$. D'après le (1), on a $\|t\|^2 + (L^{-1}(z)|z) \geqslant ((I+L)^{-1}(t+z)|(t+z))$ soit, en remplaçant :

$$\|t\|^2 = (F^{-1}(x)|F^{-1}(x)) = (F^{-2}(x)|x) = (H^{-1}(x)|x)$$

et de même

$$(L^{-1}(z)|z) = (F \circ K^{-1}(y)|F^{-1}(y)) = (K^{-1}(y)|y)$$

et pour terminer :

$$((I+L)^{-1}(t+z)|(t+z)) = ((I + F^{-1} \circ K \circ F^{-1})^{-1}(F^{-1}(x+y)|F^{-1}(x+y)) = \alpha$$

comme

$$\begin{aligned} F^{-1} \circ (I + F^{-1} \circ K \circ F^{-1})^{-1} \circ F^{-1} &= [F \circ (I + F^{-1} \circ K \circ F^{-1}) \circ F]^{-1} \\ &= (F^2 + K)^{-1} = (H+K)^{-1} \end{aligned}$$

alors $\alpha = ((H+K)^{-1}(x+y)|(x+y))$ et la propriété demandée est bien prouvée.

Solution 2.3.1 On peut écrire l'équation de S et S' sous les formes respectives suivantes :

$$q(x) = X^{\mathrm{T}}AX = 1 \text{ et } q'(X) = X^{\mathrm{T}}A'X = 1.$$

La condition est réalisée ssi $U^{\mathrm{T}}A'U = \lambda^2 A$:
en effet, $s(X) \in S'$ d'où $X^{\mathrm{T}}AX = 1$ et $\lambda^2 X^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}A'UX = 1$ donc, pour tout X de l'ellipsoïde, $X^{\mathrm{T}}[A - \lambda^2 U^{\mathrm{T}}A'U]X = 0$ et par homothétie, ceci est vrai pour tout X. La forme quadratique de matrice $A - \lambda^2 U^{\mathrm{T}}A'U$ est nulle donc sa matrice est nulle.
Ceci est encore équivalent au fait que les polynômes caractéristiques de A et A' vérifient $P_{A'} = P_{\lambda^2 A}$.
En effet, deux matrices symétriques S et S' sont orthogonalement semblables ssi elles ont même polynôme caractéristique :

- l'implication directe est immédiate (elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes).
- Pour la réciproque, on se sert du fait qu'elles sont diagonalisables et ont mêmes valeurs propres avec mêmes ordres de multiplicité, ce qui donne $S = UDU^{\mathrm{T}}$ et $S' = U'DU'^{\mathrm{T}}$ où U et U' sont des matrices orthogonales (cf. *corollaire 4.8 page 204*). On conclut en écrivant que

  $$S' = U'U^{\mathrm{T}}SUU'^{\mathrm{T}}$$

  et on utilise le fait que l'ensemble des matrices orthogonales est un groupe ($\mathrm{SO}(n)$, cf. *définition 9.2.13 page 167*).

On en déduit alors que $P_{A'}(\lambda^2 X) = \lambda^6 P_A(X)$ ce qui donne :

$$21 = 9\lambda^2,\ 143 - 2a^2 = 23\lambda^4,\ 315 - 14a^2 = 15\lambda^6 \Leftrightarrow \lambda^2 = 7/3,\ a^2 = 80/9.$$

On trouve $U = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & -5 & 2 \\ 3 & 2\sqrt{5} & 2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 & a & 0 \\ a & 7 & a \\ 0 & a & 9 \end{pmatrix} = \lambda^2 U \operatorname{Diag}(3,5,1)U^{\mathrm{T}}$.

Solution 2.3.2 L'équation de la quadrique en question s'écrit $Q(x,y,z) = 2m^2 - 3m + 1$ où Q est une forme quadratique. On cherche à réduire cette équation et pour cela on utilise le *théorème 4.9 page 205* qui nous amène à écrire la matrice M de Q et à chercher ses valeurs propres.

On a $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2m^2+1 & -1 \\ -1 & -1 & 2m^2+1 \end{pmatrix}$ et le polynôme caractéristique de M s'écrit :

$$[2(m^2+1) - \lambda][\lambda^2 - (2m^2+1)\lambda + 2(m^2-1)]$$

et il admet les racines $\lambda_1 = 2(m^2+1) > 0$, $\lambda_2 = \dfrac{2m^2+1+\sqrt{\Delta}}{2} > 0$, $\lambda_3 = \dfrac{2m^2+1-\sqrt{\Delta}}{2}$ où $\Delta = (2m^2-1)^2 + 8 > 0$.

λ_3 est strictement positive ssi $m^2 - 1 > 0$, strictement négative ssi $m^2 - 1 < 0$.

Comme $2m^2 - 3m + 1 = (m-1)(2m-1)$ on distingue les cas suivants :

$m > 1$	:	ellipsoïde,
$m = 1$	:	droite ($\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = 0$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} = 0$,
$1/2 < m < 1$	:	hyperboloïde à deux nappes,
$m = 1/2$	:	cône d'axe Oz,
$-1 < m < 1/2$	:	hyperboloïde à une nappe,
$m = -1$	:	cylindre à base elliptique,
$m < -1$	:	ellipsoïde.

Solution 2.3.3 Après calculs on peut conclure que, dans $(\Omega, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ on a :

(1) $4X^2 + Y^2 - 2Z^2 + 1 = 0$ où $\Omega \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{I} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{J} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{K} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(2) $2X^2 + 3Y^2 + 2\sqrt{6}Z = 0$ où $\Omega \begin{pmatrix} \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{6}}{8} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{K} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Solution 2.3.4 L'équation de la quadrique en question s'écrit $Q(x,y,z) = 1$ où Q est une forme quadratique. On cherche à réduire cette équation et pour cela on utilise le *théorème 4.9 page 205* qui nous amène à écrire la matrice M de Q et à chercher ses valeurs propres.

On a $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix}$ et le polynôme caractéristique de M s'écrit :

$$(a+b+c-\lambda)[\lambda^2 - A] \text{ où } A = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

et A ne s'annule pas ($A = 0 \Leftrightarrow a = b = c$).

$A > 0$ donc les valeurs propres sont : $\lambda_1 = a+b+c$, $\lambda_2 = \sqrt{A}$, $\lambda_3 = -\sqrt{A}$.

- si $a+b+c > 0$ on a un hyperboloïde à une nappe (cf. *page 208*),
- si $a+b+c = 0$, on a un cylindre hyperbolique (cf. *page 209*),
- si $a+b+c < 0$ on a un hyperboloïde à deux nappes (cf. *page 207*).

On aura une surface de révolution ssi la matrice M a deux valeurs propres égales. Comme $\sqrt{A}$ et $-\sqrt{A}$ sont de signes opposés, ces quantités ne peuvent être égales donc la condition est encore équivalente à $\sqrt{A} = |a+b+c|$ soit

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \Leftrightarrow ab + bc + ca = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0.$$

Solution 2.3.5 f est diagonalisable dans une base orthonormée (cf. *théorème 4.7 page 204*). Si on se place dans une base orthonormée de vecteurs propres (u_i), on a $f(u_i) = \lambda_i u_i$ donc $(f(u_i)|u_i) = \lambda_i$ donc

$$\inf_{(e_i)\in A} \prod_{i=1}^{n}(f(e_i)|e_i) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

- Si f n'est pas inversible, $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$; comme $(f(e_i)|e_i) = q(e_i) \geqslant 0$ donc, dans ce cas, on a bien l'égalité demandée.
- Supposons maintenant f inversible (et donc q définie positive).
  Soit (e_i) une base orthonormée quelconque, (u_i) la base orthonormée de vecteurs propres, P la matrice de passage de (u_i) à (e_i) ; on a alors

  $$(f(e_i)|e_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_{ij}^2 \text{ et } \sum_{i \text{ ou } j} p_{ij}^2 = 1$$

  (P est une matrice orthogonale).
  On utilise maintenant la concavité de la fonction ln : $\ln(f(e_i)|e_i) \geqslant \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^2 \ln \lambda_j$ donc

  $$\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(f(e_i)|e_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln((f(e_i)|e_i)) \geqslant \sum_{j=1}^{n} \ln \lambda_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij}^2 = \ln\left(\prod_{j=1}^{n} \lambda_j\right)$$

  d'où la conclusion en passant aux exponentielles.

Solution 3.1.1 Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k)$, g l'endomorphisme de F qui admet la matrice C dans la base $(v_1, \ldots, v_k)$. Nécessairement, le terme général de C s'écrit $c_{ij} = (v_i|g(v_j)) = (f(v_i)|v_j)$.
Si $u = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v_j$ alors $(u|g(u)) = \sum_{i,j} \bar{\alpha}_i \alpha_j (v_i|g(v_j)) = (f(u)|u)$.
Si u est un vecteur propre de C (donc de g) unitaire, on a :

$$g(u) = \lambda u \text{ et } |\lambda| = |(u|g(u))| = |(f(u)|u)| \leqslant 1.$$

On a donc prouvé que toutes les valeurs propres étaient en module inférieures ou égales à 1, il en est de même que leur produit qui est égal à $\det C$ (cf. *remarque 3.2.3 page 192*).

N.B. : on peut aussi considérer C comme matrice extraite d'une matrice A de f en complétant la base (v_i) en une base orthonormée.

Solution 3.1.2 Appelons α_j les affixes des points a_j dans le plan complexe, z celle de m et a celle du centre d'un disque de rayon 1. Notons $P_a(z) = \prod_{j=1}^{p}[z - (a + \alpha_j)]$ alors le problème se ramène à prouver que, dans le plan complexe, l'ensemble des z tels que $|P(z)| < 1$ ne contient pas le disque de centre 0 et de rayon 1.
Démontrons pour cela le résultat suivant : si P est un polynôme normalisé alors $\sup_{|z|=1} |P(z)| \geqslant 1$.
En effet, soit $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ alors $\widehat{P}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P(e^{it})e^{-int}\,\mathrm{d}t = 1$ or $|\widehat{P}(n)| \leqslant \sup_{|z|=1} |P(z)|$ (cf. *question (i) page 214*).
Si $\{z \in \mathbb{C} \mid |P(z)| < 1\}$ contenait un disque de centre 0 et de rayon 1 alors il contiendrait le cercle $|z| = 1$ et vu ce qu'on vient de prouver, on sait que c'est impossible. On peut donc conclure.

Solution 3.1.3 On fait le calcul matriciel par blocs dans la relation $M^*JM = J$, on obtient
$$A^*A = I_n + C^*C,\ \ D^*D = I_p + B^*B.$$
Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $\|AX\|^2 = \|X\|^2 + \|CX\|^2 \geqslant \|X\|^2$, la matrice A^*A est la matrice d'un produit scalaire hermitien. Elle est inversible et comme $\det(A^*A) = |\det A|^2 > 0$ A est bien inversible.

Le même raisonnement s'applique à D.