SUITES ET FONCTIONS

1. Espaces vectoriels normés réels ou complexes

1.1. Normes et distances.

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$, on pose
$$N(f) = |f(c)| + \|f'\|$$
où $c \in [a, b]$, $\|f'\|$ désignant la norme de la convergence uniforme.
Prouver que N est une norme ; est-elle équivalente à la norme de la convergence uniforme ?

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, $g \in E$, on définit $N_g(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)g(x)|$.

(1) À quelle condition N_g est-elle une norme sur E ?
(2) On suppose que g ne s'annule pas sur $[0, 1]$, comparer N_g et la norme de la convergence uniforme.

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{F C}}$
On rappelle que $\mathrm{d}(x, A) = \inf\{\mathrm{d}(x, a), a \in A\}$.
Prouver que l'application $\mathrm{d}_A\ : x \in E \mapsto \mathrm{d}(x, A)$ est lipschitzienne.

1.2. Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé.

Exercice 1.2.1. $\boxed{\textbf{F C}}$ Convergence faible et forte :
Soit E un espace préhilbertien, on dit que la suite (x_n) converge faiblement vers x ssi $\forall y \in E$, $\lim_{n\to+\infty} (x_n - x|y) = 0$.
On dit que (x_n) converge fortement vers x ssi $\lim_{n\to+\infty} \|x - x_n\| = 0$.
Montrer l'équivalence :
$$\big((x_n) \text{ converge faiblement vers } x,\ \lim_{n\to+\infty} \|x_n\| = \|x\|\big) \Leftrightarrow \big((x_n) \text{ converge fortement vers } x\big).$$

1.3. Exemples d'étude de suites.

Exercice 1.3.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Étudier les suites définies par : u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ dans les cas suivants :
a) $u_0 \in \mathbb{R}, f(x) = a\dfrac{1 + a^2}{1 + x^2} (a > 0)$. b) $u_0 \in \mathbb{R}, f(x) = a \sin x + b, |a| < 1$.
c) $u_0 \in \mathbb{R}, f(x) = (1 - \frac{1}{p})x + \dfrac{a}{px^{p-1}}$ où $a > 0$ et $p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Exercice 1.3.2. $\boxed{\textbf{I}}$

On considère la suite de réels définie par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$ avec $\beta a(1-\alpha) \neq 0$.

(1) Montrer que (x_n) converge ssi $|\alpha| < 1$.
(2) On programme le calcul des termes de la suite (x_n) et on suppose que les calculs sont fait avec d décimales. On note ε_n l'erreur d'arrondi dans le calcul de x_n (i.e. si x'_n est la valeur effectivement stockée en mémoire avec d décimales alors $x'_n = x_n + \varepsilon_n$) et δ_n celle faite dans le calcul de x_n à partir de x_{n-1} (δ_0 est l'erreur d'arrondi faite sur x_0).
On suppose α et β connus exactement et les x_n correctement arrondis au nombre décimal le plus proche. Trouver un majorant δ des δ_n.
(3) Donner une relation liant ε_n, ε_{n-1} et δ_n.
(4) Montrer alors par récurrence que $\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{n} d_{n,k}\delta_k$ où $d_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ \alpha d_{n-1,k} & \text{si } n > k \end{cases}$.
(5) En déduire que $|\varepsilon_n| \leqslant \dfrac{\delta}{1-|\alpha|}$.
On prouve en fait que l'écart type de l'erreur ε_n est majorée par $\dfrac{10^{-d}}{\sqrt{12(1-\alpha^2)}}$.

Exercice 1.3.3. $\boxed{\textbf{I T}}$

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ où I est un intervalle ouvert.

(1) Écrire la formule de Taylor reste intégral à l'ordre n pour $f(x+h)$ et $f(x-h)$. En déduire les limites, quand $h \to 0$, des expressions

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \text{ et } \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

(2) On veut approcher $f'(x)$ connaissant les valeurs de f.
  a) Expliquer pourquoi on ne peut utiliser la formule de la question 1 pour avoir une bonne précision.
  b) On note $T(h) = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$, donner l'expression de $T(h)$ à l'aide de la formule de Taylor à l'ordre n ($n \geqslant 2$).
  c) On pose $T_0^1(h) = T(h)$ et on définit par récurrence

$$T_0^i(h) = T_0^{i-1}(h/2) \text{ et } T_m^i(h) = \frac{4^m T_{m-1}^{i+1}(h) - T_{m-1}^i(h)}{4^m - 1}.$$

  Donner l'expression de $T_1^1(h)$ à l'aide de la formule de Taylor à l'ordre $n = 2p+1$ ($n \geqslant 3$), on ne calculera pas le reste intégral.
  Calculer les valeurs successives des $T_m^i(h)$ ($m \leqslant 3$, $i \leqslant 5$) pour $f(x) = -\operatorname{cotan} x$ avec $x = 0,04$, $h = 0,0128$ et comparer les résultats obtenus avec la valeur donnée par la machine (on donnera des valeurs approchées à 10^{-7} près).

Exercice 1.3.4. $\boxed{\textbf{D}}$

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n}$.
Donner un équivalent de u_n et donner un développement asymptotique à 2 termes de u_n.

EXERCICE 1.3.5. **D**
Soit f une application q-lipschitzienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admettant a comme point fixe. On définit par récurrence la suite (u_n) par

$$u_0 \in \mathbb{R},\ u_{n+1} = a_n + f(u_n)$$

où (a_n) est une suite de réels vérifiant $|a_n| \leqslant \alpha_n |u_n| + \beta_n$, (α_n) et (β_n) étant 2 suites de réels tendant vers 0.
Montrer que $u_n \to a$.

1.4. **Topologie d'un espace vectoriel normé.**

EXERCICE 1.4.1. **F**
Soient A et B deux ensembles non vides d'un espace vectoriel normé E tels que $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$.
Montrer qu'il existe U et V deux ouverts disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

EXERCICE 1.4.2. **I C** <u>Jauge dans un espace vectoriel normé</u>
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et O un ouvert convexe (i.e. $\forall (x,y) \in O^2$, $\forall t \in]0,1[$, $tx + (1-t)y \in O$), borné, symétrique (i.e. $\forall x \in O$, $-x \in O$).
On définit $N(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x = 0 \\ \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \mid \dfrac{x}{\lambda} \in O\} \end{cases}$.

(1) Prouver que N est une norme, que dire de O pour cette norme ?
(2) Comparer les topologies de $(E, \|.\|)$ et (E, N).

1.5. **Étude locale d'une application, continuité.**

EXERCICE 1.5.1. **F**
Montrer que si f est continue : $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, donner un contre-exemple où l'on n'a pas égalité.

EXERCICE 1.5.2. **I**
Soit A une partie non vide de E et $f\ : A \to \mathbb{R}$ une application k-lipschitzienne.

(1) Justifier la définition de $g\ : E \to \mathbb{R}$ suivante :

$$g(x) = \sup_{t \in A} (f(t) - k\|x - t\|).$$

(2) Vérifier que g est un prolongement de f et que g est lipschitzienne.

1.6. **Applications linéaires continues.**

Exercice 1.6.1. **I**

Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$ (E, F $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés) vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2 \;:\; f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ et } f \text{ bornée sur la boule unité.}$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 1.6.2. **I C**

E espace vectoriel normé, $(f,g) \in \mathcal{L}^2(E)$ vérifiant : $f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

(1) Montrer que : $f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}$.
(2) Montrer que f et g ne sont pas simultanément continus.
(3) En déduire que, si $\dim E < +\infty, \nexists (f,g) \in \mathcal{L}^2(E) \;:\; f \circ g - g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
(4) Trouver un exemple de tels couples (f,g).

Exercice 1.6.3. **I C**

Soit H un hyperplan de E espace vectoriel normé tel que $H = \operatorname{Ker} f$ où f est une forme linéaire non nulle.

Montrer l'équivalence : f continue ssi H non dense dans E.

1.7. **Complétude, compacité.**

Exercice 1.7.1. **F**

Soit A une partie dense d'un espace vectoriel normé E.

Montrer que, si toute suite de Cauchy de points de A converge dans E, E est complet.

Exercice 1.7.2. **F**

On prend $E = \mathbb{R}[X]$ et on pose

$$N_1(P) = \sup_{i \in [0,n]} |a_i|, \;\; N_2(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$$

où $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$.

Étudier la compacité de la boule unité pour ces 2 normes.

Exercice 1.7.3. **I C**

Soit $\| \ \|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et d la distance associée ; si A et B sont des parties de $\mathbb{R}^n$, on pose : $\mathrm{d}(A,B) = \inf\{\mathrm{d}(x,y),\ (x,y) \in A \times B\}$.

Existe-t-il $(a,b) \in A \times B$ tel que $\mathrm{d}(A,B) = \mathrm{d}(a,b)$ dans les cas suivants :

(*i*) A et B fermés ;
(*ii*) A et B compacts ;
(*iii*) A fermé et B compact ?

Exercice 1.7.4. **I**

Soit E un K-espace vectoriel normé ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$M \subset E$ est dite équilibrée ssi : $\forall \lambda \in K$, $|\lambda| \leqslant 1 \Rightarrow \lambda M \subset M$.

(1) Montrer que, si M est une partie quelconque de E, l'intersection de toutes les parties équilibrées de E contenant M est une partie équilibrée de E notée $\widehat{M}$ et appelée enveloppe équilibrée de M.
(2) Montrer que si M est compacte alors $\widehat{M}$ est compacte.
(3) Que peut-on dire si M est fermée ?

Exercice 1.7.5. **I**

Soit E un espace vectoriel normé, A un compact de E et f une application de A dans A telle que

$$\forall (x,y) \in A^2, \mathrm{d}(f(x), f(y)) \geqslant \mathrm{d}(x,y).$$

Montrer que f est une isométrie et que $f(A) = A$.
(Soient a et b deux éléments de A, on définit $f_n = f_{n-1} \circ f$ et $a_n = f_n(a)$, $b_n = f_n(b)$; prouver que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{d}(a, a_k) < \varepsilon$ et $\mathrm{d}(b, b_k) < \varepsilon$, en déduire que $f(A)$ est dense dans A et que $\mathrm{d}(f(a), f(b)) = \mathrm{d}(a,b)$).

Exercice 1.7.6. **F**

Soit E un espace vectoriel normé, A un compact de E et f une application de A dans A telle que

$$\forall (x,y) \in A^2, \mathrm{d}(f(x), f(y)) < \mathrm{d}(x,y) \text{ (pour } x \neq y),$$

prouver que f a un point fixe i.e. $\exists z \in A | f(z) = z$
(procéder par l'absurde en supposant que $c = \inf\{\mathrm{d}(x, f(x)), x \in A\} > 0$).

---

2. Espaces vectoriels normés de dimension finie

2.1. Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

Exercice 2.1.1. **F**

Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels tels que : $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\|P\| = \sum_{p=0}^{n} |P(x_p)| \text{ où } P \in \mathbb{R}_n[X].$$

Montrer que $\|P\|$ est une norme dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Prouver que : $\exists a > 0, \|P\| \geqslant a \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$.

Exercice 2.1.2. **D**
Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$; soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (a_n) dans $\mathbb{R}$. On suppose que A contient 2 points distincts : α, β ($\alpha < \beta$) et on désigne par (h_n) et (k_n) 2 suites d'entiers telles que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{h_n}) = \alpha$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{k_n}) = \beta$.
Montrer que : $\forall \gamma \in]\alpha, \beta[$, on peut construire une suite d'entiers (j_n) telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{j_n}) = \gamma$$

(on pourra prendre j_n entre k_n et h_n).
En déduire que A est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.1.3. **F**
Soit A une partie de $\mathbb{R}^p$ ayant un seul point d'accumulation, prouver que A est dénombrable.

Exercice 2.1.4. **F**
Soit K un compact convexe de $\mathbb{R}^2$.
Montrer qu'il existe un triangle inclus dans K d'aire maximale.

Exercice 2.1.5. **I C**
Soient A et B 2 parties de $\mathbb{R}^n$.

(1) a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et donner un contre-exemple où l'on a pas égalité.
 b) Montrer par contre que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(2) Soit $C = A + B$ où A est un compact de $\mathbb{R}^n$ et B un fermé.
 a) Montrer que C est fermé (utiliser les suites).
 b) Donner un contre-exemple où A et B sont fermés et où C n'est pas fermé.

(3) Si A est une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$ et B un ouvert, montrer que C est un ouvert.

Exercice 2.1.6. **F C**
Montrer que l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert dense. Son complémentaire est-il compact ?

Exercice 2.1.7. **F** <u>Rayon spectral</u>
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable, on pose $R_M = \sup\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}M} |\lambda|$. Si $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f_p(M) = \|M^p\|^{1/p}$.
Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} f_p(M) = R_M$.

Exercice 2.1.8. **F C**
Montrer que $\mathrm{O}(n)$ est compact.

Exercice 2.1.9. $\boxed{\textbf{I}}$ Distance de Hausdorff :
Soit A et B deux compacts de E espace vectoriel normé de dimension finie, on appelle distance d'un point à B le nombre $\mathrm{d}(x,B)=\inf\limits_{y\in B}\|x-y\|$; on note $h(A,B)=\sup\limits_{x\in A}\mathrm{d}(x,B)$ et $\delta(A,B)=\sup(h(A,B),h(B,A))$.
Montrer que δ vérifie les axiomes de la distance sur l'ensemble des fermés de E
(i.e. $\delta(A,B)=0$ ssi $A=B$, $\delta(A,B)=\delta(B,A)$, $\delta(A,B)\leqslant\delta(A,C)+\delta(C,B)$ et ceci pour tout triplet (A,B,C)).

2.2. Connexité par arcs.

Exercice 2.2.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $f\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ une application injective définie sur l'intervalle I.

(1) Si $A=\{(x,y)\in I^2 \mid x<y\}$, montrer que l'application $g\ :(x,y)\in A\mapsto\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ est continue.
(2) En déduire que f est strictement monotone.

Exercice 2.2.2. $\boxed{\textbf{I}}$ **Le théorème de Riesz**
L'objectif ici est de prouver que, si E est un espace vectoriel normé et si la boule unité fermée est compacte alors E est de dimension finie (ce qui fournit un critère topologique à la dimension finie).

(1) Soit E un e.v.n. de dimension $\geqslant 2$ et F un sous-espace vectoriel strict de E non réduit à $\{0\}$ et de dimension finie.
 a) Montrer que F est un fermé de E.
 b) Montrer que $\mathrm{d}(\lambda x,F)=|\lambda|\,\mathrm{d}(x,F)$.
 c) Montrer que $\forall y\in F$, $\mathrm{d}(x,F)=\mathrm{d}(x+y,F)$.
 d) Déduire des 3 questions précédentes l'existence de $x\in E$ tel que $\|x\|=1$ et $\mathrm{d}(x,F)=\dfrac{1}{2}$.
(2) On raisonne par l'absurde en supposant que $\dim E=+\infty$. Construire une suite (x_n) de E telle que $\|x_n\|=1$ et $\mathrm{d}(x_n,\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{n-1}))=\dfrac{1}{2}$ et conclure.

---

3. Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé

3.1. Suites et séries.

Exercice 3.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $a>0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que $a_{n+1}=\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\sum\limits_{p=1}^{n}a_p$ $(\alpha>0)$ et $a_1=a$.

(1) On pose $A_n=\ln\sum\limits_{p=1}^{n}a_p$; étudier la série $\sum(A_{n+1}-A_n)$.
(2) En déduire que : $\sum\limits_{p=1}^{+\infty}a_p$ converge et calculer sa somme dans le cas où $\alpha\leqslant\dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 3.1.2. $\boxed{\textbf{I}}$

Étudier la série de terme général $u_n = \ln\left(e^{s_n} - 1\right)$ où $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

EXERCICE 3.1.3. $\boxed{\textbf{F}}$

(1) Dans $\mathbb{R}_p[X]$ montrer que la famille $\left(1, X, \dfrac{X(X-1)}{2}, \dots, \dfrac{X(X-1)(\cdots)(X-p+1)}{p!}\right)$ est une base. Si $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p \dfrac{X(X-1)(\cdots)(X-p+1)}{p!}$ montrer que $a_k = P(k) - \binom{k}{1} P(k-1) + \cdots + (-1)^k P(0)$.

(2) On considère maintenant la série de terme général : $\dfrac{P(n)}{n!}$, calculer sa somme en fonction de $P(0), P(1), \dots, P(p)$ $(\deg P = p)$.

EXERCICE 3.1.4. $\boxed{\textbf{F C}}$

Étudier la convergence et déterminer la somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ où

$$u_n = \frac{n^2 + 9n + 5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)}.$$

EXERCICE 3.1.5. $\boxed{\textbf{F}}$

Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ln \dfrac{n^2+1}{n^2 - 2n + 2}$.

EXERCICE 3.1.6. $\boxed{\textbf{I C}}$

Trouver les sommes des séries de terme général :

(1) $\operatorname{Arctan} \dfrac{2}{n^2}$ (2) $\dfrac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1})(1+\sqrt{2})(\cdots)(1+\sqrt{n})}$ (4) $2^{-n} \operatorname{th}\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$

3.2. **Séries de nombres réels positifs.**

EXERCICE 3.2.1. $\boxed{\textbf{F}}$ Critère logarithmique de Cauchy :

Soit (u_n) une suite de réels positifs, montrer que :

(1) s'il existe n_0 entier et un réel $k > 1$ tels que $n \geqslant n_0 \Rightarrow \ln \dfrac{1}{u_n} > k \ln n$ alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge,

(2) s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow \ln \dfrac{1}{u_n} \leqslant \ln n$ alors la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge.

En déduire le critère logarithmique de Cauchy :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1/u_n)}{\ln n} = l \begin{cases} l > 1 & \text{la série converge} \\ l < 1 & \text{la série diverge} \end{cases}$$

Exercice 3.2.2. **F C**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que $(u_n) \searrow$.

Montrer que si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

Réciproque ?

Exercice 3.2.3. **F**

Soient (a_n) et (b_n) des suites de réels telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geqslant 0$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ u_n = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 3.2.4. **F**

Si $\sum a_n$ est une série à termes positifs, convergente, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} (a_1a_2\cdots a_n)^{1/n} = 0.$$

Exercice 3.2.5. **F**

Montrer que la série de terme général $u_n = \operatorname{Arctan}(n+a) - \operatorname{Arctan} n$ est convergente.

Si $f(a)$ désigne sa somme, calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} f(a)$.

Exercice 3.2.6. **F**

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs telle que

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha \ (\alpha \neq 1).$$

(1) Discuter, selon les valeurs de α, la nature de la série $\sum a_n$.

(2) Préciser pour quelles valeurs de a, la série $u_n = \dfrac{a(a-1)(\cdots)(a-n+1)}{n!}$ converge.

Exercice 3.2.7. **I C**

Comparer la nature des séries de termes généraux :

$$a_n, \frac{a_n}{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}, \quad 2^n a_{2^n}$$

où $((a_n) \searrow)$, $a_n \geqslant 0$.

Exercice 3.2.8. **I C**

Soit (u_n) une suite de réels positifs, on pose $v_0 = 1$ et on définit

$$v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + \sqrt{v_n^2 + u_n}).$$

Montrer l'équivalence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge } \Leftrightarrow (v_n) \text{ a une limite.}$$

Exercice 3.2.9. **I C**

Étudier la convergence de la série obtenue à partir de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ en supprimant tous les entiers n dont l'écriture en base 10 contient le nombre 5.

Exercice 3.2.10. **I**

Soit (u_n) une suite décroissante vers 0. On suppose que la suite $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k - nu_n$ est bornée. Montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.

Exercice 3.2.11. **I**

Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Montrer que l'on a :

(*i*) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n} = 0$,

(*ii*) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ (décomposer $\dfrac{1}{n(n+1)}$).

Exercice 3.2.12. **I T**

Trouver α et β pour que $\displaystyle\int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2) \cos nt \, \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$; en déduire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

3.3. **Sommation des relations de comparaison.**

Exercice 3.3.1. **D**

Soit (u_n) et (v_n) 2 suites de réels telles que $v_n = 2u_{n+1} + u_n$ pour tout n.
Montrer que (u_n) converge ssi (v_n) converge.
Généraliser ce résultat au cas où $v_n = \lambda u_{n+1} + u_n$ avec $|\lambda| > 1$.

3.4. Comparaison d'une série à une intégrale.

EXERCICE 3.4.1. $\boxed{\textbf{I}\quad}$ Étudier la convergence des séries de terme général u_n où u_n prend les valeurs :

(1) $\dfrac{1}{n^{\tan(\pi/4+1/n)}}$ (2) $\tan\dfrac{\pi n}{4n+1}-\cos\dfrac{\pi}{n}$ (3) $\left[\dfrac{\ln n}{\ln(n+1)}\right]^{n^2}$

(4) $n^{-\alpha}\left[(n+1)^{\frac{n+1}{n}}-(n-1)^{\frac{n-1}{n}}\right]$ (5) $\left[\dfrac{1}{n!}\prod\limits_{k=1}^{n}(\alpha+k)\right]^{1/n}$ $(\alpha>0)$ (6) $\arccos\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

(7) $\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ (8) $\dfrac{\ln^2 2+\cdots+\ln^2 n}{n^\alpha}$ (9) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1/2}}$

(10) $\displaystyle\int_0^{\pi/n}\frac{\sin^3 x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ (11) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^n x}{n}\,\mathrm{d}x$

EXERCICE 3.4.2. $\boxed{\textbf{I}\quad}$
Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n=\dfrac{n^\alpha}{S_n}$ et $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\ln^2 k$ (pour $n\geqslant 2$).

EXERCICE 3.4.3. $\boxed{\textbf{I}\quad}$
On s'intéresse à la fonction

$$f(x)=\int_0^x\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}t\right)\mathrm{d}t$$

f est-elle bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$?
Étudier la série $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\left(f^{-1}(\ln n)\right)^\alpha$.

3.5. Séries d'éléments d'un e.v.n. de dimension finie.

EXERCICE 3.5.1. $\boxed{\textbf{I}\quad}$ Étudier les séries $\sum u_n$ où u_n vaut :

(1) $(-1)^n n^{-\operatorname{th} n}$ (2) $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$ (3) $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$

(4) $\sin\left(\pi\sqrt[3]{n^3+n^2}\right)$ (5) $\dfrac{\cos(\ln n)}{n}$ (6) $(-1)^n\dfrac{(2n)!}{4^n n!}$

(7) $(-1)^n\sqrt{n}\sin(1/n)$ (8) $\sin\left[(2-\sqrt{3})^n\pi\right]$ (8') $\sin\left[(2+\sqrt{3})^n\pi\right]$

(9) $\dfrac{(1+i)^n}{(n^2+1)a^n}$, $a\in\mathbb{C}$ (10) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{n}-\pi n e^{-1/n}\right)$ (11) $\dfrac{1!-2!+\cdots+(-1)^{n-1}n!}{(n+1)!}$

EXERCICE 3.5.2. $\boxed{\textbf{I}\quad}$
Soit (u_n) une suite de réels positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=1-\dfrac{\alpha}{n}+v_n$ où $\alpha\in\mathbb{R}$ et $\sum v_n$ converge absolument.
Étudier selon les valeurs de α la nature de la série $\sum u_n$.

Application : nature de $\sum\sqrt{n!}\prod\limits_{p=1}^{n}\sin\dfrac{1}{\sqrt{p}}$.

Exercice 3.5.3. **F**

Soit $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle à coefficients réels ou complexes. On considère la série de terme général : $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ (n assez grand).

(1) Montrer que $\sum\limits_{n=a}^{+\infty} u_n$ est A.C. ssi $\deg Q \geqslant \deg P + 2$.

(2) Montrer que $\sum\limits_{n=a}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge ssi $\deg Q \geqslant \deg P + 1$ (retrancher de u_n sa partie principale).

Exercice 3.5.4. **F C**

Soit (a_n) une suite de réels, montrer que si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^2$ converge, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n}$ converge.

Réciproque ?

Exercice 3.5.5. **F C**

Soit (u_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$u_{3p+1} = \frac{1}{4p+1},\ u_{3p+2} = \frac{1}{4p+3},\ u_{3p+3} = \frac{-1}{2p+2}.$$

(1) Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ est convergente et que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n$ où $w_n = u_{3n+1} + u_{3n+2} + u_{3n+3}$.

(2) Montrer que la suite (u_n) se déduit de $v_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ par changement de l'ordre des termes.

(3) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{n=1}^{3p} u_n = \sum\limits_{n=1}^{4p} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p+1} + \cdots + \dfrac{1}{2p}\right)$. En admettant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$, montrer que : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}\ln 2$.

Exercice 3.5.6. **I T C**

(1) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0, n\neq m} \dfrac{1}{m^2-n^2}$ est convergente et a pour somme $\dfrac{1}{4m^2}$.

(2) Soit $u_{mn} = \dfrac{1}{m^2-n^2}$ si $m \neq n$, $u_{nn} = 0$, montrer que

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{mn}\right) = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{mn}\right) \neq 0$$

Exercice 3.5.7. **F**

Nature des séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ où

$$u_n = \sin\left[\pi(2-\sqrt{3})^n\right] \text{ et } v_n = \sin\left[\pi(2+\sqrt{3})^n\right].$$

EXERCICE 3.5.8. $\boxed{\textbf{F}}$

Nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n n^\alpha\left(\ln\dfrac{n+1}{n-1}\right)^\beta$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 3.5.9. $\boxed{\textbf{F}}$

Discuter en fonction de $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ la nature de la série de terme général :

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n n^\beta}.$$

EXERCICE 3.5.10. $\boxed{\textbf{I}}$

On pose $u_n=\prod_{q=1}^{n}\left(1+\dfrac{(-1)^{q-1}}{\sqrt{q}}\right)$.

(1) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ (on montrera que $\lim_{n\to+\infty}\ln u_n=-\infty$).

(2) Montrer qu'il existe $a>0$ tel que $u_n\sim\dfrac{a}{\sqrt{n}}$ (revenir au logarithme).

EXERCICE 3.5.11. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs telle que l'on ait, au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ est divergente.

EXERCICE 3.5.12. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $u=(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ vérifiant les hypothèses du théorème d'interversion de sommations, on veut prouver que

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{q=1}^{+\infty}u_{p,q}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n}u_{p,q}\right).$$

On admettra que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{(p,q)\in[\![0,n]\!]^2}u_{p,q}=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{q=1}^{+\infty}u_{p,q}\right)$. Prouver ce résultat lorsque les termes $u_{p,q}$ sont tous positifs.

L'étendre ensuite au cas complexe.

EXERCICE 3.5.13. $\boxed{\textbf{I}}$

Étudier la convergence de $\sum_{i,j}\dfrac{1}{(i+j+1)^\alpha}$

Exercice 3.5.14. $\boxed{\mathbf{I}}$

(1) Étudier la convergence et calculer la somme de la suite double
$$\left(\frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)}\right)_{i\geqslant 0, j\geqslant 1}.$$
On rappelle que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

(2) Déduire du 1. la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{E(\sqrt{n})}{n(n+1)}$

(on admettra que $\lim_{N\to+\infty}\sum_{i+j^2\leqslant N}\frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)}=\left(\frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)}\right)_{i\geqslant 0,j\geqslant 1}$).

Exercice 3.5.15. $\boxed{\mathbf{I}}$

(1) Montrer que, pour $|x|<\frac{1}{2}$, la suite double $\left((-1)^{p+q}\binom{p+q}{q}x^{p+2q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ converge. On note $S(x)$ sa somme.

(2) Montrer que lorsque $S(x)$ est définie alors $S(x)=\frac{1}{1+x+x^2}$ (on admettra que $\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{p+q=n}(-1)^{p+q}\binom{p+q}{q}x^{p+2q}\right)=S(x)$).

(3) Mettre $S(x)$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ de deux façons différentes.

(4) En déduire la valeur (selon n) de $d_n=\sum_{j\leqslant k, j+k=n}(-1)^k\binom{k}{j}$ (on admettra ici le résultat suivant : le développement limité à l'ordre N au voisinage de 0 de $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ est $\sum_{n=0}^{N}a_nx^n$– ceci se démontre avec les séries entières vues plus loin dans la chapitre 7–.)

Exercice 3.5.16. $\boxed{\mathbf{I}}$

On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de l'entier $n\geqslant 1$.
Montrer que la série $\sum d(n)e^{-n}$ converge et, en utilisant une série double, que sa somme est égale à
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}d(n)e^{-n}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{e^{-p}}{1-e^{-p}}.$$

Exercice 3.5.17. $\boxed{\mathbf{I}}$

(1) Montrer que la somme $\sum_{a=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2b+ab^2+2ab}$ est rationnelle et calculer sa valeur.

(2) Peut-on trouver d'autres sommes de ce genre ?

Exercice 3.5.18. $\boxed{\mathbf{I}}$

Calculer la somme de la suite double $u_{p,q}=2^{-3p-q-(p+q)^2}$, $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ (on utilisera la propriété $\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}\right)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\sum_{p+q=n}u_{p,q}$).

---

4. Suites et séries de fonctions

4.1. **Convergence simple, uniforme, normale.**

Exercice 4.1.1. **F**

Étudier la convergence de la suite de fonctions définie par :

$$f_0(t) = 2t,\ f_{n+1}(t) = \sqrt{2 + f_n(t)},\ t \in [-1, 1].$$

En déduire l'étude des suites $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} f_n(t)\,\mathrm{d}t$, $J_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{f_n(t)}$, $K_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f_{n-1}(t)}{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.1.2. **I**

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions numériques (f_n) dans chacun des cas suivants :

(1) $nx^n \ln x$, $x \in [0, 1]$ (2) $\dfrac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$, $f_n(0) = 0$, $x \geqslant 0$ (3) $n^\alpha x e^{-nx}$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$

(4) $\dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$, $x \in \mathbb{R}$ (5) $x\dfrac{1 - a^{-nx}}{1 - a^x}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ (6) $\dfrac{\sin x}{x(1 + nx)}$, $x \in [0, \pi]$

(7) $\dfrac{\sin^2 nx}{n \sin x}$, $x \in]0, \pi[$ (8) $nx^{n+1}\left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{x^n}{2n+1}\right)$, $x \in [0, 1]$

Exercice 4.1.3. **I** On pose $f_n(t) = nt^n \sin \pi t$, $t \in [0, 1]$; trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[0,1]} f_n(t)$.

Exercice 4.1.4. **D C** Exemple d'une fonction continue non dérivable.

(1) Soit f une fonction continue définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Soit $x_0 \in \overset{o}{I}$, montrer l'équivalence des propriétés (i) et (ii) suivantes :
   (i) f différentiable en x_0,
   (ii) $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - k)}{h + k}$ a une limite quand $(h, k) \to (0, 0)$, $h \geqslant 0$, $k \geqslant 0$.
   Trouver un contre-exemple où $\dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$ a une limite quand h tend vers 0 et où f n'est pas différentiable en x_0.
(2) Soit $I = [0, 1]$ et (f_n) la suite de fonctions définies par
   (i) $f_0(x) = x$,
   (ii) f_n est affine sur l'intervalle $[k/3^n, (k + 1)/3^n]$, $k \in [0, 3^n - 1]$,
   (iii) $f_n(\frac{k}{3^{n-1}}) = f_{n-1}(\frac{k}{3^{n-1}})$, $f_n(\frac{3k+1}{3^n}) = f_{n-1}(\frac{3k+2}{3^n})$ et $f_n(\frac{3k+2}{3^n}) = f_{n-1}(\frac{3k+1}{3^n})$.
   Représenter f_0, f_1, f_2 ; montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f que l'on ne cherchera pas à exprimer (tout au moins dans un premier temps, mais si la curiosité vous prend !).
   Prouver enfin que f n'est dérivable en aucun point de I.

Exercice 4.1.5. **F**

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1 + x^2)^n}$ est normalement convergente sur $[a, +\infty]$ $(a > 0)$ mais non uniformément convergente sur $[0, 1]$.
Quelle est sa somme ?

Exercice 4.1.6. **I**

Soit $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{x+n}$.

(1) Étudier le domaine de définition de g ainsi que la continuité de g.
(2) Calculer ensuite $g(1)$, $xg(x)-g(x+1)$.
(3) En déduire une expression de $g(p)$ pour $p\in\mathbb{N}$.

Exercice 4.1.7. **F**

Soit $u_n(x)=\operatorname{th}(x+n)-\operatorname{th} n$.

(1) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ converge et que sa somme $f(x)$ est croissante et continue.
(2) Quelle est la nature de la série $\sum(1-\operatorname{th} n)$? La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?
(3) Démontrer que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x+1)=f(x)+1-\operatorname{th} x$.

Exercice 4.1.8. **I C**

Soit $\varphi\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ où $I=[-a,a]$ vérifiant : $\forall x\in I,\ |\varphi(x)|\leqslant C|x|$. On cherche, dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ les fonctions f telles que :

$$f(0)=0,\ \forall x\in I,\ f(x)-f(\frac{x}{2})=\varphi(x)\tag{1}$$

(1) Montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\varphi\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ converge uniformément sur I et que sa somme $g(x)$ est une fonction continue vérifiant (1).
(2) Montrer qu'il n'existe pas d'autre solution de (1) (on pourra montrer que la différence de 2 solutions de (1) est nulle en considérant la continuité à l'origine).

Exercice 4.1.9. **I**

Étudier la convergence simple et uniforme de $\sum u_n(x)$, sur des intervalles à préciser, dans les cas suivants :

(1) $\dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$ $(|x|\neq 1)$
(2) $\dfrac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}$ (et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}s(x)$)
(3) $\dfrac{x}{(1+nx)(1+(n+1)x)}$ $(x\geqslant 0)$
(4) $\dfrac{1}{(n-x)(n+1-x)(n+2-x)}$ (calculer sa somme)

Exercice 4.1.10. **I**

On pose $f(x)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+x)^2}$, étudier le domaine de définition et la continuité de f.

Montrer que $\dfrac{1}{m^2}\sum\limits_{p=0}^{m-1}f(\frac{x+p}{m})=f(x)$ $(m\in\mathbb{N}^*)$.

4.2. **Intégration sur un segment des suites de fonctions continues.**

Exercice 4.2.1. $\boxed{\textbf{I T}}$

Existence et calcul de $1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$ (utiliser les intégrales de Wallis).

Exercice 4.2.2. $\boxed{\textbf{I C}}$

Montrer les 2 égalités : $I = \displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$, $J = \displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$ à l'aide de développements en séries.

Comment déterminer J à 10^{-p} près ? Même question avec I.

4.3. **Suites et séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.**

Exercice 4.3.1. $\boxed{\textbf{I T}}$

Montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} nxe^{-nx^2}$ est uniformément convergente sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}^*$.

Soit $f(x)$ sa somme, déterminer $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et en déduire f.

Exercice 4.3.2. $\boxed{\textbf{F}}$

La deuxième question de cet exercice utilise la théorie des séries entières vue au chapitre 7 pages 281 à 287.

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi e^{x\sin t}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que f est C^∞ et vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre.
(2) Écrire le développement en série entière de f.

Exercice 4.3.3. $\boxed{\textbf{I T}}$ Cet exercice utilise les séries entières vues au chapitre 7 pages 281 à 287.

(1) Montrer que l'intégrale $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi |1 - x\cos t|^{1/2}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
(2) Montrer que f est paire ; en partant du développement en série entière de $(1-u)^{1/2}$, montrer que $f(x)$ est développable en série entière de x pour $|x| < 1$
(on pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}$).
(3) Montrer directement, par dérivation sous le signe $\int$, que f est 2 fois dérivable sur]-1,1[.
Vérifier la relation :

$$4x(x^2-1)f''(x) + 4(x^2-1)f'(x) - xf(x) + \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{2\sin t}{\sqrt{1 - x\cos t}}\right]\mathrm{d}t = 0.$$

En déduire que, pour $|x| < 1$, $f(x)$ est solution de l'équation différentielle

$$4x(x^2-1)y'' + 4(x^2-1)y' - xy = 0. \tag{1}$$

(4) En partant de (1), trouver une relation de récurrence entre les coefficients b_n du D.S.E. de f, comparer ce résultat avec celui du 2.
(on retrouvera ainsi la valeur du rapport $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$ où $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t$).

4.4. **Approximation des fonctions d'une variable réelle.**

Exercice 4.4.1. $\boxed{\textbf{I C}}$ Théorème de Weierstrass :
On munit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ de la norme de la convergence uniforme.

(1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit $B_n(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} P(\frac{k}{n})\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}$ (polynômes de Bernstein).
Montrer que $B_n(XP) = \dfrac{X(1-X)}{n}B_n'(P) + XB_n(P)$. Calculer $B_n(1)$, $B_n(X)$, $B_n(X^2)$.

(2) Montrer la relation :
$$\sum_{k=0}^{n}(k-nX)^2\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = nX(1-X).$$
En déduire que, si $\alpha > 0$ et $t \in [0,1]$ on a :
$$\sum_{k\in A_n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4\alpha^2 n} \text{ où } A_n = \{k \in [0,n], \left|\frac{k}{n} - t\right| \geqslant \alpha\}.$$

(3) Pour $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on définit de même
$$B_n(f)(t) = \sum_{h=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}.$$
Montrer que $B_n(f)$ converge uniformément vers f.
Application : montrer que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t\right|$ est une norme sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

(4) Trouver une suite de polynômes qui converge uniformément vers $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$.

(5) Généraliser le résultat du 3. à la dimension 2.

Exercice 4.4.2. $\boxed{\textbf{D C}}$ Phénomène de Runge :
Sur $I = [-1,+1]$, on prend $x_k = \dfrac{2k+1}{2m}$, $x_k' = -x_k$, $k \in [0, m-1]$. Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2+\alpha^2}$, $\alpha > 0$ et P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points x_k, x_k' $(n = 2m)$.

(1) Si on pose $\omega_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{m-1}(x^2 - x_k^2)$, montrer que $f(x) - P_n(x) = \dfrac{1}{x^2+\alpha^2}\dfrac{\omega_n(x)}{\omega_n(\alpha i)}$.

(2) Prouver que $\omega_n(1) \sim \sqrt{2}\left(\dfrac{2}{e}\right)^n$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ et trouver un nombre $\beta > 0$ tels que $|\omega_n(\alpha i)| \sim C\beta^n$.

(3) Montrer alors que, pour α suffisamment petit, $\|f - P_n\| \to +\infty$.

1. Indications :

Indication 1.1.1 Si $|f(c)| + \|f'\| = 0$ alors $f(c) = 0$ et $\|f'\| = 0$ donc $f = 0$.
N n'est pas équivalente à $\|.\|$, prendre $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$.

Indication 1.1.2

(1) La condition cherchée est $S = [0,1]$ où S est l'adhérence de $\{x \in [0,1] | g(x) \neq 0\}$.
(2) Les normes N_g et $\|.\|$ sont équivalentes.

Indication 1.1.3 Avec $\mathrm{d}(x,a) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,a)$ montrer $\mathrm{d}(x,A) \leqslant \mathrm{d}(x,y) + \mathrm{d}(y,a)$ puis $\mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(y,A)$.

Indication 1.2.1 $\Rightarrow$ Écrire $(x_n - x|x_n - x) = \|x_n\|^2 - 2(x_n|x) + \|x\|^2$.
$\Leftarrow$ Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Indication 1.3.1

a) $a < 1$: (u_n) converge, $a > 1$: pas de convergence, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, $a = 1$: u_n converge vers 1.
b) f est contractante et $f(\mathbb{R}) \subset [-a+b, a+b]$ donc (u_n) converge.
c) Se limiter au cas où $x > 0$ et montrer que, à partir de u_1, la suite (u_n) est décroissante.

Indication 1.3.2

(1) Si $l = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$ alors $x_n - l = \alpha^n(x_0 - l)$.
(2) Si $x''_n = \alpha x'_{n-1} + \beta$ alors $x'_n = x''_n + \delta_n$ et on a $|\delta_n| \leqslant \frac{10^{-d}}{2}$.
(3) $\varepsilon_n = \alpha\varepsilon_{n-1} + \delta_n$.
(4) Récurrence immédiate.
(5) Prouver par récurrence que $d_{n,k} = \alpha^{n-k}$.

Indication 1.3.3

(1) Faire le changement de variable $t = hu$ dans le reste intégral, on trouve
$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(x+thu)\,\mathrm{d}t$.
(2) a) On fait la différence de 2 quantités très proches, les calculs sont très sensibles aux erreurs d'arrondi.
b) On trouve $T(h) = f'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{2n!}[1 + (-1)^{n-1}]f^{(n)}(x)$
$+\frac{h^n}{2n!}\int_0^1 (1-u)^n [f^{(n+1)}(x+thu) + (-1)^n f^{(n+1)}(x-thu)]\,\mathrm{d}u$.
c) $T_1^1(h) = f'(x) - \frac{h^4}{480}f^{(5)}(x) - \cdots - \frac{h^{2p}(4^{p-1}-1)}{(2p+1)!4^{p-1}}f^{(2p+1)}(x) + R_n$.

Indication 1.3.4 Poser $x_n = \frac{1+\sqrt{4n+1}}{2}$, montrer la double inégalité $x_{n-1} \leqslant u_n \leqslant x_n$ par récurrence, en déduire que $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Indication 1.3.5 Montrer que $|u_{n+1} - a| \leqslant (\alpha_n + q)|u_n - a| + \gamma_n$ où $\gamma_n = \alpha_n a + \beta_n \to 0$. Poser $v_n = |u_n - a|$ et prendre $n \geqslant N$ pour que $\alpha_n + q \leqslant k < 1$ et $\gamma_n \leqslant \varepsilon$, et $n \geqslant N_1 \geqslant N$ pour que $r^{n-N}(x_N - l) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-r}$.

Indication 1.4.1 Prendre la fonction $f\ : x \in E \mapsto \mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(x,B)$.

Indication 1.4.2

(1) si $N(x) = 0$ alors, si $M = \sup\{\|y\|, y \in O\}$, alors $\forall\lambda$, $\|x\| \leqslant \lambda M$. pour prouver que $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ écrire que $N(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \mid \frac{x}{\lambda} \in \overline{O}\}$ et montrer que $\frac{x+y}{N(x)+N(y)} \in \overline{O}$. O est la boule unité pour N).
(2) Tout ouvert de (E,N) est un ouvert de $(E,\|.\|)$.

Indication 1.5.1 Utiliser la caractérisation séquentielle de l'adhérence, prendre $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1,+\infty[$ comme contre-exemple.

Indication 1.5.2

(1) Poser $h(x,t) = f(t) - k\|x - t\|$ et montrer que $h(x,t) \leqslant f(u) + k\|x - u\|$.

(2) Montrer que $g(x) = f(x)$ par double inégalité puis utiliser l'inégalité $h(x,t) \leqslant h(y,t) + k\|x-y\| \leqslant g(y) + k\|x-y\|$.

Indication 1.6.1 Montrer que $f(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}f(x)$ puis, si (λ_n) est une suite de rationnels qui tend vers λ, prendre $p_n = \left[\frac{1}{(\lambda-\lambda_n)\|x\|}\right]$ et montrer que $f((\lambda-\lambda_n)x) \to 0$.

Indication 1.6.2

(1) Immédiat par récurrence sur n.
(2) Utiliser l'inégalité $n\|g^{n-1}\| \leqslant 2\|f\|.\|g\|.\|g^{n-1}\|$.
(3) Conséquence immédiate du 2.
(4) Dans $\mathbb{R}[X]$, prendre $f(P) = P'$ et $g(P) = XP$.

Indication 1.6.3 Sens direct : immédiat, pour la réciproque, montrer que $\overline{H} = H$ par l'absurde et prendre a tq $f(a) = 1$ et montrer qu'il existe une boule ouverte $B(0,r)$ qui ne rencontre pas $a + H$.

Indication 1.7.1 Si (x_n) est une suite de Cauchy de E, prendre (y_n) une suite d'éléments de A telle que $\|y_n - x_n\| \leqslant \frac{1}{n}$.

Indication 1.7.2 Prendre la suite $P_n = X^n$.

Indication 1.7.3 (i) Non car : $A = \{y \geqslant 0, y \geqslant \frac{1}{x}\}$, $B = \{y \leqslant 0\}$ ne conviennent pas, (ii) oui car : $f\ : (x,y) \to \mathrm{d}(x,y)$ est continue, (iii) oui car on peut se ramener au ii en remplaçant A par A' compact.

Indication 1.7.4

(1) Immédiat.
(2) Montrer que $\widehat{M} = \{\lambda x | \lambda \in K, |\lambda| \leqslant 1, x \in M\} = M'$.
(3) Prendre $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\}$.

Indication 1.7.5 Extraire une suite $(a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)})$ qui converge dans A et prouver le premier point en posant $k = \varphi(n+p) - \varphi(n) \geqslant 1$. On a immédiatement que $f(A)$ dense dans A, ensuite, utiliser $\mathrm{d}(f(a), f(b)) \leqslant \mathrm{d}(f_k(a), f_k(b)) \leqslant \mathrm{d}(a,b) + 2\varepsilon$.

Indication 1.7.6 Si $c > 0$ alors $\mathrm{d}(f(y), f \circ f(y)) < c$.

Indication 2.1.1 $\|.\|$ est une norme : immédiat, on utilise ensuite l'équivalence des normes en dimension finie.

Indication 2.1.2 Prendre $N_1 \geqslant N$ tel que $a_{N_1} < \gamma$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_{N_1+p} > \gamma$ pour N assez grand tel que $n \geqslant N \Rightarrow |a_{n+1} - a_n| \leqslant \varepsilon$ et prendre $l = \max\{k \in [N_1, N_1+p] \mid a_k < \gamma\}$ et choisir $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

Indication 2.1.3 Construire par récurrence la suite (a_n) définie par $a_{n+1} \in D(a, r_n) \cap A$, où $r_n = \mathrm{d}(a, a_n)$, A contient une infinité de points. Si a est le seul point d'accumulation de A, poser $A_n = \{x \in A | \frac{1}{n} \leqslant \mathrm{d}(a,x) \leqslant n\}$, ensemble fini et conclure.

Indication 2.1.4 Considérer $f\ :\ (A,B,C) \in K^3 \to \mathcal{A}(A,B,C) \in \mathbb{R}$ où $\mathcal{A}(A,B,C)$ désigne l'aire du triangle (A,B,C).

Indication 2.1.5

(1) a) $\overline{A \cap B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cap B$, Contre-exemple ($n = 2$) : $A = \mathbb{Q}^2, B = \mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$.
   b) Immédiat par double inclusion.
(2) a) Si $c_n = a_n + b_n$ est une suite convergeant dans $\mathbb{R}^n$ alors il existe (a_{n_k})suite convergente dans A.
   b) Contre-exemple ($n = 2$) : $A = \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}\sqrt{2}\times\mathbb{R}$.
(3) $\forall x \in A, x + B$ ouvert et $A + B = \bigcup_{x \in A}(x + A)$.

Indication 2.1.6 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, prendre $A + \frac{1}{p} I_n$. Son complémentaire n'est pas borné.

Indication 2.1.7 Prendre la norme 1 dans une base de vep de M et utiliser l'équivalence des normes.

Indication 2.1.8 $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(I_n)$ où $f(A) = A.A^{\mathrm{T}}$ et si $A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}(n)$ alors $|a_{ij}| \leqslant 1$.

Indication 2.1.9 Partir de $\forall (x,y,z) \in A \times B \times C$, $\mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$, en déduire que $\mathrm{d}(x,B) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,B)$ puis $\mathrm{d}(x,B) \leqslant \mathrm{d}(x,C) + \delta(C,B)$ et $h(A,B) \leqslant \delta(A,C) + \delta(C,B)$.

Indication 2.2.1

(1) Évident et on remarque aussi que g ne s'annule pas.
(2) A connexe par arcs dans $\mathbb{R}^2$.

Indication 2.2.2

(1) a) F est un espace de Banach donc F est fermé.
 b) Il suffit de faire une homothétie.
 c) Immédiat !
 d) Il existe $x \in E$ tel que $\mathrm{d}(x,F) \neq 0$, on utilise le (b) et la fonction continue $f\ : y \in F \mapsto \|\lambda x + y\|$ et on montre que $]1/2, +\infty[\subset f(F)$.
(2) Prendre x_1 sur la sphère unité puis par récurrence, utiliser $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Indication 3.1.1

(1) Poser $B_n = \sum_{p=1}^{n} a_p$ et exprimer B_{n+1} en fonction de B_n, montrer alors que la série $\sum A_{n+1} - A_n$ converge.
(2) Pour $\alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$, cette somme est nulle.

Indication 3.1.2 $u_n \to 0$ (écrire le développement en série de $\ln 2$), poser $s_n = \ln 2 - r_n$, montrer que $r_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ et utiliser le théorème des séries alternées. Écrire le développement asymptotique de e^{s_n} et conclure à la convergence.

Indication 3.1.3

(1) Étudier $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$ et montrer que $a_k = \Delta^k P(0)$.
(2) Écrire $P(n) = a_0 + a_1 \frac{n!}{(n-1)!} + \cdots + a_p \frac{n!}{p!(n-p)!}$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} = e \sum_{l=0}^{p} \left(\sum_{h=0}^{p-l} \frac{(-1)^h}{h!} \right) \frac{P(l)}{l!}$.

Indication 3.1.4 On décompose la fraction rationnelle, on trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{2}{9}$.

Indication 3.1.5 On a une série aux différences qui diverge.

Indication 3.1.6 (1) Écrire $\frac{2}{n^2} = \frac{(n+1)-(n-1)}{1+(n-1)(n+1)}$, la somme vaut $\frac{3\pi}{4}$.
(2) Écrire $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, la somme vaut $\tan 1$.
(3) Utiliser $v_n = \frac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})(\cdots)(1+\sqrt{n})}$, la somme est égale à 1.
(4) Faire intervenir $\frac{2^{-n+1}}{\mathrm{th}\,\frac{x}{2^{n-1}}} - \frac{2^{-n}}{\mathrm{th}\,\frac{x}{2^n}}$, la somme vaut $\frac{2}{\mathrm{th}\,2x} - \frac{1}{x}$.

Indication 3.2.1 La première propriété est équivalente à $u_n < \frac{1}{n^k}$, la deuxième à $u_n \geqslant \frac{1}{n}$.

Indication 3.2.2 Utiliser $s_{2n} - s_n \geqslant n u_{2n}$, la réciproque est fausse, penser à $u_n = \frac{1}{n \ln n}$.

Indication 3.2.3 Avec $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $u_n - b = \frac{a_1(b_1-b) + a_2(b_2-b) + \cdots + a_n(b_n-b)}{s_n}$ procéder comme avec Césaro.

Indication 3.2.4 Utiliser l'inégalité de la moyenne et Césaro.

Indication 3.2.5 Utiliser la relation $\mathrm{Arctan}\,x = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x}$ pour $x > 0$ ou la formule d'addition des arctangentes, la limite est infinie.

Indication 3.2.6

(1) C'est la règle de Duhamel.

(2) Si $a > 0$ la série est absolument convergente, si $a \leqslant -1$ la série est divergente, pour $-1 < a \leqslant 0$, on a une série alternée convergente.

Indication 3.2.7 $\sum a_n$ C alors la deuxième série est équivalente à $\dfrac{a_n}{s}$ où $s = \sum a_n$ C, si $\sum \frac{a_n}{s_n}$ C alors $b_n = \frac{a_n}{s_n} \to 0$ et utiliser les séries aux différences. Pour la troisième série, il suffit de faire des encadrements.

Indication 3.2.8 Réécrire la relation : $4v_{n+1}(v_{n+1} - v_n) = u_n$.
Si la suite (v_n) converge vers l alors $u_n \leqslant 4l(v_{n+1} - v_n)$. Réciproquement : si la série $\sum u_n$ converge alors $4v_0(v_{n+1} - v_0) \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Indication 3.2.9 Si on appelle A_k l'ensemble des nombres compris entre 10^k et $10^{k+1} - 1$ (au sens large) et ne comportant pas de 5 dans leur écriture, montrer que $\sum_{n\in A_k} \frac{1}{n} \leqslant \frac{8\times 9^k}{10^k}$.

Indication 3.2.10 Écrire $s_{n+1} - s_n = n(u_n - u_{n+1}) \geqslant 0$, montrer que $s_n \to s$, que $nu_n \leqslant s - s_n \to 0$ et conclure $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = s$.

Indication 3.2.11 Écrire que $\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n} = \frac{ns_n-(s_1+s_2+\cdots+s_{n-1})}{n}$ où $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
Pour le (i), utiliser la convergence au sens de Césaro, pour le (ii), montrer que $\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n(n+1)} = \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n+1} - \frac{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}}{n}$ et utiliser une série aux différences.

Indication 3.2.12 $\alpha = -1, \beta = \frac{1}{2\pi}$, montrer alors que $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \int_0^{\pi} g(t)\sin(N+\frac{1}{2})t\,\mathrm{d}t$ où $g(t) = \frac{t-\frac{t^2}{2\pi}}{2\sin\frac{t}{2}}$, on obtient le résultat après une I.P.P.

Indication 3.3.1 Le sens direct est évident, pour la réciproque, se ramener en 0, exprimer u_n en fonction de v_n : $u_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n w_n$ où $w_n = w_0 - \sum_{k=0}^{n-1}(-2)^k v_k$ et $w_n = o(2^n)$.

Indication 3.4.1 (1) diverge, (2) diverge (montrer que $\tan\frac{\pi n}{4n+1} - \cos\frac{\pi}{n} \sim -\frac{\pi}{8n}$), (3) $u_n \sim e^{\frac{-n}{\ln n}}$ converge, (4) $u_n \sim 2n^{-\alpha}\ln n$ converge ssi $\alpha > 1$, (5) $u_n \to 1$, la série diverge, (6) $u_n \sim \frac{1}{n}$, diverge, (7) $n^2 u_n \to 0$, converge, (8) utiliser l'encadrement $\frac{n\ln^2 2}{n^\alpha} \leqslant u_n \leqslant \frac{n\ln^2 n}{n^\alpha}$, (9) poser $x = \tan\theta$, diverge, (10) majorer $\sin x$ par x et $\frac{1}{1+x}$ par 1, converge, (11) utiliser Wallis et montrer que $u_n = O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, converge.

Indication 3.4.2 Poser $I(n) = \int_2^n \ln^2 t\,\mathrm{d}t$ et montrer que $I(n-1) \leqslant \int_1^{n-1}\ln^2 t\,\mathrm{d}t \leqslant S_{n-1} \leqslant I_n \leqslant S_n - \ln^2 2 \leqslant S_n$ et en déduire que $u_n \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}\ln^2 n}$.

Indication 3.4.3 f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Découper l'intervalle d'intégration (de 0 à 1 puis de 1 à x) puis écrire que $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} t = \operatorname{Arctan}\frac{1}{t} = \frac{1}{t} + g(t)$ pour en déduire que $f(x) = \ln x + b + o(1)$. On applique cette dernière relation à $x = f^{-1}(\ln n)$, il existe une constante c telle que $f^{-1}(\ln n) \sim e^c n$.

Indication 3.5.1 (1) $n^{-\operatorname{th} n} \searrow 0$ donc convergence, (2) $(\alpha > 0)$ $u_n - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = \frac{-1}{n^\alpha(n^\alpha+(-1)^n)}$, (3) A.C. ssi $\alpha > 1$ et pour $0 < \alpha \leqslant 1$ montrer que $u_{2n} + u_{2n+1} \sim \frac{-1}{(2n(2n+1))^\alpha}$. (4) non convergence car $|u_n| \to \sin\frac{\pi}{3}$, (5) si $2k\pi - \frac{\pi}{3} \leqslant \ln x \leqslant 2k\pi + \frac{\pi}{3}$ alors $\cos(\ln x) \geqslant \frac{1}{2}$ et utiliser le critère de Cauchy, (6) utiliser Wallis (7) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)$ converge, (8) $0 \leqslant u_n \leqslant (2-\sqrt{3})^n\pi$ converge, (8') $(2+\sqrt{3})^n\pi = 2k\pi - (2-\sqrt{3})^n\pi$ on a convergence, (9) $|a| < \sqrt{2}$: D, $|a| > \sqrt{2}$: C, $|a| = \sqrt{2}$: A.C., (10) $u_n = (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ converge, (11) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}v_n$ où $|v_n| \leqslant 1$, on a convergence.

Indication 3.5.2 Avec $w_n = v_n + O\left[\left(\frac{\alpha}{n} + v_n\right)\right]$) montrer que $\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{u_{k+1}}{u_k} = -\alpha\ln n + W_n$ où W_n a une limite W, en déduire que $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$
Application : montrer que $u_n \sim \frac{C}{n^{1/6}}$.

Indication 3.5.3

(1) $u_n \sim \frac{a}{n^k}$ où $k = \deg Q - \deg P$.

(2) Si $\deg Q = 1 + \deg P$ alors $(-1)^n u_n$ s'écrit comme une somme d'une série convergente et d'une série A.C., réciproque immédiate.

Indication 3.5.4 Utiliser l'inégalité : $\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{1}{2}\left[a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right]$, pas de réciproque.

Indication 3.5.5

(1) Montrer l'équivalence entre la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$.
(2) On a $u_{3p+1} = v_{4p+1}$, $u_{3p+2} = v_{4p+3}$ et $u_{3p+3} = v_{2p+2}$.
(3) Procéder par récurrence en utilisant la relation :
$u_{3p+1} + u_{3p+2} + u_{3p+3} = \frac{1}{4p+1} - \frac{1}{4p+2} + \frac{1}{4p+3} - \frac{1}{4p+4} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2}\right)$.

Indication 3.5.6

(1) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{m^2-n^2}$ puis écrire
$\sum_{n\leqslant m+N, n\neq m} \frac{1}{m^2-n^2} = \frac{1}{2m}\left(\sum_{p=1}^{m}\frac{1}{p} + \sum_{p=m}^{2m-1}\frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p} + \sum_{p=2m+1}^{2m+N}\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{4m^2} + \frac{1}{2m}\sum_{p=N+1}^{2m+N}\frac{1}{p}$.
(2) On trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{mn} = \frac{1}{4m^2}$ si $m \neq 0$ et $-\frac{\pi^2}{6}$ si $m = 0$.

Indication 3.5.7 $\sum u_n$ C : immédiat, pour $\sum v_n$ penser à arranger $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$.

Indication 3.5.8 Avec un D.L. on trouve $u_n = (-1)^n \frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}\left(1 + \frac{\beta}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ d'où $\beta \leqslant \alpha$ D, $\alpha + 1 \geqslant \beta > \alpha$ C, $\alpha + 1 < \beta$ A.C.

Indication 3.5.9 Supposer $\alpha \neq \beta$ et distinguer les cas $\beta > 1$, $\beta \leqslant 1$, $\alpha > 1$, $\alpha \leqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Indication 3.5.10 $\ln u_n$ s'écrit comme somme d'une série divergente, on utilise ensuite la constante d'Euler.

Indication 3.5.11 Comparer $\sum a_n$ à $\sum \frac{1}{n \ln n}$.

Indication 3.5.12 S'inspirer de la démonstration du théorème sur le produit de Cauchy, avec $w_n = \sum_{p+q=n} u_{p,q}$ prouver que $\sum_{(p,q)\in[\![0,n]\!]^2} u_{p,q} \leqslant \sum_{k=0}^{2n} w_k \leqslant \sum_{(p,q)\in[\![0,2n]\!]^2} u_{p,q}$. Pour le cas complexe, utiliser le résultat précédent (avec les valeurs absolues) pour encadrer $\left|\sum_{k=0}^{2n} w_k - \sum_{(p,q)\in[\![0,n]\!]^2} u_{p,q}\right|$.

Indication 3.5.13 Utiliser l'encadrement $\int_{i+j+1}^{i+j+2}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{(i+j+1)^\alpha} \leqslant \int_{i+j}^{i+j+1}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ et conclure : si $\alpha \leqslant 2$ la série diverge, si $\alpha > 2$ la série converge.

Indication 3.5.14

(1) Montrer que $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)} = \frac{1}{j^2}$.
(2) Montrer que $\mathrm{Card}\{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \mid i + j^2 = n\} = E(\sqrt{n})$ et utiliser l'indication.

Indication 3.5.15

(1) Majorer $\binom{p+q}{q}$ par 2^{p+q}.
(2) Immédiat avec le résultat donné.
(3) $S(x) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+2q=m}(-1)^{p+q}\binom{p+q}{q}\right)x^m$ et
$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^{3n}$.
(4) Utiliser l'unicité du développement, $d_{3n} = 1$, $d_{3n+1} = -1$, $d_{3n+2} = 0$.

Indication 3.5.16 Remarquer que $d(n) \leqslant n$ d'où la convergence de la série, intervertir ensuite les sommations pour la série double $\sum e^{-kp}$, $(k,p) \in \mathbb{N}^2$

Indication 3.5.17

(1) Prouver que $\frac{1}{a^2b+ab^2+2ab} = \frac{1}{a(a+2)}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+a+2}\right)$,
prouver que $S = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{a+2}\right)\right]$ et, avec $U_a = \frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \cdots + \frac{1}{a^2}$, montrer que $S = \frac{7}{4}$
(2) Poser $S_n = \sum_{a=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2b+ab^2+nab}$ et prouver que $S_1 = 2$, $n \geqslant 2$: $nS_n = S_{n-1} + 2U_n$ avec $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

Indication 3.5.18 On utilise la propriété signalée et, en remarquant que $-n-n^2-2(n+1) = -(n+1)^2-(n+1)$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{p+q=n} u_{p,q} = \frac{4}{3}$.

Indication 4.1.1 La suite (f_n) converge uniformément vers 2, $I_n \to 4$, $J_n \to 1$ et $K_n \to 2$.

Indication 4.1.2 (1) C.S. vers 0, C.U. sur $[0,a]$, $a<1$.
(2) C.S. et C.U. vers 0.
(3) C.S. vers 0 pour $x \geqslant 0$, C.U. ssi $\alpha < 1$.
(4) Pas de C.S. sur $\mathbb{R}$, pas de C.U. sur $\mathbb{R}^+$, mais C.U. sur tous les intervalles $]\infty,-a] \subset]-\infty,-1[$, $[a,+\infty[\subset]1,+\infty[$, $[b,c] \subset]-1,1[$.
(5) C..S. sur $\mathbb{R}_+$ pour $a>1$, C.U. sur tout intervalle $[\alpha,+\infty[$ avec $\alpha>0$.
(6) (f_n) C.S. vers $\delta_{0,x}$, C.U. sur $[a,\pi]$ pour $a>0$
(7) C.S. vers 0 mais pas de C.U.
(8) C.S. vers $f(x)=0$ si $x \neq 1$, $f(1)=\frac{1}{2}$.

Indication 4.1.3 Montrer que $\sup f_n(t) = f_n(\alpha_n)$ où $\tan(\pi\alpha_n) = -\frac{\pi\alpha_n}{n}$ avec $\frac{1}{2} < \alpha_n < 1$, puis poser $\alpha_n = 1-\varepsilon_n$ et prouver que $\pi\varepsilon_n = \frac{\pi}{n} + o(1)$. Conclure alors que $\lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = \frac{\pi}{e}$.

Indication 4.1.4

(1) $(i) \Leftrightarrow (ii)$ immédiat, pour le contre-exemple prendre $f(x) = |x|$.
(2) Montrer que la pente maxi de la fonction f_n vaut 2^n, en déduire que $\|f_n - f_{n+1}\| \leqslant \frac{2^n}{3^{n+1}}$. Pour montrer que f n'est pas dérivable en $x_0 \in [0,1]$, choisir h et k pour que $x_0+h = \frac{p+1}{3^n}$, $x_0 - k = \frac{p}{3^n}$, poser $3^n\left[f_n\left(\frac{p+1}{3^n}\right) - f_n\left(\frac{p}{3^n}\right)\right] = \Delta_n$ et montrer que Δ_n n'a pas de limite dans $\mathbb{R}$.

Indication 4.1.5 Sur $[a,+\infty[$ montrer que $\frac{x}{(1+x^2)^n} \leqslant \frac{1}{2(1+a^2)^{n-1}}$, on n'a pas de C.U. sur $[0,1]$, la somme vaut $\frac{1+x^2}{x}$.

Indication 4.1.6

(1) g est définie et continue sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \mathbb{Z}_-$ (montrer que si $x \in [a,b] \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ alors on a la convergence normale.
(2) $xg(x) - g(x+1) = \frac{1}{e}$.
(3) $g(p) = (p-1)! - \frac{(p-1)!}{e}\left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}\right] + 1$.

Indication 4.1.7

(1) Montrer que $|u_n(x)| \leqslant \frac{|\operatorname{sh} x|}{\operatorname{ch} n}$, puis, sur un segment $[a,b]$, que $|u_n(x)| \leqslant \frac{\max(|\operatorname{sh} a|, |\operatorname{sh} b|)}{\operatorname{ch} n}$.
(2) La série $\sum(1-\operatorname{th} n)$ converge, f est croissante et majorée donc admet une limite en $+\infty$ qui vaut $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-\operatorname{th} n)$.
(3) Si $s_n(x)$ est la somme partielle de la série alors $s_n(x+1) - s_n(x) = \operatorname{th}(n+x+1) - \operatorname{th} x$.

Indication 4.1.8

(1) $\left|\varphi(\frac{x}{2^n})\right| \leqslant C\frac{a}{2^n}$ assure la C.U. de la série sur I, $g(x) - g(x/2) = \varphi(x)$ est immédiat.
(2) Si $f(x)$ est une autre solution, alors $h = f - g$ vérifie $h(x) = h(\frac{x}{2^n})$.

Indication 4.1.9 (1) C.S. sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, C.U. sur $[a,b] \subset]-1,1[$, sur $]-\infty,b] \subset]-\infty,-1[$ et sur $[c,+\infty[\subset]1,+\infty[$.
(2) Calculer $u_{2n}(x) + u_{2n+1}(x)$, C.U. sur tout segment de $\mathbb{R}^*$.
Si $x \geqslant 2$ montrer que $0 \leqslant u_{2n}(x) + u_{2n+1}(x) \leqslant \frac{1}{4n^2x}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x) = 0$.
(3) Décomposer la fraction rationnelle et en déduire la C.S., C.U. sur tout intervalle $[a,+\infty[$, $a>0$.
(4) Décomposer la fraction rationnelle et en déduire la C.S. vers $s(x) = -\frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x})$, C.U. sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ (montrer que $r_n(x) = \frac{-1}{2(n+1-x)(n+2-x)}$, reste d'ordre n).

Indication 4.1.10 f est définie sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ et est 1-périodique, la convergence normale sur $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1/2$ permet d'affirmer que f est continue. On regroupe les termes de la somme donnant f, on obtient $\frac{1}{m^2}f(\frac{x+p}{m}) = \frac{1}{(x+p)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(nm+x+p)^2} + \frac{1}{(nm-x-p)^2}$, on fait alors la division de $N \in \mathbb{N}$ par m.

Indication 4.2.1 On a : $I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}\frac{\pi}{2}$, d'où, la somme $\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2}$.

Indication 4.2.2 Écrire $x^{-x} = e^{-x\ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x\ln x)^n}{n!}$ et intégrer terme à terme, on fait de même pour J.
Pour avoir J à 10^{-p} près, utiliser le théorème des séries alternées, pour I, majorer le reste d'ordre n par $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^{n-1}(n-1)}$.

Indication 4.3.1 Montrer que sur $I = [a,b]$: $|nxe^{-nx^2}| \leqslant na_1e^{-na_2^2}$ où $a_1 = \sup(|a|,|b|)$ et $a_2 = \inf(|a|,|b|) \neq 0$, puis intégrer terme à terme, on a $f(x) = \frac{xe^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2}$.

Indication 4.3.2

(1) Utiliser le théorème de dérivation sous l'intégrale, $f^{(k)}(x) = \int_0^{\pi} e^{x\sin t}\sin^k t\,\mathrm{d}t$.

(2) $e^{x\sin t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n \sin^n t}{n!}$ et on intégre terme à terme,
$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}(\frac{\pi}{2^{2p}(p!)^2}x^{2p} + \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{[(2p+1)!]^2}x^{2p+1})$.

Indication 4.3.3

(1) Utiliser le théorème de continuité sous le signe intégral...

(2) Poser $u = \pi - t$, puis écrire $(1 - x\cos t)^{1/2} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n-1)}x^n\cos^n t$ et intégrer terme à terme (en justifiant), on trouve avec Wallis
$f(x) = \pi\left(1 - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(4p)!}{(2p)!2^{6p}(p!)^2(4p-1)}x^{2p}\right)$.

(3) Utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral et son corollaire, la relation (1) s'obtient par calcul en utilisant $\int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial t}[\frac{2\sin t}{\sqrt{1-x\cos t}}]\,\mathrm{d}t = 0$.

(4) En égalant les coefficients de x^{2n+1} on trouve $b_n(16n^2-1) = (4n+4)^2 b_{n+1}$.

Indication 4.4.1

(1) Montrer que $\frac{X(1-X)}{n}B_n'(P) = B_n(XP) - XB_n(X)$.

(2) La relation demandée est une conséquence directe du 1. Diviser par n^2 cette relation et utiliser l'inégalité $\alpha^2 \leqslant \left(\frac{k}{n} - t\right)^2$ pour $k \in A_n$.

(3) Utiliser la continuité uniforme de f : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\alpha > 0$, $|\frac{k}{n} - t| < \alpha \Rightarrow |f(t) - f(\frac{k}{n})| \leqslant \varepsilon/2$ pour en déduire $|B_n(f)(t) - f(t)| \leqslant \frac{2\|f\|}{4\alpha^2 n} + \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Il suffit ensuite de montrer que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| = 0 \Rightarrow f = 0$.

(4) Se ramener à la situation précédente en posant $f(t) = g(u)$ où $u = \frac{t-a}{b-a}$.

(5) Utiliser $B_n(P)(X,Y) = \sum_{(k,h)\in[0,n]^2} P(\frac{k}{n},\frac{h}{n})\binom{n}{k}\binom{n}{h}X^k(1-X)^{n-k}Y^h(1-Y)^{n-h}$.

Indication 4.4.2

(1) Montrer que $\deg P_n \leqslant n-2$, puis que $f(x) - P_n(x) = \frac{Q(x)}{x^2+\alpha^2}$ avec $\deg Q \leqslant n$ où $Q = \lambda\omega_n$ et enfin que $\lambda = \frac{1}{\omega_n(\alpha i)}$.

(2) $\omega_n(1) = \frac{(4m)!}{(2m)^{2m}2^{2m}(2m)!}$, utiliser la formule de Stirling.
Ensuite, $\ln|\omega_n(\alpha i)| = \sum_{k=0}^{m-1}\ln\left(\alpha^2 + \left(\frac{2k+1}{2m}\right)^2\right)$. Reconnaître une somme de Riemann puis utiliser la formule du point milieu ou une intégration par parties. On obtient
$\left|\int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{m}\ln|\omega(\alpha i)|\right| \leqslant \frac{1}{8m^2}\|f''\|_\infty$ avec $f(t) = \ln(\alpha^2+t^2)$.

(3) Montrer que pour α assez petit, on a $\frac{2}{e\beta} > 1$.

1. Solutions

Solution 1.1.1 Montrons que $N(f)=0 \Rightarrow f=0$, les deux autres propriétés étant évidentes : Si $|f(c)|+\|f'\|=0$ alors $f(c)=0$ et $\|f'\|=0$ donc $f'=0$; comme $f(c)=0$ on peut écrire $f(x)=\displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$ donc $f=0$ c.q.f.d.

N n'est pas équivalente à $\|.\|$, en effet, si l'on prend $f_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin nx$ alors $\|f_n\|=\dfrac{1}{n}$ et $N(f_n)=\dfrac{1}{n}\sin nc+1$. (f_n) est une suite convergeant vers 0 pour $\|.\|$ mais qui n'a pas de limite pour N.

Solution 1.1.2

(1) On prouve facilement que N_g vérifie $N_g(\lambda f)=|\lambda|N_g(f)$ et $N_g(f+h)\leqslant N_g(f)+N_g(h)$. La condition cherchée est $S=[0,1]$ où S est l'adhérence de $\{x\in[0,1]|g(x)\neq 0\}$ (c'est ce qu'on appelle le support de g).
En effet : supposons que $S=[0,1]$. On sait que si $N_g(f)=0$ alors $f(x)g(x)=0$ pour tout x de $[0,1]$ donc pour tout x tel que $g(x)\neq 0$ on a $f(x)=0$. Comme f est continue et que tout point x de $[0,1]$ est limite d'une suite (x_n) telle que $g(x_n)\neq 0$ (par hypothèse) alors $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=0$. On a prouvé que $N_g(f)=0\Rightarrow f=0$.
Réciproque : par contraposée, si $S\neq[0,1]$ alors $[0,1]\setminus S$ contient un intervalle ouvert $]\alpha,\beta[$. On peut alors avoir $N_g(f)=0$ pour une fonction non nulle sur l'intervalle $]\alpha,\beta[$ qui s'annule en dehors. On a prouvé que si $N_g(f)=0\Rightarrow f=0$ alors $S=[0,1]$.

(2) Les normes N_g et $\|.\|$ sont équivalentes, il suffit de dire que $|g|$ est continue et qu'elle atteint son minimum strictement positif sur $[0,1]$.

Solution 1.1.3 Pour tout $a\in A$, on a $\mathrm{d}(x,a)\leqslant \mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,a)$ donc

$$\mathrm{d}(x,A)\leqslant \mathrm{d}(x,a)\leqslant \mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,a).$$

$\mathrm{d}(x,A)-\mathrm{d}(x,y)$ est un minorant de l'ensemble $\mathrm{d}(y,a)$ lorsque $a\in A$ donc

$$\mathrm{d}(x,A)-\mathrm{d}(x,y)\leqslant \mathrm{d}(y,A).$$

On procède de même avec y, on obtient alors

$$|\,\mathrm{d}(x,A)-\mathrm{d}(y,A)|\leqslant \mathrm{d}(x,y)$$

donc l'application distance à un ensemble est une application lipschitzienne.

Solution 1.2.1

$\boxed{\Rightarrow}$ On écrit

$$\begin{aligned}(x_n-x|x_n-x)&=\|x_n\|^2-(x_n|x)-(x|x_n)+\|x\|^2=\|x_n\|^2-2(x_n|x)+\|x\|^2\\&=\underbrace{\|x_n\|^2}_{\to\|x\|^2}-\|x\|^2-\underbrace{2(x_n-x|x)}_{\to 0}\ \text{ car } (x_n|x)=(x_n-x|x)+\|x\|^2.\end{aligned}$$

On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n-x\|=0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|(x_n-x|y)|\leqslant\|x_n-x\|.\|y\|$ qui entraîne la convergence faible et la continuité de la norme (conséquence ici de l'inégalité $|\|x_n\|-\|x\||\leqslant\|x_n-x\|$) pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_n\|=\|x\|$.

Solution 1.3.1

a) Le seul point fixe de f est a et $f(\mathbb{R}) \subset [0, a(1+a^2)]$.
$f'(a) = \dfrac{-2a^2}{1+a^2}$: $a < 1$ a est attractif ($|f'(a)| < 1$)(u_n) converge.
$a > 1$ a est répulsif, pas de convergence, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent.
$a = 1$ alors en étudiant les solutions de $f \circ f(x) = x, u_n$ converge vers 1 (racine triple).

b) f est contractante et $f(\mathbb{R}) \subset [-a+b, a+b]$ donc (u_n) converge.

c) On a $f(x) = x \Leftrightarrow x^p = a$; par symétrie, on se limite au cas où $x > 0$: $f'(a^{1/p}) = 0$ le point fixe est attractif. D'autre part, comme $ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $f(x) \geqslant a^{1/p}$ donc, à partir de u_1, la suite (u_n) est décroissante ; (u_n) converge alors vers $a^{1/p}$.

Solution 1.3.2

(1) Soit $l = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$ alors $x_n - l = \alpha^n(x_0 - l)$ (par récurrence) donc (x_n) converge (vers l) ssi $|\alpha| < 1$.

(2) On pose $x''_n = \alpha x'_{n-1} + \beta$ alors $x'_n = x''_n + \delta_n$ et comme δ_n est une erreur d'arrondi sur x''_n, on a $|\delta_n| \leqslant \dfrac{10^{-d}}{2}$.

(3) On a $x'_n - x_n = x''_n + \delta_n - x_n = \alpha(x'_{n-1} - x_{n-1})$ donc $\varepsilon_n = \alpha\varepsilon_{n-1} + \delta_n$.

(4) On a bien sûr $\varepsilon_0 = \delta_0$ et si $\varepsilon_{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} d_{n-1,k}\delta_k$ alors $\varepsilon_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha d_{n-1,k}\delta_k + \delta_n$ d'où les relations demandées.

(5) On trouve par une récurrence simple que $d_{n,k} = \alpha^{n-k}$ d'où

$$\begin{aligned}|\varepsilon_n| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \delta|\alpha|^{n-k} = \delta\frac{1-|\alpha|^{n+1}}{1-|\alpha|}\\ &\leqslant \frac{\delta}{1-|\alpha|}.\end{aligned}$$

Solution 1.3.3

(1) On fait le changement de variable $t = hu$ dans le reste intégral et on trouve

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(x+thu)\,\mathrm{d}t$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \cdots + (-1)^n\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + (-1)^{n+1}\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(x+thu)\,\mathrm{d}t$$

d'où $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$.

(2) a) Le problème est que l'on fait la différence de 2 quantités très proches et que l'on divise par une valeur h censée être très petite donc les calculs sont très sensibles aux erreurs d'arrondi qui ne manqueront pas.

b) On trouve immédiatement

$$\begin{aligned}T(h) = f'(x) + \frac{h^2}{6}f'''(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{2n!}[1 + (-1)^{n-1}]f^{(n)}(x)\\ + \frac{h^n}{2n!}\int_0^1 (1-u)^n[f^{(n+1)}(x+thu) + (-1)^n f^{(n+1)}(x-thu)]\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

c) Après un petit calcul on obtient

$$T_1^1(h) = f'(x) - \frac{h^4}{480} f^{(5)}(x) - \cdots - \frac{h^{2p}(4^{p-1}-1)}{(2p+1)!4^{p-1}} f^{(2p+1)}(x) + R_n.$$

On voit ici que l'erreur est de l'ordre de h^4 et par itération de ce procédé, l'erreur sera successivement de l'ordre de h^6, h^8 etc.
On obtient alors le tableau suivant :

h	T_0	T_1	T_2	T_3
0,0128	696,6346914			
		623,4601726		
0,0064	641,7538023		625,3455055	
		625,2276722		625,3334226
0,0032	629,3592047		625,3336114	
		625,3269902		625,3334448
0,0016	626,3350438		625,3334474	
		625,3330438		625,3334257
0,0008	625,5835438		625,3334260	
		625,3334021		
0,0004	625,3959375			

à comparer avec la valeur approchée à 10^{-8} près qui est 625,33344002.

Solution 1.3.4 On calcule les premiers termes de la suite (u_n), $u_0 = u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 2$, $u_4 = \frac{5}{2}$, $u_5 = \frac{13}{5}$,...
Montrons que la suite (u_n) est croissante. On étudie $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n^2 + u_n + n}{u_n}$ et on souhaite que cette différence soit $\geqslant 0$. Soit $x_n = \dfrac{1+\sqrt{4n+1}}{2}$ la racine positive de $X^2 - X - n$, il suffit de prouver que $u_n \leqslant x_n$. On va montrer ceci par récurrence sur n mais $u_n \leqslant x_n \Rightarrow u_{n+1} = 1 + \dfrac{n}{u_n} \geqslant x_n$, cette inégalité ne permet pas de conclure. On va en fait montrer la double inégalité suivante

$$\forall n \geqslant 1,\ x_{n-1} \leqslant u_n \leqslant x_n.$$

On vérifie que ceci est bien vrai pour $n = 1$, supposons la propriété vraie à l'ordre n/ On a déjà $x_n \leqslant u_{n+1}$ puis $u_{n+1} \leqslant 1 + \dfrac{n}{x_{n-1}} = x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}}$. On vérifie alors, avec les expressions de x_n et x_{n-1}, que $x_{n-1} + \dfrac{1}{x_{n-1}} \leqslant x_n$ ce qui achève la récurrence.
Comme $x_n \sim \sqrt{n}$ on en déduit que $u_n \sim \sqrt{n}$ mais on a mieux car

$$x_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{4n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$x_{n-1} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1 - \frac{3}{4n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

d'où $u_n = \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Solution 1.3.5 Par le théorème du point fixe on sait que a est unique.
On a ensuite

$$\begin{aligned}|u_{n+1}-a| &= |a_n + f(u_n) - f(a)| \leqslant \alpha_n|u_n| + \beta_n + q|u_n - a| \\ &\leqslant \alpha_n|u_n - a| + \alpha_n|a| + \beta_n + q|u_n - a| \leqslant (\alpha_n + q)|u_n - a| + \gamma_n\end{aligned}$$

où $\gamma_n = \alpha_n a + \beta_n \to 0$. On pose $v_n = |u_n - a|$ et on choisit $n \geqslant N$ pour que $\alpha_n + q \leqslant k < 1$ et $\gamma_n \leqslant \varepsilon$.
On a ainsi $x_{n+1} \leqslant rx_n + \varepsilon$ pour $n \geqslant N$ soit, en posant $l = \dfrac{\varepsilon}{1-r}$, $x_{n+1} - l \leqslant r(x_n - l) \leqslant r^{n-N}(x_N - l)$. On choisit alors $n \geqslant N_1 \geqslant N$ pour que $r^{n-N}(x_N - l) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{1-r}$ d'où $0 \leqslant x_n \leqslant 2\dfrac{\varepsilon}{1-r}$ ce qui prouve effectivement que $x_n \to 0$ et que $u_n \to a$.

Solution 1.4.1 On considère la fonction $f \ : x \in E \mapsto \mathrm{d}(x, A) - \mathrm{d}(x, B)$ qui est continue (classique) et on prend $U = f^{-1}(]-\infty, 0[)$, $V = f^{-1}(]0, +\infty[)$.

Solution 1.4.2

(1) On va vérifier les trois axiomes de la norme :
- si $N(x) = 0$: alors si on appelle M un majorant de $\|y\|$ lorsque $y \in O$, on aura $\|x\| \leqslant \lambda M$ pour tout $\lambda > 0$ donc $\|x\| = 0$,
- $N(\mu x) = N(|\mu|x) = |\mu|N(x)$ (pas de problème, on utilise la symétrie),
- $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$: pour prouver ceci, on peut réécrire la définition sous la forme : $N(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+^* \mid \dfrac{x}{\lambda} \in \overline{O}\}$. On sait alors que (pour x et y non nuls) $\dfrac{x}{N(x)} \in \overline{O}$, $\dfrac{y}{N(y)} \in \overline{O}$ et il suffit de prouver que $\dfrac{x+y}{N(x)+N(y)} \in \overline{O}$ or en écrivant $\dfrac{x+y}{N(x)+N(y)} = t\dfrac{x}{N(x)} + (1-t)\dfrac{y}{N(y)}$ où $t = \dfrac{N(x)}{N(x)+N(y)}$ et en utilisant la convexité de $\overline{O}$ on peut conclure (et on remarque que O est la boule unité pour N).

(2) Tout ouvert de (E, N) est un ouvert de $(E, \|.\|)$.

Solution 1.5.1 Si $y \in f(\overline{A})$ alors $y = f(x)$ avec $x \in \overline{A}$ donc il existe une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim x_n = x$ (cf. théorème 5.7 sur la caractérisation séquentielle de l'adhérence).
On a alors $\lim f(x_n) = f(x) \in \overline{f(A)}$.
Contre exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $[1, +\infty[$,

$$f(A) =]0, 1] = f(\overline{A}) \neq \overline{f(A)} = [0, 1].$$

Solution 1.5.2

(1) Posons $h(x, t) = f(t) - k\|x - t\|$ alors, comme f est k-lipschitzienne on a, pour tout $u \in A$, $f(t) - f(u) \leqslant k\|t - u\| \leqslant k\|t - x\| + k\|x - u\|$ soit

$$h(x, t) = f(t) - k\|x - t\| \leqslant f(u) + k\|x - u\|$$

ce qui prouve que $h(x, .)$ est majorée sur A et que g est bien définie.

(2) Si $x \in A$ alors $h(x, x) = f(x) \leqslant g(x)$ et, en prenant $u = x$ dans l'inégalité du 1, on a $h(x, t) \leqslant f(x)$ donc $g(x) \leqslant f(x)$ d'où $g(x) = f(x)$. On peut donc affirmer que g prolonge

f.
$h(x,t)-h(y,t)=k(\|t-y\|-\|t-x\|)\leqslant k\|x-y\|$ soit

$$h(x,t)\leqslant h(y,t)+k\|x-y\|\leqslant g(y)+k\|x-y\|$$

d'où $g(x)\leqslant g(y)+k\|x-y\|$ et par symétrie on obtient $|g(x)-g(y)|\leqslant k\|x-y\|$. g est aussi k-lipschitzienne.

Solution 1.6.1 On a $f(nx)=nf(x)$ pour $n\in\mathbb{Z}$, puis $f(\frac{p}{q}x)=\frac{p}{q}f(x)$.
Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ et $\lambda_n\in\mathbb{Q}$ tel que : $\lim\lambda_n=\lambda$. On sait que : $f(\lambda_n x)=\lambda_n f(x)$. Montrons que $\lim f((\lambda-\lambda_n)x)=0$:
soit $p_n=\left[\dfrac{1}{(\lambda-\lambda_n)\|x\|}\right]$ alors $\lim p_n=+\infty$ et $\|p_n(\lambda-\lambda_n)x\|\leqslant 1$ donc, si M est la borne de f sur la boule unité :

$$\|f((\lambda-\lambda_n)x)\|=\left\|\frac{1}{p_n}f(p_n(\lambda-\lambda_n)x)\right\|\leqslant\frac{1}{p_n}M\to 0$$

d'où

$$f(\lambda x)=f((\lambda-\lambda_n)x))+f(\lambda_n x)=\underbrace{f((\lambda-\lambda_n)x)}_{\to 0}+\underbrace{\lambda_n f(x)}_{\to\lambda f(x)}$$

en utilisant la propriété $f(x+y)=f(x)+f(y)$.
Conclusion : f est bien linéaire et ce résultat vient compléter le résultat du *théorème 5.13 page 230.*

Solution 1.6.2

(1) Par récurrence sur n :
la propriété est vraie pour $n=1$, supposons la vraie à l'ordre n alors

$$f\circ g^{n+1}=(g^n\circ f+ng^{n-1})\circ g=ng^n+g^n\circ(f\circ g)=(n+1)g^n+g^{n+1}\circ f$$

ce qui achève la récurrence.

(2) On sait que : $\|f\circ g\|\leqslant\|f\|.\|g\|$ d'où

$$\begin{aligned}n\|g^{n-1}\|&=\|f\circ g^{n-1}\circ g-g\circ g^{n-1}\circ f\|\\&\leqslant\|f\circ g^{n-1}\|.\|g\|+\|g\|.\|g^{n-1}\circ f\|\\&\leqslant 2\|f\|.\|g\|.\|g^{n-1}\|.\end{aligned}$$

Comme $g^{n-1}\neq 0$ (sinon, avec la relation du 1., on aurait $g^{n-2}=0$ et, par une récurrence descendante, $g=0$ ce qui est impossible) alors :

$$\|f\|.\|g\|\geqslant\frac{n}{2}$$

ce qui est impossible.

(3) Conséquence immédiate du 2 car, d'après le corollaire 5.30, on sait qu'en dimension finie, les applications linéaires sont continues.

(4) Dans $\mathbb{R}[X]$, on prend $f(P)=P'$ et $g(P)=XP$ alors $f\circ g-g\circ f=\mathrm{Id}$.
Si on prend une norme sur $\mathbb{R}[X]$ qui confère à cet ensemble une structure d'algèbre normée alors g est continue, par conséquent la dérivation est discontinue (c'est le cas de la norme N_1 définie à l'exemple (i bis) page 211 ou d'une norme $N(P)=\sup\limits_{x\in I}|P(x)|$ où I est un segment de longueur non nulle).

Solution 1.6.3 Si f est continue alors $H = f^{-1}(0)$ est un fermé donc $H = \overline{H} \neq E$ i.e. H n'est pas dense dans E.
Réciproquement : supposons H non dense, $\overline{H}$ est un espace vectoriel qui contient H (en effet, si $(x, y) \in \overline{H}^2$ alors $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$ où (x_n) et (y_n) sont des suites d'éléments de H et donc $\lambda x + \mu y = \lim\limits_{n\to+\infty} \lambda x_n + \mu y_n \in \overline{H}$).
Si $\overline{H} \neq H$ alors $\exists a \in \overline{H} \setminus H : f(a) \neq 0$, tout $x \in E$ s'écrit $x = \lambda a + h$ où $h \in H$ (avec $\lambda = \dfrac{f(x)}{f(a)}$) donc $\overline{H} = E$ ce qui aboutit à une contradiction donc $\overline{H} = H$, H est fermé.
Conclusion partielle : si H est non dense dans E alors il est fermé.
Posons maintenant a tel que $f(a) = 1$, $a + H$ est fermé (image réciproque de H par la translation de vecteur $-a$), il ne contient pas 0, il existe donc une boule $B(0, r)$ qui ne rencontre pas $a + H$ (le complémentaire de $a + H$ est ouvert). On sait alors que $\forall x \in B(0, r)$, $f(x) \neq 1$.
Prouvons par l'absurde que $|f(x)| < 1$: si $|f(x)| > 1$ alors $y = x/f(x) \in B(0, r)$ et $f(y) = 1$ ce qui aboutit à une contradiction. f est bornée par 1 sur la boule $B(0, r)$ donc f est bornée sur la boule unité (par $1/r$). f est continue (conséquence de la remarque 5.1.14 qui est en fait une équivalence).
Remarque : on peut aussi parachuter la solution suivante : si f est linéaire non continue, montrons que H est dense dans E. Comme f n'est pas continue alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \mid \exists x_n,\ |f(x_n)| \geqslant n\|x_n\|.$$

On pose $y_n = \dfrac{x_n}{f(x_n)}$, $f(y_n) = 1$ et $\|y_n\| = \dfrac{\|x_n\|}{|f(x_n)|} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Soit $a \in E$ on pose $a_n = a - f(a)y_n$, $f(a_n) = 0$ donc $(a_n) \in H^{\mathbb{N}}$ et $a_n \to a$ ce qui prouve bien que H est dense dans E.

Solution 1.7.1 Soit (x_n) une suite de Cauchy de E et (y_n) une suite d'éléments de A telle que : $\|y_n - x_n\| \leqslant \frac{1}{n}$ (on sait que c'est possible car A est dense dans E). (y_n) est une suite de Cauchy (on utilise l'inégalité $\|y_{n+p} - y_n\| \leqslant \|y_{n+p} - x_{n+p}\| + \|x_{n+p} - x_n\| + \|x_n - y_n\|$), elle converge dans A, donc dans E et comme $\lim(y_n - x_n) = 0$, (x_n) converge dans E.

Solution 1.7.2 On prend la suite $P_n = X^n$ qui appartient à la boule unité pour les 2 normes et on ne peut extraire de suite convergente.
En effet, si (P_n) tendait vers P un polynôme pour l'une de ces deux normes, soit p le degré de P. Si on choisit $n \geqslant p + 1$ alors $N_i(P - X^n) \geqslant 1$ (pour $i \in \{1, 2\}$) ce qui est contradictoire.

Solution 1.7.3

(*i*) Non car : $A = \{y \geqslant 0, y \geqslant \frac{1}{x}\}$, $B = \{y \leqslant 0\}$ ne conviennent pas.

(*ii*) Oui car : $f\ : (x, y) \to \mathrm{d}(x, y)$ est continue, en effet

$$|\,\mathrm{d}(x, y) - \mathrm{d}(x', y')| \leqslant |\,\mathrm{d}((x, y) - \mathrm{d}(x', y)| + |\,\mathrm{d}(x', y) - \mathrm{d}(x', y')| \leqslant \mathrm{d}(x, x') + \mathrm{d}(y, y')$$

donc f est 2-lipschitzienne. Or une application continue sur un compact ($A \times B$) atteint son minimum.

(*iii*) Oui car on peut se ramener au *ii* en remplaçant A par A' intersection de A avec le compact $B' = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid\ \mathrm{d}(x, B) \leqslant 2\,\mathrm{d}(A, B)\}$.

Solution 1.7.4

(1) Soit $\mathcal{H}$ l'ensemble des parties équilibrées contenant M alors $\widehat{M} = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} H$. Soit λ tel que $|\lambda| \leqslant 1$ et $x \in \widehat{M}$ alors $\forall H \in \mathcal{H}$, $x \in H$ donc $\lambda x \in H$ i.e. $\lambda x \in \widehat{M}$ et donc $\widehat{M}$ est une partie équilibrée.

(2) Soit $M' = \{\lambda x | \lambda \in K, |\lambda| \leqslant 1, x \in M\}$, on va prouver que
$$\widehat{M} = \{\lambda x | \lambda \in K, |\lambda| \leqslant 1, x \in M\} = M'.$$
M' est une partie équilibrée qui contient M soit $M' \in \mathcal{H}$ donc $\widehat{M} \subset M'$.
Comme $M \subset \widehat{M}$ on a $\lambda M \subset \widehat{M}$ donc $M' \subset \widehat{M}$.
Si on définit $\varphi\ : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ alors φ est continue et $\widehat{M}$, qui est l'image continue de $\overline{B} \times M$ compact, est donc compact (cf. *théorème 5.22 page 234*).

(3) Si M est fermée, on ne peut pas dire que $\widehat{M}$ est fermée ;
prenons par exemple $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy = 1\}$ alors
$$\widehat{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y = 0 \text{ ou } 0 < xy \leqslant 1\}$$
n'est pas fermé.

Solution 1.7.5 Comme A^2 est compact (produit de deux compacts cf. *proposition 5.1.19 page 234*) il existe une suite extraite $(a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)})$ qui converge dans A. Les suites $(a_{\varphi(n)})$ et $(b_{\varphi(n)})$ sont de Cauchy donc
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N}\ :\ \mathrm{d}(a_{\varphi(n)}, a_{\varphi(n+p)}) < \varepsilon,$$
de même pour (b_n).
Or $\mathrm{d}(a, a_{\varphi(n+p)-\varphi(n)}) \leqslant \mathrm{d}(a_{\varphi(n)}, a_{\varphi(n+p)}) < \varepsilon$ (on sait que $\mathrm{d}(x, y) \leqslant \mathrm{d}(f(x), f(y))$ donc, par récurrence sur k, $\mathrm{d}(x, y) \leqslant \mathrm{d}(f^k(x), f^k(y))$). De même on a $\mathrm{d}(b, b_{\varphi(n+p)-\varphi(n)}) < \varepsilon$, ce qui prouve le premier point en posant $k = \varphi(n+p) - \varphi(n) \geqslant 1$. On a aussi immédiatement $f(A)$ dense dans A car $a_k = f(a_{k-1})$ et $\mathrm{d}(a, a_k) < \varepsilon$.
On a ensuite $\mathrm{d}(f(a), f(b)) \leqslant \mathrm{d}(f_k(a), f_k(b)) \leqslant \mathrm{d}(a_k, a) + \mathrm{d}(a, b) + \mathrm{d}(b, b_k) \leqslant \mathrm{d}(a, b) + 2\varepsilon$ et ceci pour tout ε d'où $\mathrm{d}(f(a), f(b)) \leqslant \mathrm{d}(a, b)$ ce qui assure l'égalité $\mathrm{d}(f(a), f(b)) = \mathrm{d}(a, b)$.
f est continue, $f(A)$ est compact (cf. *théorème 5.22 page 234*) donc fermé et comme il est dense dans A alors $f(A) = A$, f est bien une isométrie de A sur A.

Solution 1.7.6 L'application qui à $x \in A$ fait correspondre $\mathrm{d}(x, f(x))$ est continue donc elle atteint ses bornes sur A compact (cf. remarque 5.1.18) ; il existe donc $y \in A$ tel que $c = \mathrm{d}(y, f(y))$.
Si $c > 0$ alors $\mathrm{d}(f(y), f \circ f(y)) < c$ nous donne une contradiction c.q.f.d

---

Solution 2.1.1 $\|P\| = 0 \Rightarrow \forall p \in [0, n], P(x_p) = 0 \Rightarrow P = 0$. Les autres axiomes sont vérifiés.
L'inégalité vient de l'équivalence des normes en dimension finie (*théorème 5.24 page 235*).

Solution 2.1.2 Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant N$ entraîne $|a_{n+1} - a_n| \leqslant \varepsilon$.
α étant une valeur d'adhérence, il existe $N_1 \geqslant N$ tel que $a_{N_1} < \gamma$ (en prenant une sous-suite convergeant vers α), de même (avec β) il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_{N_1+p} > \gamma$.
Soit $I = \{k \in [N_1, N_1 + p] \mid a_k < \gamma\}$ alors, si $l = \max I$, on a $a_l < \gamma \leqslant a_{l+1}$ et $a_{l+1} - a_l \leqslant \varepsilon$ donc $|a_l - \gamma| \leqslant \varepsilon$.
On prend alors successivement $\varepsilon = 1$ d'où l'existence de l_1, puis $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, $N > l_1$ d'où l'existence

de l_2, et par récurrence, si on suppose construit l_n tel que $|a_{l_n} - \gamma| \leqslant \dfrac{1}{n}$ alors, en prenant $N > l_n$, on a l'existence de l_{n+1} tel que $|a_{l_{n+1}} - \gamma| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
Conclusion : γ est valeur d'adhérence de la suite (a_n).
On a donc la propriété suivante : A est un ensemble connexe de $\mathbb{R}$ (s'il contient deux points α et β, il contient le segment $[\alpha, \beta]$. A est bien un intervalle de $\mathbb{R}$ (cf. *propriété 3.1.3 page 50*).

Solution 2.1.3 Soit a un point d'accumulation de A et $a_1 \in D(a, 1) \cap A$ ($D(a, 1)$ désigne le disque ouvert de centre a, de rayon 1). On construit par récurrence la suite (a_n) de la manière suivante :

$$a_{n+1} \in D(a, r_n) \cap A, \text{ où } r_n = \mathrm{d}(a, a_n).$$

Les termes de la suite (a_n) sont tous distincts et appartiennent à A donc A contient bien une infinité de points.
Soit a le seul point d'accumulation de A, posons $A_n = \{x \in A | \dfrac{1}{n} \leqslant \mathrm{d}(a, x) \leqslant n\}$: A_n est fini (sinon on aurait un deuxième point d'accumulation). Soit $B = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ alors $B \cup \{a\} \subset A \cup \{a\}$, si $x \in A$, $x \neq a$ alors $\exists n \in \mathbb{N}^*$: $x \in A_n$ donc $A \cup \{a\} \subset B \cup \{a\}$.
A est donc dénombrable.

Solution 2.1.4 Soit $f \ : \ (A, B, C) \in K^3 \to \mathcal{A}(A, B, C) \in \mathbb{R}$ où $\mathcal{A}(A, B, C)$ désigne l'aire du triangle (A, B, C) : f est continue (cf. *Question (i) page 27*). K^3 est un compact en tant que produit de compacts (*proposition 5.1.19 page 234*) donc f atteint son maximum sur le compact K^3 (*remarque 5.1.20 page 234*).

Solution 2.1.5

(1) a) $\overline{A \cap B}$ est le plus petit fermé contenant $A \cap B$ or $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cap B$.
Contre-exemple $(n = 2)$: $A = \mathbb{Q}^2, B = \mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$.
b) $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ (car $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé qui contient $A \cup B$) et si $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ alors : $x \in \overline{A}$ où $x \in \overline{B}$ donc $x \in \overline{A \cup B}$.

(2) a) Si $c_n = a_n + b_n$ est une suite convergeant dans $\mathbb{R}^n$ vers c alors il existe (a_{n_k}) sous-suite convergente dans A donc (c_{n_k}) converge vers c dans C.
b) Contre-exemple $(n = 2)$: $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}\sqrt{2} \times \mathbb{R}$.

(3) On a : $\forall x \in A, x + B$ ouvert et comme $A + B = \bigcup\limits_{x \in A} (x + A)$ réunion d'ouverts, on peut conclure.

Solution 2.1.6 L'application qui à une matrice fait correspondre son déterminant est une application continue en tant que fonction polynomiale des coefficients de A (voir *Définition 2.1.3 page 180* d'une fonction polynomiale), comme $\mathbb{R}^*$ est un ouvert, son image réciproque par l'application déterminant est un ouvert.
Si A est une matrice non inversible, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \delta[$, $A \pm \varepsilon I_n$ soit inversible (δ est la plus petite vap non nulle en valeur absolue). Ceci prouve la densité.
L'ensemble des matrices non inversibles n'est pas borné (si A n'est pas inversible, λA n'est pas inversible non plus pour tout λ), il ne peut être compact (sauf si $n = 1$.)

Solution 2.1.7 Soit (ε_i) une base de vecteurs propres de M dans $\mathbb{R}^n$, on définit la norme $N(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ où les x_i sont les coordonnées de x dans (ε_i). M considéré comme endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ a pour norme R_M. On utilise ensuite l'équivalence des normes en remarquant que $N(M^p) = R_M^p$:

$$a^{1/p} R_M \leqslant \|M^p\|^{1/p} \leqslant b^{1/p} R_M.$$

et on passe à la limite quand $p \to +\infty$.

Solution 2.1.8 On considère $f \ : \ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to A.A^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. f est continue grâce à la continuité du produit matriciel.

Comme $\mathrm{O}(n) = f^{-1}(I_n)$, $\mathrm{O}(n)$ est fermé et vu que $\sum_{i=1}^{n} {a_{ij}}^2 = 1$, alors $\sup_{i,j} |a_{ij}| \leqslant 1$ donc $\mathrm{O}(n)$ est borné.

Conclusion : $\mathrm{O}(n)$ est un fermé borné en dimension finie, c'est un compact (cf. *corollaire 5.26 page 236*).

Solution 2.1.9 Il faut utiliser la propriété caractéristique des fermés : $\mathrm{d}(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A$; les deux premiers axiomes se démontrent alors assez bien.

Montrons que $h(A, B) \leqslant \delta(A, C) + \delta(C, B)$: on part pour cela de l'inégalité :

$$\forall (x, y, z) \in A \times B \times C, \ \mathrm{d}(x, y) \leqslant \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y).$$

Ce qui donne $\mathrm{d}(x, B) \leqslant \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y)$ pour tout y donc $\mathrm{d}(x, B) - \mathrm{d}(x, z)$ est un minorant de $\{\mathrm{d}(z, y), y \in B\}$ d'où $\mathrm{d}(x, B) \leqslant \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, B)$. On a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x, B) &\leqslant \mathrm{d}(x, z) + h(C, B) \leqslant \mathrm{d}(x, z) + \delta(C, B) \\ &\leqslant \mathrm{d}(x, C) + \delta(C, B) \text{ en prenant la borne inférieure sur les } z \in C \\ &\leqslant h(A, C) + \delta(C, B) \leqslant \delta(A, C) + \delta(C, B) \end{aligned}$$

et, en prenant la borne supérieure sur $x \in A$, on arrive à $h(A, B) \leqslant \delta(A, C) + \delta(C, B)$ et, par symétrie, $h(B, A) \leqslant \delta(A, C) + \delta(C, B)$. En conclusion $\delta(A, B) \leqslant \delta(A, C) + \delta(C, B)$.

Solution 2.2.1

(1) g est évidemment continue car c'est le rapport de 2 fonctions continues qui ne s'annulent pas. On peut même affirmer que g ne s'annule pas.

(2) A est convexe donc connexe par arcs dans $\mathbb{R}^2$, $g(A)$ est connexe par arcs et ne contient pas 0, on a donc soit $g(A) \subset]-\infty, 0[$ soit $g(A) \subset]0, +\infty[$. Dans le premier cas, f est strictement décroissante et dans le deuxième, elle est strictement croissante.

Solution 2.2.2

(1) a) F est un espace de Banach, si (x_n) est une suite de F convergeant dans E alors c'est une suite de Cauchy dans F, elle converge donc dans F et F est fermé.

b) Il suffit de faire une homothétie.

c) Immédiat !

d) Comme F est fermé et distinct de E alors il existe $x \in E$ tel que $\mathrm{d}(x, F) \neq 0$. Grâce à la deuxième propriété, on choisit λ pour que $\mathrm{d}(\lambda x, F) = \dfrac{1}{2}$.

Soit $f \ : y \in F \mapsto \|\lambda x + y\|$, f est continue de F dans $\mathbb{R}$ donc, comme F est connexe par arcs, $f(F)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Comme $\mathrm{d}(\lambda x, F) = \dfrac{1}{2}$ alors $]1/2, +\infty[\subset f(F)$

donc il existe y tel que $\|\lambda x + y\| = 1$.

Conclusion : il existe un élément de E de norme 1 et dont la distance à F vaut $1/2$.

(2) On prend x_1 sur la sphère unité puis, grâce au résultat de la question précédente, en prenant $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{n-1})$, on sait qu'il existe x_n satisfaisant les conditions de l'énoncé.
On ne peut extraire de suite convergente de la suite (x_n) car, pour toute suite extraite, on a $\mathrm{d}(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n-1)}) \geqslant \frac{1}{2}$.

Solution 3.1.1

(1) Soit $B_n = \sum_{p=1}^{n} a_p$ alors

$$B_{n+1} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) B_n.$$

En considérant la série $A_{n+1} - A_n$, on prouve que (A_n) a une limite finie ssi $\alpha > \frac{1}{2}$ (donc la série $\sum a_n$ a une somme strictement positive).
En effet

$$A_{n+1} - A_n = \ln B_{n+1} - \ln B_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$
$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - u_n$$

où $u_n \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}$ (on a écrit le développement limité de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0). Comme la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est une série alternée, elle converge et donc la nature de la série aux différence $\sum A_{n+1} - A_n$ est la même que celle de la série $\sum u_n$.

(2) Pour $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, cette somme sera nulle car $A_n \to -\infty$ (on a $\sum_{n=1}^{N} u_n \to \infty$).

Solution 3.1.2 Comme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$ on sait que (u_n) tend vers 0. Posons $s_n = \ln 2 - r_n$, on sait que (théorème des séries alternées) $|r_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$ et que r_n est du signe de $(-1)^n$, on a même, en exprimant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1}\,\mathrm{d}x$, $r_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$. La suite (r_n) est décroissante (on peut aussi regrouper les termes par deux) et $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n$ converge par le théorème des séries alternées.
On aura alors $e^{s_n} = 2e^{-r_n} = 2(1 - r_n + \frac{1}{2}r_n^2 + o(r_n^2))$ et $u_n = \ln(1 - 2r_n + r_n^2 + o(r_n^2)) = -2r_n - r_n^2 + o(r_n^2)$, $\sum r_n$ converge ainsi que $\sum_{n=1}^{+\infty} r_n^2$ car $r_n^2 \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$.
Conclusion : la série est bien convergente.

Solution 3.1.3

(1) Les degrés sont étagés donc la famille est bien une base. Si $\Delta P(X) = P(X+1) - P(X)$ on a :

$$\Delta P(X) = a_1 + a_2 X + \cdots + a_p \frac{X(X-1)(\cdots)(X-p+2)}{(p-1)!},$$

de même $\Delta^k P(X) = a_k + a_{k+1}X + \cdots + a_p \dfrac{X(X-1)(\cdots)(X-p+k+1)}{(p-k)!}$ et donc $a_k = \Delta^k P(0)$.

(2) On peut écrire $P(n) = a_0 + a_1 \dfrac{n!}{(n-1)!} + \cdots + a_p \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} = \left(a_0 + \frac{a_1}{1!} + \cdots + \frac{a_p}{p!}\right) e = \sum_{k=0}^{p} \left(\sum_{h=0}^{k} (-1)^h \binom{k}{h} P(k-h)\right) \frac{e}{k!}$$
$$= e \sum_{l=0}^{p} \left(\sum_{h=0}^{p-l} \frac{(-1)^h}{h!}\right) \frac{P(l)}{l!}.$$

Solution 3.1.4 D'une part $u_n \sim \dfrac{1}{4n^2}$ donc la série converge.
D'autre part,

$$\frac{n^2+9n+5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)} = -\frac{1}{3(n+1)} + \frac{5}{2(2n+3)} - \frac{5}{2(2n+5)} + \frac{1}{3(n+4)}$$

en décomposant la fraction rationnelle. On a donc

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} + \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+3} - \frac{5}{2}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+5} + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+4}$$
$$= \underbrace{-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{3}\sum_{n=4}^{N+4} \frac{1}{n}}_{=-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3(N+2)}+\frac{1}{3(N+3)}+\frac{1}{3(N+4)}} + \underbrace{\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{2n+1} - \frac{5}{2}\sum_{n=2}^{N+2} \frac{1}{2n+1}}_{=\frac{5}{6}-\frac{5}{2(2N+5)}}$$

et, en passant à la limite on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{5}{6} = \frac{2}{9}.$$

Solution 3.1.5 $u_n = \ln \dfrac{n^2+1}{(n-1)^2+1} = v_n - v_{n-1}$ où $v_n = \ln(n^2+1)$. On a donc une série aux différences donc $\sum\limits_{n=0}^{N} u_n = v_N - v_{-1}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge car la suite (v_n) diverge (cf. *exemple (iii) page 238*).

Solution 3.1.6
Toutes les séries qui interviennent dans cet exercice sont des séries télescopiques.

- On écrit $\dfrac{2}{n^2} = \dfrac{(n+1)-(n-1)}{1+(n-1)(n+1)}$ et on utilise la formule d'addition des Arctangentes (cf. *question (i) page 37*).
  On a alors $\operatorname{Arctan} \dfrac{2}{n^2} = \operatorname{Arctan}(n+1) - \operatorname{Arctan}(n-1)$ d'où

$$\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Arctan} \frac{2}{n^2} = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Arctan}(n+1) - \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Arctan}(n-1) = \operatorname{Arctan} N + \operatorname{Arctan}(N+1) - \operatorname{Arctan} 1.$$

  La somme vaut $\dfrac{3\pi}{4}$ en passant à la limite.

- Avec $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ on a $u_n = \tan\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n+1}$, la somme vaut $\tan 1$.
- Le terme général vaut $v_{n-1} - v_n$ où $v_n = \dfrac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1})(\cdots)(1+\sqrt{n})}$, or $1+\sqrt{k} \geqslant \sqrt{k+1}$ donc $v_n \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ d'où $\lim v_n = 0$, la somme est égale à 1.
- On a : $2^{-n}\operatorname{th}\dfrac{x}{2^n} = \dfrac{2^{-n+1}}{\operatorname{th}\frac{x}{2^{n-1}}} - \dfrac{2^{-n}}{\operatorname{th}\frac{x}{2^n}}$, d'où la somme : $\dfrac{2}{\operatorname{th}2x} - \dfrac{1}{x}$.

Solution 3.2.1 Comme la fonction logarithme est croissante, la première propriété est équivalente à $u_n < \dfrac{1}{n^k}$ et la règle de Riemann permet de conclure (cf. *application (ii) page 240*).
Dans l'autre cas la propriété est équivalente à $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$ donc la série diverge.
Le critère de convergence logarithmique de Cauchy est alors immédiat.

Solution 3.2.2

$$\begin{aligned} s_{2n} - s_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \\ &\geqslant n u_{2n} \end{aligned}$$

en minorant chaque terme de la somme par u_{2n}. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_{2n}-s_n) = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$.
Puis $(2n+1)u_{2n+2} \leqslant (2n+1)u_{2n+1} \leqslant (2n+1)u_{2n}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.
La réciproque est fausse, prendre $u_n = \dfrac{1}{n\ln n}$ qui est le terme général d'une série de Bertrand divergente (voir la *question (i) page 244* sur les séries de Bertrand).

Solution 3.2.3 Avec $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, $u_n - b = \dfrac{a_1(b_1-b) + a_2(b_2-b) + \cdots + a_n(b_n-b)}{s_n}$ on procède ensuite comme avec Césaro en tenant compte du fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

Solution 3.2.4 On utilise l'inégalité : $(a_1a_2\ldots a_n)^{1/n} \leqslant \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ (inégalité des moyennes cf. *question (iii) page 73*).
Comme la série converge, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc une simple application du théorème de Césaro fournit le résultat.

Solution 3.2.5 On utilise la relation $\operatorname{Arctan} x = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$ (cf. *théorème 2.4 page 36*).

Si $a \neq 0$ alors

$$\begin{aligned} u_n &= \operatorname{Arctan} \frac{1}{n} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{n+a} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{a}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

La série est absolument convergente. f est croissante et si p est un entier, on peut écrire $f(p) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{p-1} \operatorname{Arctan} \frac{1}{n}$ donc $\lim_{p \to +\infty} f(p) = +\infty$.
Conclusion : $\lim_{a \to +\infty} f(a) = +\infty$.

Solution 3.2.6

(1) C'est la règle de Duhamel (cf. *application (ii) page 241*) : si $\alpha > 1$ la série converge, $\alpha < 1$ la série diverge.

(2)
- Si $a > 0$ la série est absolument convergente (on majore $|a-k|$ par $a+k$ et on utilise le 1.).
- Si $a \leqslant -1$ la série est divergente car $|u_n| \geqslant 1$, $|a-k| = -a+k \geqslant k+1$.
- Pour $-1 < a \leqslant 0$, on a une série alternée : $u_n \searrow$ à partir d'un certain rang et $\ln |u_n|$ est attachée à une série divergente i.e. $u_n \to 0$.

Solution 3.2.7 Si $\sum a_n$ converge, alors la deuxième série qui est équivalente à $\frac{a_n}{s}$ où s désigne la somme de $\sum a_n$, converge.
Si la série $\sum a_n$ diverge, alors $s_n \to +\infty$ où s_n désigne la somme partielle de $\sum a_n$, donc $\forall n$, $\exists p$: $\frac{s_{n+p}}{s_n} \geqslant 2$ d'où $\frac{a_{n+1}}{s_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{s_{n+p}} \geqslant \frac{s_{n+p} - s_n}{s_n} \geqslant \frac{1}{2}$ et en conclusion la série $\sum \frac{a_n}{s_n}$ diverge.
On peut aussi dire que, si $\sum \frac{a_n}{s_n}$ converge alors $b_n = \frac{a_n}{s_n} \to 0$ donc

$$b_n = 1 - \frac{s_{n-1}}{s_n} \sim -\ln\left(\frac{s_{n-1}}{s_n}\right)$$

d'où $\sum \ln \frac{s_{n-1}}{s_n}$ converge soit (s_n) a une limite i.e. $\sum u_n$ converge.
Pour la troisième série, il suffit de faire les encadrements

$$2^n a_{2^{n+1}} \leqslant a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}} \leqslant 2^n a_{2^n}$$

en utilisant la monotonie de la suite (a_n).

Solution 3.2.8 La relation peut encore s'écrire : $4v_{n+1}(v_{n+1} - v_n) = u_n$.

- Si la suite (v_n) converge alors soit l sa limite, on a $v_{n+1} \leqslant l$ car cette suite est croissante donc

$$u_n \leqslant 4l(v_{n+1} - v_n),$$

  la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge car elle est majorée par la série télescopique de terme général $4l(v_{n+1} - v_n)$ qui converge.

- Réciproquement : si la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge alors

$$\begin{aligned} 4v_0(v_{n+1}-v_0) &= 4\sum_{k=0}^{n} v_0(v_{k+1}-v_k) \\ &\leqslant 4\sum_{k=0}^{n} v_{k+1}(v_{k+1}-v_k) \text{ car } v_0 \leqslant v_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \end{aligned}$$

donc, la suite (v_n) est croissante et majorée, elle converge (cf. *théorème 5.34 page 239*).

Solution 3.2.9 Soit $x = \overline{x_k x_{k-1}\dots x_0}$ un nombre à k chiffres ($x_k \neq 0$). On aura en tout, entre 10^k et $10^{k+1}-1$, $8{\times}9^k$ nombres qui ne contiendront aucun 5 (on a 8 choix pour x_k et 9 choix pour les k autres termes), d'où en notant A_k l'ensemble des nombres compris entre 10^k et $10^{k+1}-1$ (au sens large) et ne comportant pas de 5 dans leur écriture :

$$\sum_{n\in A_k} \frac{1}{n} \leqslant \frac{8{\times}9^k}{10^k}$$

en majorant chaque terme de la somme par $\dfrac{1}{10^k}$. Les sommes partielles de la série considérée sont majorée par une suite géométrique de raison 0,9 ; il y a bien convergence.

Solution 3.2.10 On a $s_{n+1}-s_n = n(u_n-u_{n+1}) \geqslant 0$, la suite (s_n) est croissante et majorée donc converge (vers s). On écrit alors :

$$s_{n+p}-s_n = \sum_{k=n}^{n+p-1} k(u_k-u_{k+1}) \geqslant n(u_n-u_{n+p})$$

en minorant k par n. En passant à la limite sur p on a $nu_n \leqslant s-s_n \to 0$ et comme $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = s_n + nu_n$ alors la série $\sum u_k$ converge et on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

Solution 3.2.11 On écrit que $\dfrac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n} = \dfrac{ns_n-(s_1+s_2+\cdots+s_{n-1})}{n}$ (où $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$).
Pour le (i), on utilise la convergence au sens de Césaro de la suite s_n, le résultat est alors immédiat.

Pour le (ii), on a (pour $n \geqslant 1$)

$$\begin{aligned}\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n(n+1)} &= \frac{ns_n-(s_1+\cdots+s_{n-1})}{n} - \frac{ns_n-(s_1+\cdots+s_{n-1})}{n+1}\\ &= s_n - \frac{n}{n+1}s_n - \frac{s_1+\cdots+s_{n-1}}{n} + \frac{s_1+\cdots+s_{n-1}}{n+1}\\ &= \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n+1} - \frac{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}}{n}.\end{aligned}$$

on a une série aux différences d'où

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n(n+1)} = \frac{s_1+s_2+\cdots+s_n}{n+1} \to \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

(On peut aussi écrire que $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N}\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\sum\limits_{p=1}^{n} pu_p\right) = \sum\limits_{i=0}^{N} u_i - \sum\limits_{i=0}^{N} iu_i$ (par Fubini).)

Solution 3.2.12 On trouve (après calculs !) $\alpha = -1, \beta = \dfrac{1}{2\pi}$ donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} (\frac{t^2}{2\pi} - t)\frac{\sin(N+\frac12)t\,\mathrm{d}t - \sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{\pi^2}{6} - \int_0^{\pi} g(t)\sin(N+\frac12)t\,\mathrm{d}t$$

où $g(t) = \dfrac{t-\frac{t^2}{2\pi}}{2\sin\frac{t}{2}}$ est une fonction de classe C^1 sur $]0,\pi]$. En 0 elle se prolonge par le théorème du prolongement dérivable (cf. *théorème 4.10 page 72*) car, après calculs, on prouve que g' a une limite en 0.
On obtient alors le résultat après une intégration par parties (on dérive g et on intégre le sinus).

Solution 3.3.1 Le sens direct est évident.
Réciproque : on se ramène tout d'abord en 0, si $v_n \to l$ alors on pose $v'_n = v_n - l$ et $u'_n = u_n - \dfrac{l}{3}$ et on a encore $v'_n = 2u'_{n+1} + u'_n$.
On s'inspire de la résolution des équations différentielles pour exprimer u_n en fonction de v_n. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $u_n = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n u_0$ et si on cherche $u_n = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n w_n$ on obtient $-w_{n+1} + w_n = (-2)^n v_n$ soit $w_n = w_0 - \sum\limits_{k=0}^{n-1}(-2)^k v_k$.
Or $2^k v_k = o(2^k)$ car $v_k \to 0$ donc $w_n = o(2^n)$ par sommation des relations de comparaison. Ainsi on peut conclure $u_n = o(1) \to 0$.

Solution 3.4.1

- diverge (u_n tend vers $+\infty$),
- diverge.
  En effet en utilisant la formule $\tan a - \tan b = \tan(a-b)[1+\tan a\tan b]$ appliquée à $a = \dfrac{n\pi}{4n+1}$ et $b = \dfrac{\pi}{4} = 1$ on obtient

$$\tan\frac{n\pi}{4n+1} - \tan\frac{\pi}{4} = \underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{4(4n+1)}(4n-4n-1)\right]}_{\sim -\frac{\pi}{16n}}(\underbrace{1+\tan a\tan b}_{\sim 2})$$

d'où $\tan\dfrac{\pi n}{4n+1} - \cos\dfrac{\pi}{n} = \tan a - \tan b + 1 - \cos\dfrac{\pi}{n}$ et comme $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ quand $x \to 0$, on en déduit que

$$\tan\frac{\pi n}{4n+1} - \cos\frac{\pi}{n} \sim -\frac{\pi}{8n}$$

ce qui permet de conclure à la divergence grâce à la règle de Riemann (cf. application (*ii*) page 234).

- $u_n \sim e^{\frac{-n}{\ln n}}$ converge.
  En effet,
  $$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1+1/n)}{\ln n} = 1 + \varepsilon_n$$
  où $\varepsilon_n = \dfrac{\ln(1+1/n)}{\ln n} = \dfrac{1}{n\ln n} + O\left(\dfrac{1}{n^2\ln n}\right)$. On écrit ensuite que
  $$\begin{aligned}\ln u_n &= -n^2\ln(1+\varepsilon_n) = -n^2\left[\varepsilon_n + O\left(\varepsilon_n^2\right)\right]\\ &= -n^2\varepsilon_n + o(1) = -\frac{n}{\ln n} + o(1)\end{aligned}$$
  d'où $u_n \sim e^{\frac{-n}{\ln n}}$. Pour conclure, comme $-\dfrac{n}{\ln n} + 2\ln n \to -\infty$ quand $n \to +\infty$, alors $n^2 u_n \sim \exp\left[-\dfrac{n}{\ln n} + 2\ln n\right] \to 0$ d'où la convergence de la série.
- $u_n \sim 2n^{-\alpha}\ln n$ converge ssi $\alpha > 1$.
  En effet, on a
  $$\begin{aligned}\frac{n+\varepsilon}{n}\ln(n+\varepsilon) &= \left(1+\frac{\varepsilon}{n}\right)\left[\ln n + \ln\left(1+\frac{\varepsilon}{n}\right)\right]\\ &= \left(1+\frac{\varepsilon}{n}\right)\left[\ln n + \frac{\varepsilon}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\ &= \ln n + \varepsilon\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$
  et, en prenant l'exponentielle on arrive à
  $$(n+\varepsilon)^{\dfrac{n+\varepsilon}{n}} = n\exp\left[\varepsilon\frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] = n + \varepsilon\ln n + O(1)$$
  et, en faisant la différence ($\varepsilon = 1$ moins $\varepsilon = -1$) on a
  $$(n+1)^{\dfrac{n+1}{n}} - (n-1)^{\dfrac{n-1}{n}} = 2\ln n + O(1).$$
  On peut alors conclure grâce aux séries de Bertrand (*question* (*i*) *page 244*).
- On a $u_n \to 1$ donc la série diverge.
  En effet
  $$\ln u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{\alpha}{k}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\alpha}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$
  et on utilise l'*exemple* (*i*) *page 244* d'où $\ln u_n \sim \alpha\dfrac{\ln n}{n} \to 0$.
- $u_n \sim \dfrac{1}{n}$, divergence.
- $n^2 u_n \to 0$ d'où la convergence.
  En effet
  $$n^2 u_n = \exp\left[(\ln n)^2 + 2\ln n - n(\ln(\ln n))\right]$$

et $(\ln n)^2 + 2\ln n - n(\ln(\ln n)) = -n\Big[\underbrace{\ln(\ln n)}_{\to+\infty} - \underbrace{\frac{(\ln n)^2}{n} - \frac{2\ln n}{n}}_{\to 0}\Big]$.

- On utilise l'encadrement $\dfrac{n\ln^2 2}{n^\alpha} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{n\ln^2 n}{n^\alpha}$: convergence ssi $\alpha > 2$ (on utilise les séries de Bertrand cf. *question (i) page 244*).
- On pose $x = \tan\theta$ et on est ramené à une intégrale de Wallis, il y a divergence.
- On majore $\sin x$ par x et $\dfrac{1}{1+x}$ par 1 d'où $u_n \leqslant \dfrac{\pi^4}{4n^4}$ ce qui assure la convergence par la règle de Riemann.
- Wallis a encore frappé ! On sait que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc $u_n = O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ d'où la convergence de la série par la règle de Riemann.

Solution 3.4.2 La fonction $t \mapsto \ln^2 t$ est croissante donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_{k-1}^{k} \ln^2 t \,\mathrm{d}t \leqslant \ln^2 k \leqslant \int_k^{k+1} \ln^2 t \,\mathrm{d}t \leqslant \ln^2(k+1)$$

et, en posant $I(n) = \displaystyle\int_2^n \ln^2 t \,\mathrm{d}t$, en faisant la somme de ces inégalités pour k variant de 2 à $n-1$ on arrive à

$$I(n-1) \leqslant \int_1^{n-1} \ln^2 t \,\mathrm{d}t \leqslant S_{n-1} \leqslant I_n \leqslant S_n - \ln^2 2 \leqslant S_n$$

et comme $I(n) = (\ln(n))^2\, n - 2\,n\ln(n) + 2\,n - 2\,(\ln(2))^2 + 4\,\ln(2) - 4$ alors $I(n) \sim n\ln^2 n$ d'où $I(n-1) \sim I(n)$ et par conséquent $S(n) \sim I(n)$. On a finalement un équivalent de u_n : $u_n \sim \dfrac{1}{n^{1-\alpha}\ln^2 n}$ d'où $\sum u_n$ converge ssi $\alpha \leqslant 0$ (on utilise les séries de Bertrand cf. *question (i) page 244*).

Solution 3.4.3 $f'(x) = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (car $f'(x) \sim \dfrac{1}{x}$ est non intégrable sur $[0, +\infty[$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$) donc f admet une application réciproque f^{-1} strictement croissante tendant vers $+\infty$ en $+\infty$.
On écrit ensuite que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 (\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x (\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} t)\,\mathrm{d}t$. Puis on développe $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} t$ en utilisant la formule du *théorème 2.4 page 36* soit

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} t = \operatorname{Arctan}\frac{1}{t} = \frac{1}{t} + g(t)$$

où $g(t) \sim -\dfrac{1}{3t^3}$ d'où en intégrant on obtient

$$f(x) = a + \ln x + \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t = \ln x + b + o(1)$$

car $t \mapsto g(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ ce qui entraîne l'existence d'une limite pour $\displaystyle\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$.
On applique cette dernière relation à $x = f^{-1}(\ln n)$ qui tend bien vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$, on

obtient $\ln n = \ln(f^{-1}(\ln n)) + b + o(1)$ et donc, il existe une constante c telle que $f^{-1}(\ln n) \sim e^c n$, la série converge ssi $\alpha < -1$.

Solution 3.5.1

(1) $n^{-\operatorname{th} n} \searrow 0$ donc convergence.
En effet $\ln u_n = -\operatorname{th} n . \ln n$ décroît vers $-\infty$, la convergence est alors une conséquence du théorème des séries alternées.

(2) $(\alpha > 0)$ $u_n - \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha} = \dfrac{-1}{n^\alpha(n^\alpha + (-1)^n)} = v_n$ diverge ssi $2\alpha \leqslant 1$.
En effet, pour $\alpha > 0$, la convergence de $\sum u_n$ est équivalente à la convergence de $\sum v_n$ or $v_n \sim \dfrac{-1}{n^{2\alpha}}$. Si $\alpha \leqslant 0$, u_n ne tend pas vers 0 donc il y a divergence.

(3) A.C. ssi $\alpha > 1$ ($|u_n| \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$.
Et pour $0 < \alpha \leqslant 1$:

$$u_{2n} + u_{2n+1} = \ln\left[1 + \frac{(2n+1)^\alpha - (2n)^\alpha - 1}{(2n(2n+1))^\alpha}\right] \sim \frac{-1}{(2n(2n+1))^\alpha}$$

C ssi $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

(4) Non convergence car $|u_n| \to \sin\frac{\pi}{3}$.
En effet $\sin\left[\pi n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{1/3}\right] = \sin\left[\pi n\left(1 + \dfrac{1}{3n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\right] = (-1)^n \sin\left[\dfrac{\pi}{3} + o(1)\right]$.

(5) Pour $2k\pi - \dfrac{\pi}{3} \leqslant \ln x \leqslant 2k\pi + \dfrac{\pi}{3}$, on a $\cos(\ln x) \geqslant \dfrac{1}{2}$, donc, avec $n_1 = \left[e^{2k\pi - \frac{\pi}{3}}\right]$, $n_2 = \left[e^{2k\pi + \frac{\pi}{3}}\right]$, $\displaystyle\sum_{n=n_1+1}^{n_2} \frac{\cos(\ln n)}{n} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{n=n_1+1}^{n_2} \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2n_2}(n_2 - n_1) \sim \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\pi/3}\right)$, on a divergence.
On a utilisé le critère de Cauchy.

(6) Encore Wallis.

(7) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n^{5/2}}\right)$ converge.
En effet $\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n}\,O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

(8) $0 \leqslant u_n \leqslant (2 - \sqrt{3})^n \pi$ converge (on utilise la majoration $\sin x \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$).
$(2 + \sqrt{3})^n \pi = 2k\pi - (2 - \sqrt{3})^n \pi$ on a donc convergence.
En effet

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n &= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^{n-p}3^{p/2} + \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n}{p}2^{n-p}3^{p/2} \\ &= 2\sum_{q=0}^{[n/2]}\binom{n}{2q}2^{n-2q}3^q = 2k\end{aligned}$$

où $k \in \mathbb{Z}$ donc $\sin[(2+\sqrt{3})^n\pi] = -\sin[(2-\sqrt{3})^n\pi]$.

(9) $|a| < \sqrt{2}$: D, $|a| > \sqrt{2}$: C, $|a| = \sqrt{2}$: A.C.
En effet $|u_n| = \dfrac{1}{n^2+1}\left(\dfrac{|a|}{2}\right)^n$. Si $|a| \leqslant 2$ alors $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2+1}$ donc on a convergence, si $|a| > 2$, $u_n \to +\infty$, on a divergence.

(10) $u_n = (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ converge.

En effet

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{n} - \pi n e^{-1/n} &= \frac{\pi}{2}\left[1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \pi n\left[1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]\\ &= -n\pi + \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\end{aligned}$$

d'où le résultat annoncé $u_n = (-1)^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ car $\cos\left(-n\pi + \frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = (-1)^{n-1}\sin\alpha$. On a ensuite $\sin\left(\frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n = \frac{(-1)^{n-1}\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ somme de deux séries convergentes.

(11) $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} - \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n+1)}v_n$ or chaque terme de v_n est majoré par $\frac{1}{n-1}$ et il y en a $n-1 \Rightarrow |v_n| \leqslant 1$, on a donc convergence.

En effet, on réécrit la somme des termes du numérateur dans l'ordre inverse et on particularise les deux premiers termes. On a alors $v_n = \frac{1! - 2! + \cdots + (-1)^{n-3}(n-2)!}{(n-1)!}$ et $\frac{(n-k)!}{(n-1)!} \leqslant \frac{1}{n-1}$ pour $k \geqslant 2$.

Solution 3.5.2 On a $\ln\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{\alpha}{n} + w_n$ où $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n$ converge absolument ($w_n = v_n + O\left[\left(\frac{\alpha}{n} + v_n\right)\right]$). Donc

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{u_{k+1}}{u_k} = \ln\frac{u_n}{u_1} = -\alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} w_k = -\alpha\ln n + W_n$$

où W_n a une limite W (ici, on a utilisé le résultat de l'*exemple (i) page 244* $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$).

On aura alors $u_n \sim \frac{C}{n^\alpha}$ où $C = e^W$. On peut conclure à la nature de la série de terme général u_n grâce à la règle de Riemann (cf. *application (ii) page 240*).

Application :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{n+1}\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{6(n+1)} + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \frac{1}{6n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où $u_n \sim \frac{C}{n^{1/6}}$ donc la série diverge.

Solution 3.5.3

(1) $u_n \sim \frac{a}{n^k}$ où $k = \deg Q - \deg P$ d'ou l'équivalence grâce à la règle de Riemann (cf. *application (ii) page 240*).

(2) Supposons que $\deg Q = 1 + \deg P$ alors $u_n = \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $(-1)^n u_n$ s'écrit comme une somme d'une série convergente et d'une série A.C. La réciproque est immédiate si l'on tient compte de la condition $\lim u_n = 0$.

Solution 3.5.4 On utilise l'inégalité : $\dfrac{a_n}{n} \leqslant \dfrac{1}{2}\left[a_n^2 + \dfrac{1}{n^2}\right]$.

Pas de réciproque (prendre $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$).

Solution 3.5.5

(1) Il y a équivalence entre la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum w_n$ car $|u_n| \to 0$ et la somme partielle de la série $\sum w_n$ correspond à une suite extraite de la somme partielle de la série $\sum u_n$.
Or $w_n = \dfrac{8n+3}{(4n+1)(4n+3)(2n+2)} \sim \dfrac{1}{4n^2}$ donc converge.

(2) Effectivement, on retrouve tous les termes de la suite v_n avec $u_{3p+1} = v_{4p+1}$, $u_{3p+2} = v_{4p+3}$ et $u_{3p+3} = v_{2p+2}$.

(3) On procède par récurrence en utilisant la relation : $u_{3p+1} + u_{3p+2} + u_{3p+3} = \dfrac{1}{4p+1} - \dfrac{1}{4p+2} + \dfrac{1}{4p+3} - \dfrac{1}{4p+4} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2p+1} + \dfrac{1}{2p+2}\right)$. Comme

$$\frac{1}{p+1} + \cdots + \frac{1}{2p} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{1+\frac{k}{p}} \to \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln 2,$$

on en déduit bien le résultat $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \dfrac{3}{2}\ln 2$.

Remarque : la façon d'additionner les termes de la série $\sum v_n$ a une influence sur la somme de cette série. En fait la série $\sum v_n$ ne correspond pas à une série AC, on peut d'ailleurs prouver que, en choisissant convenablement σ permutation de $\mathbb{N}$, on peut avoir, pour tout réel x donné à l'avance,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_{\sigma_n} = x$$

Solution 3.5.6

(1) On décompose la fraction rationnelle $\dfrac{1}{m^2-n^2} = \dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{1}{m-n} + \dfrac{1}{m+n}\right)$ (relation valable même si $n=0$). On a alors $\sum\limits_{n\geqslant 1, n\neq m} \dfrac{1}{m^2-n^2} = \dfrac{1}{4m^2}$ (le terme en $\dfrac{1}{2m}$ ne doit pas être écrit).
En effet on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leqslant m+N, n\neq m} \frac{1}{m^2-n^2} &= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{m^2-n^2} + \sum_{n=m+1}^{m+N} \frac{1}{m^2-n^2} \\
&= \frac{1}{2m}\left(\sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n} + \sum_{n=m+1}^{m+N} \frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n}\right) \\
&= \frac{1}{2m}\left(\sum_{p=1}^{m} \frac{1}{p} + \sum_{p=m}^{2m-1} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} + \sum_{p=2m+1}^{2m+N} \frac{1}{p}\right)
\end{aligned}$$

en réécrivant chaque terme de la somme

$$= \frac{1}{2m}\left(\sum_{p=1}^{2m+N}\frac{1}{p}+\frac{1}{m}-\frac{1}{2m}-\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}\right)$$
$$= \frac{1}{4m^2}+\frac{1}{2m}\underbrace{\sum_{p=N+1}^{2m+N}\frac{1}{p}}_{\to 0}$$

car dans la dernière somme, on a un nombre fixé de termes ($2m$) qui tend vers 0 quand $N \to +\infty$.

(2) On trouve alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{mn} = \begin{cases} \dfrac{1}{4m^2} & \text{si } m \neq 0 \\ -\dfrac{\pi^2}{6} & \text{si } m = 0 \end{cases}$. D'où $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{mn}\right) = \dfrac{\pi^2}{24} - \dfrac{\pi^2}{6} = -\dfrac{\pi^2}{8}$

et par le même calcul (en changeant de signe) : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{mn}\right) = \dfrac{\pi^2}{8}$.

Solution 3.5.7 $u_n \sim \pi(2-\sqrt{3})^n$ et comme $0 < 2-\sqrt{3} < 1$ alors : $\sum u_n$ converge.
Il en est de même pour $\sum v_n$ car

$$(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n = 2\sum_{0 \leqslant 2p \leqslant n}\binom{n}{2p}3^p 2^{n-2p} \in 2\mathbb{N}$$

et donc $v_n = -u_n$.

Solution 3.5.8 On effectue un développement limité

$$\ln\frac{n+1}{n-1} = \frac{2}{n} + \frac{2}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \Rightarrow \left(\ln\frac{n+1}{n-1}\right)^\beta = \frac{2^\beta}{n^\beta}\left(1+\frac{\beta}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

donc $u_n = (-1)^n\dfrac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}}\left(1+\dfrac{\beta}{3n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$.

- Si $\beta \leqslant \alpha$ la série diverge.
- Si $\beta > \alpha + 1$ la série converge absolument.
- Si $\alpha < \beta \leqslant \alpha + 1$ alors

$$u_n = (-1)^n\frac{2^\beta}{n^{\beta-\alpha}} + (-1)^n\frac{2^\beta}{3n^{2+\beta-\alpha}}(1+o(1))$$

on obtient la somme de 2 séries convergentes.

Solution 3.5.9

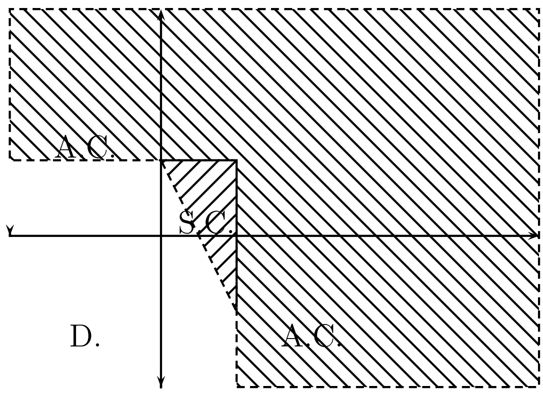
- Si $\alpha = \beta$, la suite (u_n) n'est pas définie.
- Si $\alpha < \beta$, $u_n \sim \dfrac{1}{n^\beta}$,
  - si $\beta > 1$ la série est absolument convergente,
  - si $\beta \leqslant 1$ elle est divergente.
- Si $\beta < \alpha$, $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$:
  - la série est absolument convergente ssi $\alpha > 1$,
  - elle diverge si $\alpha \leqslant 0$,

– pour $0 < \alpha \leqslant 1$, on écrit :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{n^{2\alpha-\beta}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-\beta}}\right),$$

la série converge ssi $2\alpha - \beta > 1$.

Il est intéressant alors de représenter dans le plan des (α, β) les domaines de convergence et d'absolue convergence de la série $\sum u_n$.



Solution 3.5.10

(1) $u_n > 0$ comme produit de termes > 0. Vu que

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^{q-1}}{\sqrt{q}}\right) = \frac{(-1)^{q-1}}{\sqrt{q}} - \frac{1}{2q} + O\left(\frac{1}{q^{3/2}}\right)$$

alors $\ln u_n = -A_n - \frac{1}{2}S_n + B_n$ où

$$A_n = \sum_{q=1}^{n} \frac{(-1)^q}{\sqrt{q}},\ S_n = \sum_{q=1}^{n} \frac{1}{q},\ B_n = \sum_{q=1}^{n} O\left(\frac{1}{q^{3/2}}\right).$$

A_n et B_n ont une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ donc $\ln u_n \to -\infty$ soit $u_n \to 0$.

(2) On sait que $S_n = \ln n + c_n$ où $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \gamma$ (cf. *exemple (i) page 244*). On a donc $\ln u_n = -\frac{1}{2}\ln n + D_n$ où D_n est borné.

Solution 3.5.11 On sait que la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ diverge (voir la *question (i) page 244* sur les séries de Bertrand).

Or : $\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = 1 + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$ et $\frac{(n+1)v_{n+1}}{nv_n} = 1 - \frac{1}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$ (où on a posé $v_n = \frac{1}{n\ln n}$), donc à partir d'un certain rang, $\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} \geqslant \frac{(n+1)v_{n+1}}{nv_n}$ i.e. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge (on utilise la *proposition 5.3.5 page 241*).

Solution 3.5.12

- On s'inspire de la démonstration du théorème sur le produit de Cauchy. On pose $w_n = \sum_{p+q=n} u_{p,q}$, on a alors l'encadrement

$$\sum_{(p,q)\in[\![0,n]\!]^2} u_{p,q} \leqslant \sum_{k=0}^{2n} w_k \leqslant \sum_{(p,q)\in[\![0,2n]\!]^2} u_{p,q}$$

puis on passe à la limite lorsque $n \to +\infty$.

- Grâce au résultat précédent, on sait que, dans le cas d'une suite à termes positifs $u'_{p,q}$, on a

$$\sum_{k=0}^{2n} w'_k - \sum_{(p,q)\in[\![0,n]\!]^2} u'_{p,q} \to 0.$$

Or

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{2n} w_k - \sum_{(p,q)\in[\![0,n]\!]^2} u_{p,q}\right| &\leqslant \sum_{(p,q)\in[\![0,n]\!]\times[\![n+1,+\infty[} |u_{p,q}| + \sum_{(p,q)\in[\![n+1,+\infty[\times[\![0,n]\!]} |u_{p,q}| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{2n} w'_k - \sum_{(p,q)\in[\![0,n]\!]^2} u'_{p,q} \to 0\end{aligned}$$

en posant $u'_{p,q} = |u_{p,q}|$ et $w'_n = \sum_{p+q=n} u'_{p,q}$.

Remarque : on a fait une démonstration analogue à celle du théorème 5.46 page 247.

Solution 3.5.13

- Si $\alpha \leqslant 1$ la série $\sum_j \frac{1}{(i+j+1)^\alpha}$ diverge (voir la convergence des séries de Riemann).
- Si $\alpha > 1$ la série $\sum_j \frac{1}{(i+j+1)^\alpha}$ converge, on utilise alors l'encadrement

$$\int_{i+j+1}^{i+j+2} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{(i+j+1)^\alpha} \leqslant \int_{i+j}^{i+j+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

ce qui donne, par passage à la limite

$$\frac{1}{(\alpha-1)(i+1)^{\alpha-1}} = \int_{i+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+j+1)^\alpha} \leqslant \int_{i}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)i^{\alpha-1}}$$

pour $i \geqslant 1$.

Cet encadrement nous permet de conclure

- Si $\alpha \leqslant 2$, $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+j+1)^\alpha}\right)$ diverge.
- Si $\alpha > 2$, $\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+j+1)^\alpha}\right)$ converge.

Solution 3.5.14

(1) On a d'une part $\dfrac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)} = \dfrac{1}{i+j^2} - \dfrac{1}{i+j^2+1}$ (en décomposant la fraction rationnelle) et donc

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{i+j^2} - \frac{1}{i+j^2+1} \right) = \frac{1}{j^2}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)} &= \sum_{j\in[1,+\infty[} \left(\sum_{i\in[0,+\infty]} \frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

et qui assure la convergence de la suite double (en vertu du *théorème 5.47 page 247*).

(2) D'autre part $\operatorname{Card}\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \mid i+j^2=n\} = E(\sqrt{n})$.
En effet, si on pose $F_n = \{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \mid i+j^2=n\}$ et $G_n = \{j\in\mathbb{N}^* \mid j^2 \leqslant n\}$ alors l'application $\varphi\ : j\in G_n \mapsto (n-j^2, j)\in F_n$ est une bijection donc $\operatorname{Card} F_n = \operatorname{Card} G_n = E(\sqrt{n})$.
On a

$$\begin{aligned}\sum_{i+j^2\leqslant N} \frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{i+j^2=n} \frac{1}{(i+j^2)(i+j^2+1)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{E(\sqrt{n})}{n(n+1)} \\ &\to \frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Solution 3.5.15

(1) On majore $\binom{p+q}{q}$ par 2^{p+q} et on remarque que la suite double $((2|x|)^{p+2q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ converge pour $|x| < \dfrac{1}{2}$.

(2) On utilise le résultat rappelé :

$$\begin{aligned}S(x) &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{p+q=n} (-1)^{p+q} \binom{p+q}{q} x^{p+2q} \right) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \left((-1)^n \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} x^{n-q} x^{2q} \right) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n (x+x^2)^n = \frac{1}{1+x+x^2}.\end{aligned}$$

(3) Premièrement, on a $S(x) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{p+2q=m} (-1)^{p+q} \binom{p+q}{q} \right) x^m$.

Deuxièmement on remarque que $\dfrac{1}{1+x+x^2} = \dfrac{1-x}{1-x^3} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (1-x) x^{3n}$.

(4) En utilisant l'unicité du développement limité, on arrive à

$$d_{3n} = 1,\ d_{3n+1} = -1,\ d_{3n+2} = 0$$

en posant $k = p + q$ et $j = q$.

Solution 3.5.16 On a $d(n) \leqslant n$ donc, comme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ne^{-n}$ converge par la règle de d'Alembert (cf. *application (i) page 241*), on a convergence de la série.
Ensuite

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{-p}}{1-e^{-p}} &= \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(k+1)p} = \sum_{p,k\geqslant 1} e^{-kp} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{pk=n} e^{-kp}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} d(n)e^{-n}\end{aligned}$$

en utilisant le *théorème 5.47 page 247* la série double $\sum e^{-kp}$, $(k,p) \in \mathbb{N}^2$ est convergente et on peut intervertir les sommations.

Solution 3.5.17

(1) On a $\dfrac{1}{a^2b + ab^2 + 2ab} = \dfrac{1}{a(a+2)}\left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{b+a+2}\right)$ pour tout (a, b) de $(\mathbb{N}^*)^2$ (on décompose la fraction rationnelle en prenant b comme variable).
Comme $\sum\limits_{b=1}^{+\infty} \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{b+a+2} = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{a+2} \simeq \ln a$ et que la série $\sum \dfrac{\ln a}{a(a+2)}$ converge alors on utilise le *théorème 5.47 page 247*

$$\begin{aligned}S &= \sum_{a=1}^{+\infty}\sum_{b=1}^{+\infty} \frac{1}{a^2b + ab^2 + 2ab} \\ &= \sum_{a=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a(a+2)}\left(\sum_{b=1}^{+\infty}\frac{1}{b} - \frac{1}{b+a+2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{a+2}\right)\right]\end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue en décomposant le terme $\dfrac{1}{a(a+2)}$.

On pose $U_a = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{2a} + \dfrac{1}{3a} + \cdots + \dfrac{1}{a^2}$ alors, en développant l'expression qui est dans la dernière somme

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{+\infty}\left[U_a - U_{a+2} + \frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{a(a+2)}\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{+\infty}\left[U_a - U_{a+2} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+2}\right)\right]\end{aligned}$$

et, après simplifications

$$S = \frac{1}{2}\left(U_1 + U_2 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{7}{4}$$

ce qui permet d'affirmer que la suite double $\left(\dfrac{1}{a^2b+ab^2+2ab}\right)_{(a,b)\in\mathbb{N}^{*2}}$ converge et d'avoir sa somme qui est effectivement rationnelle.

(2) On pose $S_n = \sum\limits_{a=1}^{+\infty}\sum\limits_{b=1}^{+\infty}\dfrac{1}{a^2b+ab^2+nab}$, les calculs effectués ci-dessus s'adaptent sans difficulté et on obtient
- $S_1 = 2$
- Pour tout $n \geqslant 2$: $nS_n = S_{n-1} + 2U_n$ avec

$$U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Ce qui prouve par récurrence que $S_n \in \mathbb{Q}$.

Solution 3.5.18 On a

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{p+q=n} u_{p,q} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{p+q=n} u_{p,q} = \sum_{n=0}^{N} 2^{-n-n^2}\sum_{q=0}^{n} 2^{-2q}$$
$$= \sum_{n=0}^{N} 2^{-n-n^2}\frac{1-2^{-2(n+1)}}{1-1/4}$$

et, en remarquant que $-n-n^2-2(n+1) = -(n+1)^2-(n+1)$, alors, par passage à la limite sur N, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p+q=n} u_{p,q} = \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n-n^2} - \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-(n+1)-(n+1)^2} = \frac{4}{3}.$$

Solution 4.1.1 Par récurrence on a $-2 \leqslant f_n \leqslant 2$ puis

$$2 - f_{n+1} = \frac{2-f_n}{2+\sqrt{2+f_n}} \leqslant \frac{2-f_n}{2}$$

d'où par une autre récurrence

$$0 \leqslant 2 - f_n \leqslant \frac{2-f_0}{2^n} \leqslant \frac{4}{2^n},$$

on a convergence uniforme de la suite (f_n) vers 2.

On obtient alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 4$, $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 2$ (car $\dfrac{f_{n-1}}{f_n}$ C U vers 1).

Solution 4.1.2

(1) Convergence simple vers 0, convergence uniforme sur $[0,a]$, $a<1$. Ne pas dire ici qu'il y a convergence uniforme sur $[0,1[$.

(2) Convergence simple vers 0, convergence uniforme car :
- $x \geqslant \dfrac{1}{n} \Rightarrow |f_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
- $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n} \Rightarrow |f_n(x)| \leqslant \sqrt{x} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (on a $\sin nx \leqslant nx$ pour $x \geqslant 0$).

(3) Convergence simple en 0 pour $x \geqslant 0$ (pas de convergence pour $x<0$).
Comme $f_n(\frac{1}{n}) = n^{\alpha-1}$ on aura convergence uniforme ssi $\alpha < 1$ (f_n passe par un maximum pour $x = \dfrac{1}{n}$).

(4) On ne peut avoir de convergence simple sur $\mathbb{R}$ car $f_n(-1) = \dfrac{(-1)^n}{2}$. On ne peut avoir de convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ car, pour $x \neq 1$, $f_n(x) \to 0$ et $f_n(1) = \dfrac{1}{2}$.
Enfin, on a convergence uniforme vers 0 sur tous les intervalles
- $]\infty, -a] \subset]-\infty, -1[$ et $[a, +\infty[\subset]1, +\infty[$ car $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leqslant \dfrac{1}{|x|^n} \leqslant \dfrac{1}{a^n}$.
- $[b, c] \subset]-1, 1[$ car $\dfrac{x^n}{1+x^{2n}} \leqslant |x|^n \leqslant (\max(|b|, |c|))^n$.

(5) Pour avoir convergence simple sur $\mathbb{R}_+$, on doit avoir $a > 1$ (sinon $a^{-nx} \to +\infty$) et dans ce cas $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x) = \dfrac{x}{1-a^x}$; on n'a pas convergence uniforme car $(f_n - f)(\frac{1}{n}) = \dfrac{1}{na(a^{1/n}-1)} \sim \dfrac{1}{a \ln a}$. On aura par contre convergence uniforme sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$.

(6) f_n converge simplement vers $\delta_{0,x}$ (qui vaut 1 si $x = 0$, 0 ailleurs) fonction non continue. Il ne peut y avoir convergence uniforme sur $[0, \pi]$, il y a cependant convergence uniforme sur $[a, \pi]$ pour $a > 0$

(7) Convergence simple vers la fonction nulle car $\sin^2 nx \leqslant 1$, mais $f_n(\frac{1}{n}) \sim \sin 1$ donc on n'a pas convergence uniforme.

(8) Convergence simple vers $f(x) = 0$ si $x \neq 1$, $f(1) = \dfrac{1}{2}$.
En effet $f_n'(x) = nx^n[1 - x^n] \geqslant 0$ donc f_n est une fonction croissante. Si $x < 1$ alors $f_n(x) \to 0$ et si $x = 1$, $f_n(1) = \dfrac{n^2}{(n+1)(2n+1)} \to \dfrac{1}{2}$.

Solution 4.1.3 $f_n(0) = f_n(1) = 0$ et $f_n > 0$ sur $]0, 1[$ donc f_n' s'annule en α_n où $\sup f_n(t) = f_n(\alpha_n)$. α_n vérifie alors : $n \sin \pi\alpha_n + \pi\alpha_n \cos \pi\alpha_n = 0$ i.e. $\tan(\pi\alpha_n) = -\dfrac{\pi\alpha_n}{n}$ avec $\dfrac{1}{2} < \alpha_n < 1$ (car comme $\sin \pi\alpha_n \geqslant 0$ on a $\cos \pi\alpha_n \leqslant 0$).
On a donc $\tan(\pi\alpha_n) \to 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$. En posant $\alpha_n = 1 - \varepsilon_n$ où $\varepsilon_n \to 0$ on obtient l'égalité $\tan(\pi\varepsilon_n) = \dfrac{\pi}{n}(1 - \varepsilon_n)$. On prend les artangentes de part et d'autre ce qui donne

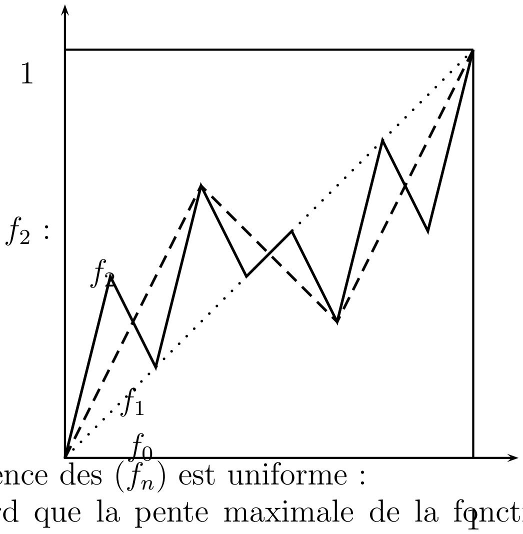
$$\pi\varepsilon_n = \operatorname{Arctan} \frac{\pi}{n}(1 - \varepsilon_n) = \frac{\pi}{n} + o(1)$$

(car $\pi\varepsilon_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$).
Finalement on arrive à $\alpha_n = 1 - \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n})$ ce qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = \dfrac{\pi}{e}$.

Solution 4.1.4

(1) Si f est différentiable en x_0 alors $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0+k)}{h+k} = f'(x_0) + o(1)$ donc ce rapport admet bien une limite quand (h, k) tend vers 0.
La réciproque est immédiate, il suffit de prendre $k = 0$.
Contre-exemple : avec $x_0 = 0$, $f(x) = |x|$ alors $\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} = 0$ alors que f n'est pas dérivable en 0.

(2) Représentation de f_0, f_1, f_2 :



Montrons que la convergence des (f_n) est uniforme :
on remarque tout d'abord que la pente maximale de la fonction f_n est obtenue sur l'intervalle $[0, 1/3^n]$ et qu'elle vaut 2^n.
Sur l'intervalle $\left[\dfrac{k}{3^n}, \dfrac{k+1}{3^n}\right]$, on a $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}\left|f_n\left(\dfrac{k}{3^n}\right) - f_n\left(\dfrac{k+1}{3^n}\right)\right|$ d'où

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leqslant \frac{1}{3}\frac{2^n}{3^n}.$$

On a $\|f_n - f_{n+1}\| \leqslant \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$, la série aux différences converge normalement sur $[0, 1]$ et donc la suite (f_n) converge uniformément. Sa limite f est bien une fonction continue.
Montrons maintenant que f n'est dérivable en aucun point :
soit $x_0 \in [0, 1]$, on peut choisir h et k pour que $x_0 + h = \dfrac{p+1}{3^n}$, $x_0 - k = \dfrac{p}{3^n}$, h et k étant des entiers.
On remarque que $3^n\left[f\left(\dfrac{p+1}{3^n}\right) - f\left(\dfrac{p}{3^n}\right)\right] = 3^n\left[f_n\left(\dfrac{p+1}{3^n}\right) - f_n\left(\dfrac{p}{3^n}\right)\right] = \Delta_n$. Or, compte tenu de la définition de la suite (f_n), on a $\Delta_{n+1} = \begin{cases} 2\Delta_n \\ -\Delta_n \end{cases}$, on distingue deux cas :

- si Δ_n est multiplié une infinité de fois par 2, alors $|\Delta_n| \to +\infty$,
- sinon, à partir d'un certain rang, $\Delta_{n+p} = (-1)^p\Delta_n \neq 0$, cette quantité n'a pas de limite,

Conclusion : f n'est pas dérivable en x_0.

Écriture de f sous forme de série. On pose $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 1/3 \\ -2x+1 & \text{si } 1/3 \leqslant x \leqslant 2/3 \\ x-1 & \text{si } 2/3 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$ que l'on prolonge à $\mathbb{R}$ par 1-périodicité. On pose $g_n(x) = \dfrac{(-1)^{[3^n x]}}{3^n} g(3^n x)$ (qui est continue, de période $\dfrac{1}{3^n}$) alors $f_{n+1}(x) - f_n(x) = g_n(x)$ d'où $f(x) = x + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} g_n(x)$.

Solution 4.1.5

Sur $[a, +\infty[$ la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ est majorée par $\dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{x}{(1+x^2)^n} \leqslant \dfrac{1}{2(1+a^2)^{n-1}}$ ce qui assure la convergence normale sur $[a, +\infty[$.
On n'a pas de C.U. sur $[0, 1]$ car le reste d'ordre n de cette série vaut

$$r_n = \frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}.\frac{1}{1 - \dfrac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{x(1+x^2)^n}.$$

La somme vaut $\dfrac{1+x^2}{x}$ (elle correspond au reste d'ordre -1).

Solution 4.1.6

(1) g est définie sur $\mathcal{D}=\mathbb{R}-\mathbb{Z}_-$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\dfrac{(-1)^n}{n!}\dfrac{1}{x+n}=0$ (ce qui assure dans un premier temps la convergence simple).
g est continue sur son domaine de définition car il y a convergence compacte sur $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$. En effet, si $x\in[a,b]\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-$ alors $|u_n(x)|\leqslant\dfrac{M}{n!}$ où $\dfrac{1}{M}=\min(\mathrm{d}(a,\mathbb{Z}),\mathrm{d}(b,\mathbb{Z})$ ce qui assure la convergence normale.

(2) On a ensuite

$$g(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{e}$$

et

$$\begin{aligned}
xg(x)-g(x+1)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{x}{x+n}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x+n+1}\\
&=1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{x}{x+n+1}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x+n+1}\\
&=1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!(x+n+1)}(x+n+1)\\
&=\frac{1}{e}
\end{aligned}$$

(3) On fait l'hypothèse que $g(p)=a_p-\dfrac{b_p}{e}$ où a_p et b_p sont des entiers. En appliquant la relation précédente on obtient $a_{p+1}=pa_p$ et $b_{p+1}=pb_p+1$ d'où $a_p=(p-1)!$ et, en divisant la deuxième relation par $p!$ on obtient $b_p=(p-1)!\left[1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{(p-1)!}\right]+1$.

Solution 4.1.7

(1) D'une part, en transformant u_n, on trouve $|u_n(x)|=\dfrac{|\operatorname{sh}x|}{\operatorname{ch}n\operatorname{ch}(n+x)}\leqslant\dfrac{|\operatorname{sh}x|}{\operatorname{ch}n}$: la série converge.
D'autre part, $u_n(x)\nearrow$ donc $f(x)\nearrow$. Puis, sur un segment $[a,b]$ on a $|u_n(x)|\leqslant\dfrac{\max(|\operatorname{sh}a|,|\operatorname{sh}b|)}{\operatorname{ch}n}$, il y a convergence normale sur tout segment, f est donc continue.

(2) $1-\operatorname{th}n=\dfrac{e^{-n}}{\operatorname{ch}n}$ donc la série $\sum(1-\operatorname{th}n)$ converge.
Comme $u_n(x)\leqslant 1-\operatorname{th}n$ alors $f(x)$ est majorée, comme elle est croissante, elle admet une limite en $+\infty$. On a en fait $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-\operatorname{th}n)=s$.
En effet, on vient de voir que $f(x)\leqslant s$. On a ensuite

$$\forall N\in\mathbb{N},\ f(x)\geqslant\sum_{n=0}^{N}\operatorname{th}(x+n)-\operatorname{th}n$$

d'où, à la limite en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \geqslant \sum\limits_{n=0}^{N} 1-\operatorname{th} n$ et comme ceci est valable pour tout N, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \geqslant s$ soit, en conclusion

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-\operatorname{th} n).$$

(3) Si on note $s_n(x)$ la somme partielle de la série donnant f, on a

$$s_n(x+1)-s_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \operatorname{th}(p+x+1)-\operatorname{th}(p+x) = \operatorname{th}(n+x+1)-\operatorname{th} x$$

ce qui donne le résultat en passant à la limite.

Solution 4.1.8

(1) Comme $\left|\varphi(\dfrac{x}{2^n})\right| \leqslant C\dfrac{|x|}{2^n} \leqslant C\dfrac{a}{2^n}$ il y a convergence uniforme de la série sur I et sa somme $g(x)$ est continue en tant que somme d'une série de fonctions continues.

$$\begin{aligned} g(x)-g(x/2) &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\varphi(\frac{x}{2^n}) - \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\varphi(\frac{x}{2^{n+1}}) \\ &= \varphi(x) - \lim_{N\to+\infty}\varphi(\frac{x}{2^{N+1}}) \\ &= \varphi(x) \end{aligned}$$

et on a évidemment $g(0)=0$ car $\varphi(0)=0$.

(2) Si $f(x)$ est une autre solution, alors $h=f-g$ vérifie :

$$h(x) = h(\frac{x}{2}) \text{ et } h(0)=0$$

or, par une récurrence immédiate on a $h(x)=h(\dfrac{x}{2^n}) \to 0$ donc $h=0$ et $f=g$ d'où l'unicité.

Solution 4.1.9

(1) $\begin{cases} |x|<1 \ : u_n(x) \sim x^{2^n} & \text{convergence simple} \\ |x|>1 \ : u_n(x) \sim \dfrac{-1}{x^{2^n}} & \text{convergence simple} \end{cases}$

On a convergence uniforme sur $[a,b] \subset]-1,1[$, sur $]-\infty,b] \subset]-\infty,-1[$ et sur $[c,+\infty[\subset]1,+\infty[$.

(2) $u_{2n}(x)+u_{2n+1}(x) = \dfrac{x-2}{(2nx+1)((2n+1)x-1)}$ d'où la convergence pour $x\neq 0$.

On a convergence uniforme sur tout segment (compact) de $\mathbb{R}^*$.

Si $x \geqslant 2$ alors :

$$0 \leqslant u_{2n}(x)+u_{2n+1}(x) \leqslant \frac{1}{4n^2x}$$

(on majore $x-2$ par x, on minore $(2nx+1)$ et $(2nx+x-1)$ par $2nx$). On obtient alors l'encadrement

$$0 \leqslant s(x) \leqslant \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} s(x) = 0$.

(3) On décompose la fraction rationnelle ce qui donne

$$u_n(x) = \frac{1}{1+nx} - \frac{1}{1+(n+1)x}$$

d'où la convergence car on a une série télescopique. La somme est égale à 1 car $\sum_{n=0}^{N} u_n(x) = 1 - \frac{1}{1+(N+1)x}$ pour $x \neq 0$ (elle vaut évidemment 0 si $x = 0$).
On a convergence uniforme sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ car $r_n(x) = \frac{1}{1+(n+1)x} \leqslant \frac{1}{1+(n+1)a} \to 0$.

(4) Même chose qu'à l'exercice précédent, on décompose la fraction rationnelle

$$u_n(x) = \frac{1}{2(n-x)} - \frac{1}{n+1-x} + \frac{1}{2(n+2-x)} = v_n - 2v_{n+1} + v_{n+2}$$

d'où, en posant $w_n = v_n - v_{n+1}$, on reconnaît encore une série télescopique de somme $s(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right)$.
On a C.U. sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ car $r_n(x) = \frac{-1}{2(n+1-x)(n+2-x)}$. Sur $[a, b]$, pour n assez grand, on a $0 \leqslant n+1-x \leqslant n+1-|x| \leqslant n+1-\alpha$ où $\alpha = \max(|a|, |b|)$ d'où $|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{2(n+1-\alpha)(n+2-\alpha)}$.

Solution 4.1.10 f est définie sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ car $u_n(x) \sim \frac{1}{n^2}$ terme général d'une série convergente sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^-$.
f est 1-périodique car on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{(n+x)^2} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{(n+x)^2} \\ &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{p=-N}^{N} \frac{1}{(p+1+x)^2} \\ &= f(x+1). \end{aligned}$$

Il y a convergence normale sur $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1/2$ donc, f est bien continue sur $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
Puis en regroupant les termes de la somme donnant f, on obtient

$$\frac{1}{m^2} f\left(\frac{x+p}{m}\right) = \frac{1}{(x+p)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(nm+x+p)^2} + \frac{1}{(nm-x-p)^2}.$$

Or, si $N \in \mathbb{N}$: $N = nm + p$ où n est le quotient, p le reste, et donc, dans la somme ci-dessus, on retrouve tous les entiers N positifs avec $nm + p$ et tous les entiers négatifs avec $nm - p$.
Conclusion : $\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{m^2} f\left(\frac{x+p}{m}\right) = f(x)$.
Remarque : on a en fait $f(x) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}$, cf. *question* (i) page 294.

Solution 4.2.1 On a : $I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \frac{\pi}{2}$, d'où, si l'on note s_N la somme partielle de la série :

$$s_N \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - (-1)^{N+1} \cos^{2N+2} t}{1 + \cos^2 t} \,\mathrm{d}t \to \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2}$$

car $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2N+2} t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} \cos^{2N+2} t\,\mathrm{d}t = I_{2N+2} \to 0.$

Solution 4.2.2 Les fonctions $x \mapsto x^x$ et $x \mapsto x^{-x}$ se prolongent par continuité en 0 par 1 donc il n'y a pas de problème d'intégrabilité.

On écrit : $x^{-x} = e^{-x\ln x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x\ln x)^n}{n!}$ et comme $|x\ln x| \leqslant \dfrac{1}{e}$ sur [0,1], la série converge normalement, on peut intégrer terme à terme (*théorème 5.55 page 253*) donc $I = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^n}$ en utilisant le résultat : $\displaystyle\int_0^1 (x\ln x)^n\,\mathrm{d}x = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$.

En effet, si on pose $I_p = \displaystyle\int_0^1 x^n (\ln x)^p\,\mathrm{d}x$ alors en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= x^n\,\mathrm{d}x & u &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ v &= (\ln x)^p & \mathrm{d}v &= p\frac{(\ln x)^{p-1}}{x} \end{aligned}$$

on a $I_p = \displaystyle\int_0^1 v\,\mathrm{d}u = \underbrace{\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln^p x\right]_0^1}_{=0} - \frac{p}{n+1}\int_0^1 x^n (\ln x)^{p-1}\,\mathrm{d}x$ soit $I_p = -\dfrac{p}{n+1} I_{p-1}$ d'où le résultat annoncé par une simple récurrence.

On fait de même pour J.

Pour avoir J à 10^{-p} près, on utilise le théorème des séries alternées (*théorème 5.33 page 239*) donc le reste est majoré par $\dfrac{1}{n^n}$ si on s'arrête au terme d'ordre $n-1$. Il suffit donc de résoudre l'inéquation $n\ln n \geqslant p\ln 10$.

On peut faire de même pour I, on va majorer le reste d'ordre n par $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{1}{n^k} = \dfrac{1}{n^{n-1}(n-1)}$ qui est du même ordre de grandeur que la majoration précédente.

Pour $p = 10$, il suffit de calculer la somme jusqu'à $n = 9$:

$$I \simeq 1,291285997, \quad J = 0,7834305107.$$

Solution 4.3.1 Sur $I = [a,b]$: $|nxe^{-nx^2}| \leqslant na_1 e^{-na_2^2}$ où $a_1 = \sup(|a|,|b|)$ et $a_2 = \inf(|a|,|b|) \neq 0$ et comme la série $\sum na_1 e^{-na_2^2}$ converge, on a convergence normale ; on peut alors intégrer terme à terme (en utilisant le corollaire 6.10 page 254) :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x e^{-nt^2} nt\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-na^2} - e^{-nx^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-a^2}} - \frac{1}{1-e^{-x^2}}\right)$$

on a donc $f(x) = \dfrac{xe^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2}$ en dérivant la relation obtenue.

Solution 4.3.2

(1) On peut utiliser le théorème de Leibniz d'où $f^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{x\sin t} \sin^k t\,\mathrm{d}t$. f vérifie l'équation différentielle : $xy'' + y' - xy = 2$.

(2) $e^{x\sin t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n \sin^n t}{n!}$: x fixé, on a convergence normale ($\left|\dfrac{x^n \sin^n t}{n!}\right| \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!}$) et donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \int_0^{\pi} \sin^n t \, \mathrm{d}t x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2^{2p}(p!)^2} x^{2p} + \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{[(2p+1)!]^2} x^{2p+1} \right)$$

série entière de rayon infini (en utilisant les intégrales de Wallis).

Solution 4.3.3

(1) Comme $F(x,t) = |1 - x\cos t|^{1/2}$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\pi]$, $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ (théorème de continuité sous le signe intégral *théorème 6.24 page 267*).

(2) On pose $u = \pi - t \Rightarrow f(x) = -\displaystyle\int_{\pi}^{0} |1 + x\cos u|^{1/2} \, \mathrm{d}u = f(-x)$. Puis

$$(1 - x\cos t)^{1/2} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2(2n-1)} x^n \cos^n t$$

(car $|x| < 1 \Rightarrow 1 - x\cos t \geqslant 0$). x fixé, la série converge normalement, on peut alors intégrer terme à terme (corollaire 6.10 page 254) ; d'autre part, si on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n t \, \mathrm{d}t$ alors $I_{2p+1} = 0$ et $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\pi$ (intégrale de Wallis) d'où

$$f(x) = \pi \left(1 - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(4p)!}{(2p)! 2^{6p}(p!)^2(4p-1)} x^{2p} \right).$$

(3) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\cos t}{2}(1 - x\cos t)^{-1/2}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,t) = -\dfrac{\cos^2 t}{4}(1 - x\cos t)^{-3/2}$ sont des fonctions continues pour $(x,t) \in]-1,1[\times[0,\pi]$ donc f est C^2 sur $]-1,+1[$ grâce au théorème de dérivation sous le signe intégral et son corollaire (*théorème 6.26* et *corollaire 6.27 page 268*).
Le calcul ensuite est un peu bestial (!) mais ça marche sans problème. Comme

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{2\sin t}{\sqrt{1 - x\cos t}} \right] \mathrm{d}t = 0$$

on en déduit (1).

(4) En égalant les coefficients de x^{2n+1} on trouve $b_n(16n^2 - 1) = (4n+4)^2 b_{n+1}$...

Solution 4.4.1

(1) On a :

$$\begin{aligned}
\frac{X(1-X)}{n} B_n'(P) &= \sum_{k=0}^{n} P(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} [\underbrace{\frac{k}{n}(1-X) - \frac{n-k}{n}X}_{=\frac{k}{n}-X}] \\
&= \sum_{k=0}^{n} (XP)(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} - X \sum_{k=0}^{n} P(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= B_n(XP) - XB_n(X).
\end{aligned}$$

Grâce à cette relation on obtient : $B_n(1) = 1$, $B_n(X) = X$, $B_n(X^2) = X^2 + \dfrac{X(1-X)}{n}$

(2) La relation $\sum\limits_{k=0}^{n}(k-nX)^2\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k} = nX(1-X)$ est une conséquence directe du 1. En divisant par n^2 cette relation, on peut écrire :

$$\alpha^2 \sum_{k\in A_n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \leqslant \sum_{k\in A_n}(\frac{k}{n}-t)^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}$$

car $\alpha^2 \leqslant \left(\frac{k}{n}-t\right)^2$ pour $k \in A_n$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n}(\frac{k}{n}-t)^2\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} = \frac{t(1-t)}{n}$$

en utilisant la relation du début de cette question

$$\leqslant \frac{1}{4n}$$

d'où $\sum\limits_{k\in A_n}\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k} \leqslant \dfrac{1}{4\alpha^2 n}$.

(3) Traduisons la continuité uniforme de f :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ |\frac{k}{n}-t| < \alpha \Rightarrow |f(t) - f(\frac{k}{n})| \leqslant \varepsilon/2$$

donc

$$|B_n(f)(t) - f(t)| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n}(f(\frac{k}{n}) - f(t))\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}\right| \leqslant \left|\sum_{k\in A_n} + \sum_{k\notin A_n}\right| \leqslant \frac{2\|f\|}{4\alpha^2 n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

on prend $n \geqslant \dfrac{\|f\|}{\alpha^2}$ (indépendant de t). $B_n(f)$ est donc une suite de polynômes convergeant uniformément vers f.

Application : la seule propriété dont la démonstration présente un intérêt est la suivante :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t\right| = 0 \Rightarrow f = 0$$

(les autres étant évidentes). On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_0^1 B_n(f)(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et en passant à la limite sous le signe $\int$ (on a le droit car $B_n(f)f \xrightarrow{CU} f^2$), on aura : $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f = 0$ c.q.f.d.

(4) On se ramène à la situation précédente en posant $f(t) = g(u)$ où $u = \dfrac{t-a}{b-a}$, la suite de polynômes obtenus sera alors :

$$B_n(f)(t) = \frac{1}{(b-a)^n}\sum_{k=0}^{n} f(a\frac{n-k}{n} + b\frac{k}{n})\binom{n}{k}(t-a)^k(b-t)^{n-k}.$$

(5) On considérera le polynôme

$$B_n(P)(X,Y) = \sum_{(k,h)\in[0,n]^2} P(\frac{k}{n},\frac{h}{n})\binom{n}{k}\binom{n}{h}X^k(1-X)^{n-k}Y^h(1-Y)^{n-h}.$$

On trouve les mêmes propriétés qu'au 1., 2., 3. en raisonnant sur les sommes doubles. On pourra alors généraliser ceci à une dimension quelconque.

Solution 4.4.2

(1) On sait tout d'abord que $\deg P_n \leqslant n-1$ mais comme le polynôme P_n est pair, on aura $\deg P_n \leqslant n-2$.

Si on réduit au même dénominateur : $f(x) - P_n(x) = \dfrac{Q(x)}{x^2+\alpha^2}$ alors $\deg Q \leqslant n$ et on connaît toutes les racines de Q qui sont celles de ω_n. On a donc $Q = \lambda\omega_n$. On multiplie alors par $x^2+\alpha^2$ et on remplace x par αi, ce qui donne $\lambda = \dfrac{1}{\omega_n(\alpha i)}$.

(2) On a $\omega_n(1) = \dfrac{1.3\ldots(4m-1)}{(2m)^{2m}} = \dfrac{(4m)!}{(2m)^{2m}2^{2m}(2m)!}$. On utilise alors la formule de Stirling. Ensuite, on écrit que $\ln|\omega_n(\alpha i)| = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \ln\left(\alpha^2 + \left(\dfrac{2k+1}{2m}\right)^2\right)$. En divisant par m, on reconnaît une somme de Riemann. On sait que si f est de classe C^1 alors $n\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - nI_n$, où I_n est une somme de Riemann de f attachée à une subdivision équirépartie, a une limite nulle, il suffit pour cela d'utiliser la formule du point milieu ou une intégration par parties :
on écrit la formule de Taylor avec $f(t) - f(\frac{x+t}{2})$

$$\left|f(t) - f(\frac{x+t}{2}) - \frac{t-x}{2}f'(\frac{x+t}{2})\right| = \left|\int_{\frac{x+t}{2}}^t (t-u)f''(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{(t-x)^2}{8} \sup_{u\in[\frac{x+t}{2},t]} |f''(u)|.$$

Si on pose $g(t) = \displaystyle\int_x^t f(u)\,\mathrm{d}u - (t-x)f(\frac{x+t}{2})$ alors $g'(t) = f(t) - f(\frac{x+t}{2}) - \dfrac{t-x}{2}f'(\frac{x+t}{2})$ donc, en utilisant l'inégalité de la moyenne, on arrive à $|g(t)| \leqslant \dfrac{(t-x)^3}{8} \sup\limits_{u\in[\frac{x+t}{2},t]} |f''(u)|$.

On peut donc majorer

$$\left|\int_{\frac{k}{m}}^{\frac{k+1}{m}} \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{m}\ln(\alpha^2 + (\frac{2k+1}{2m})^2)\right| \leqslant \frac{1}{8m^3}\sup_{[0,1]}|f''(u)|$$

d'où $\left|\displaystyle\int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{m}\ln|\omega(\alpha i)|\right| \leqslant \dfrac{1}{8m^2}\|f''\|_\infty$ ce qui permet de conclure avec $\ln\beta = \dfrac{1}{2}\ln(1+\alpha^2) - 1 + \alpha \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{\alpha}$.

(3) Comme $\ln\beta$ tend vers -1 lorsque α tend vers 0, alors, pour α assez petit, on aura $\dfrac{2}{e\beta} > 1$ et donc, $|f(1) - P_n(1)| \sim C'\left(\dfrac{2}{e\beta}\right)^n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.