

SUITES ET FONCTIONS

1. ESPACES VECTORIELS NORMÉS RÉELS OU COMPLEXES

1.1. Normes et distances.

EXERCICE 1.1.1. I

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$N(x, y) = \int_0^1 |x + ty| dt.$$

Montrer que N est une norme sur \mathbb{R}^2 et représenter la boule unité de \mathbb{R}^2 pour cette norme.

EXERCICE 1.1.2. I

Pour $f \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $N(f) = \left[f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t) dt \right]^{1/2}$.

- (1) Montrer que N est une norme sur $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$.
 - (2) Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
 - (3) Les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
-

EXERCICE 1.1.3. I

E désigne l'ensemble des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, lipschitziennes. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{\substack{(x, y) \in [0, 1]^2 \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \text{ et } N_a(f) = |f(a)| + \sup_{\substack{(x, y) \in [0, 1]^2 \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|.$$

- (1) Montrer que N et N_a sont des normes sur E .
 - (2) Sont-elles équivalentes ? N est-elle équivalente à N_∞ ?
-

EXERCICE 1.1.4. D

Soit $I = \llbracket 1, p \rrbracket$ et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n muni de la norme $\|x\| = \sup_{j \in [1, n]} |\alpha_j|$

$(x = (\alpha_1, \dots, \alpha_n))$.

Montrer que l'on a :

$$\sum_{i \in I} \|x_i\| \leq 2n \sup_{J \subset I} \left\| \sum_{i \in J} x_i \right\|.$$

EXERCICE 1.1.5. D

Si $n \geq 2$, montrer qu'il n'y a pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \|PAP^{-1}\| = \|A\|$.

1.2. Exemples d'étude de suites.

EXERCICE 1.2.1. D

Soit $(\alpha, \beta) \in]0, 1[^2$ tels que $\alpha + \beta = 1$, on pose $f(z) = \alpha z + \frac{\beta}{z}$ définie sur \mathbb{C}^* et on se propose d'étudier la suite définie par $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $z_{n+1} = f(z_n)$.

- (1) Étudier les cas particuliers $z_0 \in \mathbb{R}^*$, $z_0 \in i\mathbb{R}^*$.
 - (2) Déterminer $f(\Pi^+)$ où $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$.
 - (3) Factoriser $\frac{f(z) - 1}{f(z) + 1}$.
 - (4) Faire la synthèse des questions précédentes et préciser dans quels cas la suite est définie pour tout n et dans quels cas la suite converge.
-

EXERCICE 1.2.2. D

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1 + 2E(x) - x}$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

Considérons la suite récurrente suivante : $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$.

Montrer que, lorsque n décrit \mathbb{N} , x_n prend toutes les valeurs rationnelles positives une fois et une seule.

EXERCICE 1.2.3. I Méthode de Richardson

- (1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit $\Delta(P)(X) = P(X + 1) - P(X)$.
 - a) Donner l'expression de $\Delta^p(P)$.
 - b) Montrer que, si $p > \deg P$ alors $\Delta^p(P) = 0$.
 - c) Calculer $\Delta^p(X^p)$.
 - d) Si $R = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle, montrer que $\deg(\Delta(R)) \leq \deg R - 1$.
- (2) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers l , on suppose que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \exists (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k \mid u_n = l + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \dots + \frac{a_k}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

$$\text{Déduire des questions du (1) que } v_n = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} (n+k)^p u_{n+k} = l + O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right).$$

1.3. Topologie d'un espace vectoriel normé.

EXERCICE 1.3.1. F C

Soit A une partie de E espace vectoriel normé, montrer que $\overset{\circ}{A} = A \Leftrightarrow A$ ouvert.

Si B est une autre partie de \mathbb{R} , montrer les propriétés suivantes :

- (i) $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
 - (ii) $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{A \cap B}$.
 - (iii) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$ (il peut ne pas y avoir égalité).
-

EXERCICE 1.3.2. F

Soit E un espace vectoriel normé, on rappelle que la distance d'un point x à un ensemble non vide A est donnée par $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$.

- (1) Si A est fermé, montrer l'équivalence $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.
- (2) Si A et B sont deux ensembles non vides, on pose $k(A, B) = \inf_{(x,y) \in A \times B} d(x, y)$.

Trouver un exemple de deux ensembles fermés A et B de \mathbb{R}^2 tels que $k(A, B) = 0$ et $A \cap B = \emptyset$.

1.4. Étude locale d'une application, continuité.

EXERCICE 1.4.1. I

Soient f et g 2 applications continues de $[a, b]$ dans lui-même vérifiant $f \circ g = g \circ f$.

- (1) Montrer que si $f(x) > g(x)$ pour tout x de $[a, b]$ alors il existe $k > 0$ tel que $f^n(x) \geq kn + g^n(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ (f^n désigne l'itérée n -ième de f).
 - (2) En déduire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = g(x)$.
-

1.5. Applications linéaires continues.

EXERCICE 1.5.1. I

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on suppose que, pour toute suite (x_n) de E tendant vers 0, la suite $f(x_n)$ est bornée.

Montrer que f est continue.

EXERCICE 1.5.2. I

Soit $f \in E^*$ continue, on pose $H = \text{Ker } f$.

Montrer que $d(x, H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$.

1.6. Complétude, compacité.

EXERCICE 1.6.1. I

On prend $E = \mathbb{R}[X]$ et on définit $\left\| \sum_{k=0}^n a_k X^k \right\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$.

- (1) Montrer que $\forall (P, Q) \in E^2, \|P \cdot Q\| \leq \|P\| \cdot \|Q\|$.
 - (2) $(E, \|\cdot\|)$ est-il complet ?
 - (3) Montrer que, si les coefficients de P sont tous positifs, $\|P^k\| = \|P\|^k$.
-

EXERCICE 1.6.2. I

Soit (u_n) une suite d'un espace vectoriel normé E et $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection.

Comparer les valeurs d'adhérence des suites (u_n) et $(u_{\varphi(n)})$.

Étudier le cas où (u_n) est une suite de Cauchy.

EXERCICE 1.6.3. I

Soit K un compact convexe d'intérieur non vide de E espace vectoriel normé de dimension finie, symétrique par rapport à O (i.e. si $x \in K$, $-x \in K$). On définit

$$p(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{\lambda}x \in K\}.$$

Montrer que $p : x \mapsto p(x)$ est une norme.

2. ESPACES VECTORIELS NORMÉS DE DIMENSION FINIE

2.1. Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

EXERCICE 2.1.1. F

Les ensembles suivants :

$$A = \{(-1)^n + 1/n; n \in \mathbb{N}^*\}, B = \{(-1)^{n+1} + 1/n; n \in \mathbb{N}^*\}, C = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right\}_{(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}}$$

sont-ils des fermés de \mathbb{R} ?

EXERCICE 2.1.2. F

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E ; on pose $d(x, F) = a$, montrer qu'il existe $y \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, y)$.

EXERCICE 2.1.3. I

Montrer que tout fermé F de \mathbb{R}^n est une intersection dénombrable d'ouverts.

EXERCICE 2.1.4. I

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, distinct de E .

Montrer qu'il existe y dans E tel que $\|y\| = 1$ et $d(y, F) = 1$.

EXERCICE 2.1.5. D

Soit G un sous-groupe additif de \mathbb{R}^n , fermé et non discret (i.e. il existe $x \in G$ limite d'une suite (x_n) où les (x_n) sont tous distincts).

Montrer que G contient au moins une droite.

EXERCICE 2.1.6. I C

Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

EXERCICE 2.1.7. I C

Soit A la matrice de $f \in \mathcal{L}\mathcal{C}(E, F)$ rapportée aux bases $(e_i)_{i \in [1, n]}$, $(\varepsilon_j)_{j \in [1, p]}$ de E et F , e.v. de dimension finie. Calculer $\|f\|$ dans les cas suivants :

- (1) E et F munis de la norme euclidienne ((e_i) et (ε_j) bases orthonormées). On utilisera la réduction des matrices symétriques positives (voir le *corollaire 4.8 page 204* et la *remarque 4.2.5 (ii) page 204*).
- (2) E et F munis de la norme 1 : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ (sur E) et $\|y\|_1 = \sum_{j=1}^p |y_j|$ (sur F).
- (3) E et F munis de la norme ∞ : $\|x\|_\infty = \sup_{i \in [1, n]} |x_i|$ et $\|y\|_\infty = \sup_{j \in [1, p]} |y_j|$.

EXERCICE 2.1.8. I

Soit M une matrice diagonalisable à coefficients complexes, on pose $R_M = \sup_{\lambda \in \text{Sp}(M)} |\lambda|$. $X \mapsto$

$\|X\|$ étant une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour $p \geq 1$, on pose : $f_p(M) = \|M^p\|^{1/p}$.

Montrer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} f_p(M) = R_M$.

Remarque : cet exercice est à rapprocher de l'exercice 2.1.12 concernant le rayon spectral.

EXERCICE 2.1.9. I C

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ soit bornée. On pose pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$B_p = \frac{1}{p} \sum_{k \in [0, p-1]} A^k.$$

- (1) Montrer que $(B_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ admet une valeur d'adhérence B telle que $B^2 = B$.
- (2) Montrer que $\text{Ker}(A - I) \oplus \text{Im}(A - I) = \mathbb{C}^n$.

EXERCICE 2.1.10. I

Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont toutes distinctes est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

EXERCICE 2.1.11. I

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E .

- (1) Montrer que $E = F \oplus F^\perp$.
- (2) Soit u un endomorphisme orthogonal de E , montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (\text{Id} + u + \dots + u^{n-1}) = g$ où g est la projection orthogonale sur le noyau de $\text{Id} - u$.

EXERCICE 2.1.12. D

Cet exercice fait appel aux résultats du chapitre 3 sur la réduction des endomorphismes.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Trouver une C.N.S. sur les éléments propres de A pour que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

- On utilisera le lemme des noyaux (cf *théorème 3.1 page 189*),
- le théorème de Cayley-Hamilton (cf *théorème 3.6 page 192*)

- le fait que toute matrice trigonalisable A peut s'écrire sous la forme $A = D + N$ où D est une matrice diagonalisable, N une matrice nilpotente et surtout $ND = DN$. (ce résultat qui n'est plus au programme s'appelle la décomposition de Dunford)
- on utilisera enfin le résultat suivant :

$$\text{si } \dim E_{\lambda_i} = m_i \text{ alors } \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \text{Id})^{m_i} = E_{\lambda_i}$$

où \mathcal{A} est l'endomorphisme de \mathbb{C}^n de matrice A .

Remarque : cet exercice complète l'exercice 2.1.8.

EXERCICE 2.1.13. D

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que :

$$P^{-1}MP = A + B$$

avec A diagonale de mêmes valeurs propres que M et $\|B\| \leq \varepsilon$.

2.2. Connexité par arcs.

EXERCICE 2.2.1. I

Soit E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré n au plus, on utilise la norme $\|P\| = \sup_{x \in [-1, +1]} |P(x)|$.

(1) Montrer que la boule unité fermée B est convexe et compacte.

(2) Soit $P \in B$ et $P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$ avec $(P_1, P_2) \in B^2$. On suppose que

$$\exists x_0 \in [-1, +1], P(x_0) = 1, P^{(k)}(x_0) \neq 0 \text{ et pour tout } m \in [1, k-1], P^{(m)}(x_0) = 0.$$

Montrer que $P_1(x_0) = P_2(x_0) = 1$ et, pour tout $m \in [1, k-1]$, $P_1^{(m)}(x_0) = P_2^{(m)}(x_0) = 0$.

(3) Montrer, par un contre-exemple que B n'est pas strictement convexe (i.e. qu'il existe P, P_1, P_2 situés sur la frontière de B tels que l'on ait $P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$ avec $P_1 \neq P_2$).

(4) On dit qu'un élément d'un ensemble convexe C est extrémal ssi

$$\text{si } P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \text{ avec } P_1 \text{ et } P_2 \text{ dans } C \text{ alors } P = P_1 = P_2.$$

Si $n = 2p$, chercher les éléments extrémaux de B sous la forme $P = 1 + \lambda(x - x_0)^{2p}$ où $x_0 \in]-1, +1[$.

3. SÉRIES D'ÉLÉMENTS D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

3.1. Suites et séries.

EXERCICE 3.1.1. F

Nature et somme des séries de terme général :

$$(1) u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx$$

$$(2) u_n = \frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{n}.$$

EXERCICE 3.1.2. INature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.**3.2. Séries de nombres réels positifs.**EXERCICE 3.2.1. F CSoit (u_n) une suite décroissante et positive.Montrer que, si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$.

Étudier la réciproque.

EXERCICE 3.2.2. F

Trouver un équivalent simple de

$$U_n = \sum_{q=1}^n q^\alpha$$

(prendre $u_n = n^\alpha$ et $v_n = \int_{n-1}^n t^\alpha dt$) puis, en supposant $\alpha > 0$, de

$$\sum_{q=1}^n q^\alpha - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

EXERCICE 3.2.3. F CNature de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = 1 - (n + \frac{1}{2}) \ln(1 + \frac{1}{n})$.En déduire que la suite $v_n = \frac{e^n n!}{n^{n+1/2}}$ converge vers une limite positive.EXERCICE 3.2.4. I CNature et somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - 4n + 2}{n!}$.On pose $S_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^p}{n!}$, trouver une formule de récurrence permettant de calculer S_p ; en déduire les valeurs de S_{15} et de S_{20} .EXERCICE 3.2.5. I CSoit (a_n) une suite de réels positifs telle que $\sum a_n$ converge ; soit $a = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et

$$r_n = a - s_n.$$

Montrer l'équivalence :

$$\sum na_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum r_n \text{ converge.}$$

EXERCICE 3.2.6. I

Nature des séries de terme général :

1. $u_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^2} - e^{-1/6}$
 2. $u_n = \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \pi/n}{\cos \pi/n}\right)$
 3. $u_n = n^{-\tan(\pi/4+1/n)}$
 4. $u_n = \operatorname{Arccos} \frac{n^3 + 1}{n^3 + 2}$
 5. $u_n = \left(n \sin \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$
 6. $u_n = \sqrt[3]{n^3 + an} - \sqrt{n^2 + 3}$
 7. $u_n = \operatorname{Arccos} \frac{1}{n} - \operatorname{Arccos} \frac{1}{n^2}$
-

EXERCICE 3.2.7. I

Soit p_n le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n .

Étudier la série de terme général : $u_n = n^{-p_n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

EXERCICE 3.2.8. I

Soit $s_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^n}$ définie pour $n \geq 2$.

Étudier la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{s_n}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

EXERCICE 3.2.9. I

On note S l'ensemble des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $[1, +\infty[$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $f_n : [1, +\infty[^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ et la récurrence :

$$f_1(x) = \sqrt{1+x}, f_n(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{1+x_1 f_{n-1}(x_2, \dots, x_n)}.$$

(1) Montrer que pour tout $x \in S$ on a :

$$\prod_{k=1}^n x_k^{2^{-k}} \leq f_n(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{k=1}^n (1+x_k)^{2^{-k}}.$$

(2) Montrer que la suite $(f_n(x_1, \dots, x_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de même nature que la série $\sum \frac{1}{2^n} \ln x_n$.

EXERCICE 3.2.10. I

Soit la suite (u_n) définie par $0 < u_0 < \frac{\pi}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \sin u_n$ pour tout n de \mathbb{N} .

Montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $u_n \sim \frac{k}{2^n}$.

EXERCICE 3.2.11. D

Soit f un homéomorphisme de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^* tel que la série $\sum \frac{1}{f(n)}$ converge.

(1) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = 0$.

(2) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k \in \mathbb{N}^*, f(k) \leq n} f(k) = 0$.

EXERCICE 3.2.12. D

Soit (u_n) une suite réelle positive, on définit

$$v_n = \frac{1}{n}(u_n + \cdots + u_{2n-1}) \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

Comparer les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

EXERCICE 3.2.13. F

Exprimer chacun des développements décimaux périodiques comme un nombre rationnel :

$$a = 0,34\ 251\ 251\ \dots, \quad b = 1,702\ 702\ \dots, \quad c = 0,076923\ 076923\ \dots$$

(sous forme irréductible).

EXERCICE 3.2.14. I

Soit (u_n) une suite strictement décroissante de limite nulle. On pose $v_n = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n}$.

Montrer que $\sum v_n$ diverge.

EXERCICE 3.2.15. I

Soit (a_n) une suite de réels positifs et (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$.

Montrer l'équivalence (u_n) converge $\Leftrightarrow \sum a_n$ converge.

EXERCICE 3.2.16. I

Nature et somme de la série $\sum \frac{b_n}{n(n+1)}$ où b_n désigne la somme des chiffres de l'écriture en base 2 de n .

3.3. Sommation des relations de comparaison.

EXERCICE 3.3.1. F

(1) Montrer que la suite de terme général $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ est convergente.

(2) En déduire la somme de la série de terme général : $u_n = \frac{1}{n(4n^2 - 1)}$.

EXERCICE 3.3.2. I C

Nature de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \ln \left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}} \right)$.

EXERCICE 3.3.3. I

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs.

Étudier les séries $\sum b_n$ et $\sum c_n$ selon la nature de la série $\sum a_n$ où l'on a posé : $b_n = \frac{a_n}{1+a_n}$ et $c_n = \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$.

EXERCICE 3.3.4. I

(1) Étude de la suite (a_n) où $a_n = \left(\cos \frac{1}{n^\alpha}\right)^n$ $\alpha > 0$.

(2) Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$: nature de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - l)$.

EXERCICE 3.3.5. I

Nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = e^{-n^\alpha} \int_0^n e^{t^\alpha} dt$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.4. Comparaison d'une série à une intégrale.

EXERCICE 3.4.1. F

Étudier la convergence et la convergence absolue de la série $\sum u_n$ où

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t \sin t}{1+t^2} dt.$$

EXERCICE 3.4.2. I

Étudier la série $\sum u_n$ où $u_n = (-1)^n n^\alpha \int_0^{1/n} \frac{\ln t}{1+t} dt$.

EXERCICE 3.4.3. I

(1) Étudier la série $\sum u_n$ où $u_n = \frac{\ln n}{n} - \int_{n-1/2}^{n+1/2} \frac{\ln t}{t} dt$, $n \geq 2$.

(2) En déduire que la suite $v_n = n^{-\frac{1}{2} \ln n} \prod_{q=1}^n q^{1/q}$ converge.

EXERCICE 3.4.4. D C

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ; on pose $s_n = \sum_{k=0}^n u_k$, $u_0 > 0$.

(1) Montrer l'équivalence $(\sum u_n \text{ converge}) \Leftrightarrow \left(\sum \frac{u_n}{s_n} \text{ converge}\right)$.

(2) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, étudier la convergence de $\sum \frac{u_n}{(s_n)^\alpha}$ (dans le cas où $\sum u_n$ diverge, on montrera

que $v_n = \frac{s_n - s_{n-1}}{(s_n)^\alpha} \leq \int_{s_{n-1}}^{s_n} \frac{dt}{t^\alpha}$ ($\alpha > 1$)).

3.5. Séries d'éléments d'un e.v.n. de dimension finie.

EXERCICE 3.5.1. F C

Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{k}$ soit convergente.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)$

EXERCICE 3.5.2. I

Dans E_3 espace euclidien orienté de dimension 3, on donne un vecteur $\vec{r} \neq \vec{0}$ et on considère la suite (\vec{x}_n) définie par $\vec{x}_0 \in E_3$ et $\forall n \geq 1, \vec{x}_n = \vec{r} \wedge \vec{x}_{n-1}$.

Nature et somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \vec{x}_n = R(\vec{x}_0)$.

Montrer que $R : \vec{x}_0 \mapsto R(\vec{x}_0)$ est une rotation à préciser.

EXERCICE 3.5.3. D

Soit (u_n) une suite de complexes telle que $|u_n| \leq \frac{A}{n}$.

On pose $s_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k$ ($s_0 = 0$ et $s_1 = 0$) et $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k$.

Montrer que, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \sigma$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sigma$.

EXERCICE 3.5.4. D

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{C} et $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$

existe. On pose $u_n = \|T^n\|^{1/n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Montrer que la suite (u_n) converge vers $l = \inf_{n \geq 1} u_n$. l est appelé rayon spectral de l'endomorphisme T .
 - (2) Si $l < 1$, montrer que $I - T$ est inversible.
 - (3) Question MP* : que penser si l'on suppose seulement E espace de Banach ?
-

EXERCICE 3.5.5. F

Soit (a, b) un couple de réels strictement positifs (a, b) , étudier la convergence des séries doubles

- (1) $\left(\frac{1}{a^p + b^q} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$
 - (2) (e^{-ap-bq}) .
-

EXERCICE 3.5.6. I

Soient α et β deux réels strictement positifs, montrer l'équivalence des trois propriétés :

- (i) $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{p+q}{(1+p^\alpha)(1+q^\beta)}$ est convergente.
- (ii) $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{p+q}{(1+p)^\alpha(1+q)^\beta}$ est convergente.

(iii) $\alpha > 2, \beta > 2$.

EXERCICE 3.5.7. I

On définit la fonction ζ (zéta) de Riemann par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On vérifie que cette fonction est définie pour $x > 1$. On rappelle que γ est la constante d'Euler définie par

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

- (1) Prouver que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n} = 1 - \gamma$.
- (2) Prouver que $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} = \gamma$.

On utilisera le développement $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ valable pour $|x| < 1$, cf. *exemples de D.S.E. page 285*.

EXERCICE 3.5.8. I

Soit $|z| < 1$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}_+^3$, montrer les égalités

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{bn}}{1 - z^{an+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{cn}}{1 - z^{an+b}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{bn}}{1 + z^{an+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{cn}}{1 - z^{an+b}}$$

EXERCICE 3.5.9. I

Montrer l'identité pour $|x| < 1$ et $|a| < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{a^n}{1 + x^2 a^{2n}} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{2p} e^{a^{2p+1}}.$$

EXERCICE 3.5.10. I

Montrer la convergence et calculer la somme $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{p!q!}{(p+q+2)!}$.

EXERCICE 3.5.11. D

On reprend l'exercice 1.6.1, sur $E = \mathbb{R}[X]$ on a défini $\left\| \sum_{k=0}^n a_k X^k \right\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$. On pose $\overline{\mathbb{R}}[X] = \{(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum |a_n| C\}$. Un élément de $\overline{\mathbb{R}}[X]$ sera noté $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$.

- (1) Montrer que $\|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ permet de munir $\overline{\mathbb{R}}[X]$ d'une structure d'espace vectoriel normé.
- (2) Montrer que $(\overline{\mathbb{R}}[X], \|\cdot\|_1)$ est une algèbre de Banach (étendre la définition du produit de 2 polynômes).
- (3) Que dire de $\overline{\mathbb{R}}[X]$ par rapport à E ?

4. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

4.1. Convergence simple, uniforme, normale.

EXERCICE 4.1.1. F

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I , à valeurs dans \mathbb{R} , continues. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f .

On pose $g_n = \frac{f_n}{1 + f_n^2}$; que dire de la convergence de la suite (g_n) ?

Plus généralement, quelle condition imposer à φ pour que la suite $g_n = \varphi(f_n)$ converge uniformément vers $\varphi(f)$?

EXERCICE 4.1.2. F

Trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dt}{1 + t + \dots + t^n}$.

EXERCICE 4.1.3. I

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions ci-dessous, en précisant à chaque fois les domaines de convergence simple et les domaines de convergence uniforme :

$$1. f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1} \qquad 2. f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n^a}{n^2 + 1} x e^{-nx}, a \in \mathbb{R}$$

$$3. f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin \sqrt{x + 4n^2 \pi^2} \qquad 4. f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin \frac{n+1}{n} x$$

$$5. f_n :]0, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin x \cos^n x}{1 - \cos x} \qquad 6. f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \exp[(1 - i)nx]$$

$$7. f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha e^{-nx^2}, \alpha \geq 0 \qquad 8. f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} 1_{[0, n]}$$

où $1_{[0, n]}$ est la fonction indicatrice de $[0, n]$.

EXERCICE 4.1.4. I

Soit (P_n) la suite de polynômes définie par $P_0 = 0$ et la formule de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{2} [x + 2P_n(x) - P_n^2(x)].$$

Montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2 + n\sqrt{x}}$$

et en déduire que la suite (P_n) converge uniformément sur $[0, 1]$ vers \sqrt{x} .

Trouver alors une suite de polynômes (Q_n) qui converge uniformément vers $|x|$ sur $[-1, +1]$.

EXERCICE 4.1.5. I C

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$; $\forall n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. On suppose que la suite (f_n) converge simplement vers $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sur l'intervalle $[a, b]$ et on suppose f continue.

Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$. C'est un théorème de Dini.

(On cherchera $m_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ tel que $|x - x'| \leq \frac{b-a}{m} \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ puis N tel que $\forall n \geq N$:

$$\sup_{i \in [0, m]} |f(x_i) - f_n(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ où } x_i = a + i \frac{b-a}{m}.)$$

EXERCICE 4.1.6. I

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et (P_n) une suite de polynômes de $\mathbb{C}_p[X]$. On suppose que la suite (P_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction P .

Montrer que P est polynomiale ($P \in \mathbb{C}_p[X]$) et que la convergence de (P_n) vers P est uniforme sur tout segment $[-A, +A]$ où $A > 0$.

EXERCICE 4.1.7. I C

Soit a et b des réels ($a < b$) et (f_n) une suite de fonctions de classe C^1 de $[a, b]$ dans \mathbb{C} . On suppose qu'il existe un nombre $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [a, b]$, $|f'_n(t)| \leq M$.

- (1) Montrer que, si la suite (f_n) converge simplement sur $[a, b]$ alors elle converge uniformément sur $[a, b]$.
 - (2) Cette propriété subsiste-t-elle sur un intervalle non borné ?
-

EXERCICE 4.1.8. F

Pour $x \in]-\pi/2, +\pi/2[$ déterminer la nature et la somme de la série de fonctions de terme général

$$u_n = \ln \left(\cos \frac{x}{2^n} \right).$$

EXERCICE 4.1.9. F

On définit la fonction $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

- (1) Quel est l'ensemble de définition de F .
 - (2) On pose $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, trouver une relation entre F et g .
 - (3) Trouver $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)g(x)$.
 - (4) Donner enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
-

EXERCICE 4.1.10. F

On définit la suite de fonctions $(u_n(x))$ par :

$$u_0(x) = \cos x \text{ et pour } n \in \mathbb{N}^* : u_n(x) = (\sin x)^n \cos x.$$

Nature et somme de la série $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Étude du mode de convergence.

EXERCICE 4.1.11. F

Chercher le domaine de convergence sur \mathbb{C} de la série de fonctions :

$$u_n(z) = \frac{(z+1)^n}{n^2 a^n (z-1)^n}$$

Y-a-t-il convergence uniforme sur le domaine de convergence ?

EXERCICE 4.1.12. F

Soit F une fonction positive décroissante et $(u_n(x))$ la suite de fonctions définie par la relation $u_n(x) = F(n) - F(n+x)$, on suppose de plus que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

- (1) Étudier la convergence de $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ sur $[0, 1]$.

Montrer que $g(x+1) = g(x) + F(x)$; étudier alors la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ sur \mathbb{R} .

- (2) Étudier la convergence uniforme de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ sur tout intervalle $[a, b]$.
 (3) Que peut-on dire de g si F est continue ?
 (4) Montrer qu'il existe un réel a et un seul tel que la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = g(x) - F(x-1) - ax$$

vérifie $\varphi(x+1) = \varphi(x) + F(x-1)$.

EXERCICE 4.1.13. I

On considère les 2 séries de fonctions : $u_n(x) = e^{-n^2 x}$ et $v_n(x) = x e^{-n^2 x}$.

- (1) Chercher leur domaine de convergence.
 (2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} x e^{-n^2 x}$.

EXERCICE 4.1.14. I C

On considère une famille de nombres complexes $(c_{n,k})_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ et une série $\sum a_k$ à termes positifs, convergente.

On suppose que l'on a :

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, |c_{n,k}| \leq a_k \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} c_{n,k} = c_k.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} c_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k$.

4.2. Intégration sur un segment des suites de fonctions continues.

EXERCICE 4.2.1. I

- (1) On pose $u_n(x) = (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}$, montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge sur \mathbb{R} .
 (2) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t}$ est absolument intégrable sur $[0, +\infty[$, $x \in \mathbb{R}$.

(3) Montrer que $\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} dt = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos xt dt + R_n(x)$ où

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t} \frac{\cos xt}{1 + e^{-2t}} dt.$$

(4) En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} dt.$

4.3. Approximation des fonctions d'une variable réelle.

EXERCICE 4.3.1. I

Soit Ω un ensemble :

- Une σ -algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{P}(\Omega)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$ stable par réunion quelconque et par complémentation contenant \emptyset (et Ω en conséquence).
- P une mesure de chaque ensemble de \mathcal{A} telle que $P(\Omega) = 1$ i.e. une application de \mathcal{A} dans $[0, 1]$ telle que $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$, P croissante (i.e. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$). On dit que (Ω, \mathcal{A}, P) est un espace de probabilité.
- Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$ prenant un nombre fini de valeurs telle que $\forall k \in \mathbb{R}$, $\{x \in \Omega \mid f(x) = k\} \in \mathcal{A}$, on pose $P(f(x) = k) = \varphi_k$, on note $V(\Omega)$ l'ensemble des fonctions définies ainsi. On remarque alors que $\sum_{k \in f(\Omega)} \varphi_k = 1$. f est dite variable aléatoire.
- Soit $L^1(\Omega)$ l'ensemble des $f \in V(\Omega)$ telles que $\sum_{k \in f(\Omega)} k \varphi_k$ existe. On note $E(f)$ (espérance de f) ce nombre. On définit aussi $\operatorname{Var}(f) = E[(f - E(f))^2]$ la variance de f pour $f \in L^1(\Omega)$.
- On dit enfin que f_1, f_2, \dots, f_m sont des variables aléatoires indépendantes ssi

$$P(f_1(x) = k_1, f_2(x) = k_2, \dots, f_m(x) = k_m) = \prod_{i=1}^m P(f_i(x) = k_i).$$

pour tout m -uplet de réels.

(1) Montrer que si les (f_i) sont indépendantes alors $\forall (Q_i) \in \mathbb{R}[X]^m$,

$$E\left(\prod_{i=1}^m Q_i(f_i)\right) = \prod_{i=1}^m E(Q_i(f_i)) \text{ et } \operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^m f_i\right) = \sum_{i=1}^m \operatorname{Var}(f_i).$$

(2) Inégalité de Bienaymé-Chebychev :

soit $f \in L^1(\Omega)$, montrer que $\operatorname{Var}(f) \geq \alpha^2 \sum_{|k-E(f)| \geq \alpha} P(f = k)$ pour α réel.

(3) Application :

a) Soit $f \in V(\Omega)$ telle que $f_0 = 1 - t$, $f_1 = t$. On considère n variables aléatoires f_1, f_2, \dots, f_n indépendantes et de même loi de probabilité que f .

Montrer que $P(f_1 + f_2 + \dots + f_n = k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$.

b) En déduire que $\sum_{k=0}^n (k - nt)^2 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = nt(1-t)$ et que

$$\sum_{|k-nt| \geq n\alpha} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leq \frac{1}{4\alpha^2 n}.$$

- c) Pour toute fonction continue sur $[0, 1]$, on pose $B_n(f)(t) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$.
Montrer que la suite $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

Indication 1.1.1 N est une norme : c'est immédiat. Pour la boule unité, se ramener au calcul de $N(\alpha, 1)$ et distinguer les cas (en fait, on peut aussi donner une expression de $\int_0^1 |x + ty| dt$).

Indication 1.1.2 (1) penser à une norme euclidienne. (2) Cauchy-Schwarz. (3) prendre la suite $f_n(x) = x^n$.

Indication 1.1.3 (1) N et N_a sont des normes (vérification immédiate). (2) Les 2 normes sont équivalentes mais N n'est pas équivalente à N_∞ (prendre $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$).

Indication 1.1.4 Partitionner $\llbracket 1, 2n \rrbracket$ en sous-ensembles où $\|x_i\| = \pm \alpha_{ik}$ puis faire la somme.

Indication 1.1.5 Commencer par $n = 2$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, A et λA sont semblables puis généraliser.

Indication 1.2.1

- (1) On étudie en fait des suites récurrentes réelles. On montre que si $z_0 \in \mathbb{R}^*$ alors la suite converge et que si $z_0 \in i\mathbb{R}^*$, la suite diverge.
- (2) $f(\Pi^+) = \Pi^+$ par double inclusion.
- (3) On trouve $\frac{f(z)-1}{f(z)+1} = \frac{z-1}{z+1} \frac{z-\frac{\alpha}{\beta}}{z+\frac{\alpha}{\beta}}$.
- (4) Si $z_0 \in i\mathbb{R}$ alors la suite diverge (et les termes de la suite ne sont pas forcément tous définis), sinon la suite converge (étudier le rapport $\frac{f(z)-1}{f(z)+1}$ et montrer que si $z_0 \in \Pi^+$ alors la suite converge vers 1). On pourra s'aider d'un petit programme pour constater les différents comportements.

Indication 1.2.2 Construire un arbre selon le modèle : le noeud (a, b) possède comme branche gauche $(a, a+b)$ et comme branche droite $(a+b, b)$, poser $x(n)$ le n -ième noeud obtenu en lisant l'arbre de haut en bas et de gauche à droite. Montrer que l'on obtient tous les couples (a, b) d'entiers premiers entre-eux et qu'en fait $x_n = \frac{a}{b}$ où $x(n) = (a, b)$.

Indication 1.2.3

- (1) a) On trouve $\Delta^p(P)(X) = \sum_{k=0}^p (-1)^{n-k} \binom{p}{k} P(X+k)$
b) Montrer que $\deg \Delta(P) \leq \deg P - 1$.
c) Faire intervenir la base de Hilbert $e_i(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-i+1)}{i!}$, prouver que $\Delta e_i = e_{i-1}$ et exprimer X^p dans cette base.
d) Réduire au même dénominateur...
- (2) On applique ce que l'on vient de voir au polynôme $P = a_1 X^{p-1} + a_2 X^{p-2} + \dots + a_p$ et à la fraction rationnelle $\frac{a_{p+1}}{X} + \dots + \frac{a_{2p}}{X^p}$.

Indication 1.3.1 La première question : c'est du cours ! (i) immédiat, (ii) montrer qu'un ouvert contenu dans $A \cap B$ s'écrit comme intersection d'un ouvert contenu dans A et d'un ouvert contenu dans B . (iii) inclusion immédiate, penser à donner un contre-exemple où on n'a pas égalité.

Indication 1.3.2 La première question : utiliser la caractérisation de l'adhérence. Pour la deuxième, prendre des ensembles non bornés.

Indication 1.4.1 (1) prendre $h(x) = f(x) - g(x)$ puis faire une récurrence. (2) Immédiat par l'absurde.

Indication 1.5.1 Si $x_n \rightarrow 0$ prendre une suite (y_n) qui s'exprime en fonction de x_n , qui tend vers 0, telle que $x_n = o(y_n)$.

Indication 1.5.2 Il est facile de prouver que $|f(x)| \leq \|f\| d(x, H)$.

Soit $\varepsilon > 0$, prendre $a \in S(0, 1)$ tel que $|f(a)| \geq \|f\| - \varepsilon$ et en déduire l'inégalité dans l'autre sens.

Indication 1.6.1

- (1) Immédiat par l'inégalité triangulaire.
- (2) Prendre la suite $R_n = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k(k+1)}$.
- (3) On a égalité dans l'inégalité triangulaire puis on récurse.

Indication 1.6.2 (u_n) et $(u_{\varphi(n)})$ ont mêmes valeurs d'adhérence (montrer l'inclusion dans un sens puis raisonner par symétrie). Si (u_n) est une suite de Cauchy, il en est de même de $(u_{\varphi(n)})$.

Indication 1.6.3 Montrer que p est bien définie puis, si $p(x) \neq 0$ alors $\frac{x}{p(x)} \in K$. Montrer enfin que p vérifie les 3 axiomes de la norme en utilisant que K est borné, K est symétrique, K est convexe.

Indication 2.1.1 Aucun n'est fermé, A et B car 1 est valeur d'adhérence et n'est pas dans l'ensemble, pour C , c'est la même chose avec 0.

Indication 2.1.2 Utiliser la compacité de $\bar{B}(x, a+1) \cap F$.

Indication 2.1.3 Montrer que $\{x \in \mathbb{R}; d(x, F) < 1/p\}$ est un ouvert.

Indication 2.1.4 Montrer que pour tout $x \in E \setminus F$ il existe $t \in F$ tel que $d(x, t) = d(x, F)$ et poser $y = \frac{x-t}{\|x-t\|}$.

Indication 2.1.5 Montrer que 0 est un point d'accumulation de G (i.e. tout voisinage de 0 contient un élément de G distinct de 0), prendre $x_n \rightarrow 0$ et extraire une suite convergente vers a de $(\frac{x_n}{\|x_n\|})$ et montrer que G contient $\mathbb{R}a$.

Indication 2.1.6 Considérer $\det(A + \varepsilon I_n)$.

Indication 2.1.7 On trouve (1) $\|f\| = \max\{\lambda \in \text{Sp}(A^T A)\}$, (2) $\|f\| = \sup_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} (\sum_{i=1}^p |a_{ij}|)$, (3) $\|f\| = \sup_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket} (\sum_{j=1}^n |a_{ij}|)$.

Indication 2.1.8 Prendre la norme infinie dans une base de vep et on utilise l'équivalence des normes en dimension finie.

Indication 2.1.9

- (1) Extraire de la suite (B_p) une suite qui converge vers B vérifiant $B(A - I) = 0$ et prouver que $B^2 = B$.
- (2) Montrer que $\text{Im}(A - I) \subset \text{Ker } B$ et $\text{Ker}(A - I) \subset \text{Ker}(B - I)$.

Indication 2.1.10 Prendre la norme $\|A\| = n \sup_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |a_{ij}|$, utiliser le fait que toute matrice sur \mathbb{C} est trigonalisable.

Indication 2.1.11

- (1) Voir le *théorème 4.2 page 201*.
- (2) Voir l'exercice 2.1.9.

Indication 2.1.12 L'utilisation de la réduite de Jordan rend ce résultat quasiment trivial...

Indication 2.1.13 Faire une récurrence sur n ou prouver la propriété directement en trigonalisant M et en prenant une base de vecteurs propres fonction de ε .

Indication 2.2.1

- (1) Théorème du cours...
- (2) Remarquer que $1 - P_1$ et $1 - P_2$ sont positives et utiliser un D.L. en x_0 .
- (3) Prendre par exemple $P_1 = 1, P_2 = x^2$.
- (4) On trouve $P = 1 - \frac{1}{(1+|x_0|)^{2p}}(x - x_0)^{2p}$ où x_0 un élément de $[-1, 1]$.

Indication 3.1.1

- (1) Utiliser les intégrales de Wallis et faire le calcul de la somme avec un logiciel.
- (2) Regrouper les termes par 4.

Indication 3.1.2 Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{|u_n|} = +\infty$ et que $\ln \frac{1}{|u_{n+1}|} - \ln \frac{1}{|u_n|} > 0$.

Indication 3.2.1 Utiliser l'encadrement $0 \leq nu_{2n} \leq nu_{2n-1} \leq u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n-1}$, pas de réciproque.

Indication 3.2.2 C'est une conséquence immédiate du théorème de sommation des relations de comparaison.

Indication 3.2.3 Faire un développement limité en $\frac{1}{n}$, puis étudier la suite $\ln v_{n+1} - \ln v_n = u_n$;

Indication 3.2.4 On obtient $S_p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} S_k$ et, avec un programme simple on trouve $S_{15} = 1382958545e$ et $S_{20} = 51724158235372e$.

Indication 3.2.5 Poser $S_n = \sum_{p=1}^n pa_p$ et montrer que $S_n = R_{n-1} - nr_n$ où $R_{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} r_p$ (écrire $S_n = \sum_{p=1}^n p(r_{p-1} - r_p) = \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)r_p - \sum_{p=1}^n pr_p = R_{n-1} - nr_n$).

Indication 3.2.6 On fait des recherches d'équivalents, on trouve que les séries (1), (2) et (4) convergent, (6) converge ssi $a \neq \frac{9}{2}$, (5) converge ssi $\alpha > 2$, les autres divergent.

Indication 3.2.7 Montrer que $p_n \sim \log n$ (log en base 10 de n).

Indication 3.2.8 Remarquer que : $\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^{n+1}} \leq \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n}$.

Indication 3.2.9

- (1) Faire une récurrence.
- (2) Montrer par récurrence que la suite $u_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$ est croissante, la comparer à la suite $\sigma_n = \sum \frac{1}{2^n} \ln x_n$ et écrire que $\ln(1 + x_n) \leq \ln(2x_n)$.

Indication 3.2.10 Utiliser l'encadrement $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ pour $x > 0$ puis montrer, en posant $v_n = \frac{u_n^2}{6}$ que la série aux différences $\sum v_n - v_{n+1}$ converge.

Indication 3.2.11

- (1) Montrer que f est croissante puis utiliser l'encadrement $0 \leq \frac{x}{f(x)} \leq \frac{2n+1}{f(2n)}$.
- (2) Utiliser l'inégalité $\text{Card}\{k | f(k) \leq n\} \leq f^{-1}(n)$ et le (1).

Indication 3.2.12 Réécrire la somme partielle des v_n sous la forme $\sum_{p=1}^{2n-1} u_p x_p$ et majorer x_p .

Indication 3.2.13 On trouve $a = \frac{34217}{99900}$, $b = \frac{63}{37}$, $c = \frac{25642}{333333}$.

Indication 3.2.14 Distinguer les cas $v_n \not\rightarrow 0$ et $v_n \rightarrow 0$. Dans le dernier cas, utiliser un équivalent de v_n à l'aide de logarithme.

Indication 3.2.15 Utiliser la relation $a_n = u_n(u_{n+1} - u_n)$ et encadrer a_n .

Indication 3.2.16 $b_n \leq \frac{\ln n}{\ln 2} + 1$ qui assure la convergence puis remarquer que $b_{2k+1} = b_{2k} + 1$ et $b_{2k} = b_k$ pour montrer que la somme vaut $2 \ln 2$.

Indication 3.3.1

- (1) Écrire un D.L. de $c_n - c_{n-1}$.
- (2) Montrer que la somme partielle de u_n vaut $2(\ln(2n) + c_{2n}) - 2(\ln n + c_n) + \frac{1}{2n+1} - 1$.

Indication 3.3.2 Écrire $u_n = \ln \alpha_n + \ln \beta_n$ où $\alpha_n = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\beta_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+a}}$.

Indication 3.3.3 $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature, $\sum c_n$ converge indépendamment de a_n .

Indication 3.3.4 Écrire un D.L. en $\frac{1}{n}$ de $\ln a_n$, $\sum a_n$ converge ssi $\alpha > 1$.

Indication 3.3.5 Distinguer les cas $\alpha < 0$, $\alpha = 0$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha = 1$, $1 < \alpha \leq 2$ et $\alpha > 2$.

Indication 3.4.1 Se ramener sur $[0, \pi]$ par changement de variable puis prouver que $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge.

Indication 3.4.2 Comparer $\int_0^{1/n} \frac{\ln t}{1+t} dt$ à $\int_0^{1/n} \ln t dt$ pour avoir un développement asymptotique à 2 termes de $|u_n|$.

Indication 3.4.3

- (1) Utiliser la fonction $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t}$ et le théorème de comparaison série-intégrale.
- (2) Exprimer $\ln v_n$ en fonction de la somme partielle de $\sum u_n$, on a $\prod_{q=1}^n \sqrt[q]{q} \sim e^a e^{(\ln n)^2/2}$.

Indication 3.4.4

- (1) $\sum s_n C \Rightarrow \sum \frac{u_n}{s_n} C$: immédiat. Si $\sum \frac{u_n}{s_n}$ converge et $s_n \rightarrow +\infty$ obtenir une contradiction en minorant le reste d'ordre n de $\sum \frac{u_n}{s_n}$ ou supposer que $\sum u_n$ diverge et distinguer les cas $\frac{u_n}{s_n} \not\rightarrow 0$ et $\frac{u_n}{s_n} \rightarrow 0$ et utiliser $-x \sim \ln(1-x)$ quand $x \rightarrow 0$.
- (2) Si $\sum u_n C$: cf. (1). Si $\sum u_n$ diverge distinguer les cas $\alpha \leq 1$ et $\alpha > 1$.

Indication 3.5.1 Poser $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$ et écrire $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$ en fonction des S_k puis utiliser Césaro.

Indication 3.5.2 Prendre $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ une base orthonormée telle que $\vec{r} = r \cdot \vec{K}$ puis raisonner en complexe dans le plan (\vec{I}, \vec{J}) , on trouve alors que R est la rotation d'axe $(0, \vec{r})$ et d'angle r .

Indication 3.5.3 Écrire $n\sigma_n$ (et $(n+p)\sigma_{n+p}$) en fonction de s_n (s_{n+p}) et des iu_i pour obtenir la relation $p(s_{n+p} - \sigma) = (n+p)(\sigma_{n+p} - \sigma) - n(\sigma_n - \sigma) + \sum_{i=n}^{n+p-1} (i-n)u_i$.

Majorer $|\sigma_n - \sigma| < \varepsilon$ pour avoir $|s_{n+p} - \sigma| \leq \left(\frac{2n}{p} + 1\right)\varepsilon + \frac{p}{2n}A$.

Utiliser enfin les ensembles $\Delta_\varepsilon = \{(n, p) \in \mathbb{N}^2 \mid n \geq N, n\sqrt{\varepsilon} \leq p \leq 2n\sqrt{\varepsilon}\}$.

Indication 3.5.4

- (1) Utiliser les résultats suivants : $0 \leq u_n \leq \|T\|$, $u_{p+q} \leq (u_p)^{\frac{p}{p+q}} (u_q)^{\frac{q}{p+q}} \leq \frac{pu_p + qu_q}{p+q}$ puis montrer que $u_n \rightarrow \inf u_n$.
- (2) La série $\sum T^n$ converge.
- (3) C'est encore vrai.

Indication 3.5.5

- (1) Montrer que si $a \leq 1$ la série double ne converge pas, se ramener au cas où $a > 1$, $b > 1$ et utiliser la majoration $\frac{1}{a^p + b^q} \leq \frac{1}{2} a^{-p/2} b^{-q/2}$.
- (2) Immédiat.

Indication 3.5.6 $(i) \Rightarrow (ii)$ est immédiat, $(ii) \Rightarrow (iii)$: regarder la convergence lorsque $q = 0$, $(iii) \Rightarrow (i)$: utiliser la comparaison série-intégrale.

Indication 3.5.7

- (1) Permuter les sommations...
- (2) S'intéresser à la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\zeta(n)-1)}{n}$ et permuter les sommations.

Indication 3.5.8 C'est une simple application du théorème d'interversion des sommations.

Indication 3.5.9 On développe par exemple $\frac{a^n}{1+x^2 a^{2n}}$ en série et on utilise le théorème d'interversion des sommations.

Indication 3.5.10 Pour le calcul de la somme sur q , faire intervenir une série aux différences.

Indication 3.5.11

- (1) C'est la norme 1 sur ℓ^1 .
- (2) On définit le produit de 2 éléments de $\overline{\mathbb{R}}[X]$ par le produit de Cauchy, on utilise ensuite la démonstration qui fait de ℓ^1 un espace complet.
- (3) $\overline{\mathbb{R}}[X]$ est le complété de E .

Indication 4.1.1 (g_n) converge uniformément vers $g = \frac{f}{1+f^2}$ grâce à l'uniforme continuité sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$, de même, si φ est uniformément continue sur \mathbb{R} alors (g_n) C.U. vers $\varphi(f)$.

Indication 4.1.2 Majorer $F_n(t) - F(t)$ où $F_n(t) = \frac{1-t}{1-t^n}$ et $F(t) = 1 - t$.

Indication 4.1.3 (1) C.S. vers $f(x) = x$ si $x > 0$, $-1/2$ si $x = 0$, -1 si $x < 0$, C.U. sur $\mathbb{R} \setminus]-a, a[$ pour $a > 0$.

(2) C.S. vers 0, $\|f_n\| = \frac{n^{a-1}}{e(n^2+1)}$: C.U. sur \mathbb{R} ssi $a < 3$, sinon, C.U. sur $[b, +\infty[$ où $b > 0$.

(3) C.S. vers 0, C.U. sur tout compact de \mathbb{R} .

(4) C.S. vers $\sin x$, C.U. sur tout compact de \mathbb{R} .

(5) C.S. vers 0, C.U. sur $[a, \pi/2[$, $a > 0$.

(6) $x > 0$ pas de C.S., $x \leq 0$: C.S. vers $f(x) = 0$ si $x < 0$, 1 si $x = 0$; C.U. sur $] -\infty, a]$ où $a > 0$.

(7) $\alpha = 0$: C.S. vers $f(x) = 1$ si $x = 0$, 0 ailleurs ; $\alpha > 0$: C.U. vers 0.

(8) C.U. sur \mathbb{R}_+ vers e^{-x} (utiliser l'inégalité $X - \frac{X^2}{2} \leq \ln(1+X) \leq X$ pour $|X| < 1$).

Indication 4.1.4 Montrer les inégalités par une récurrence simple puis majorer $\frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}$ indépendamment de x . La suite Q_n s'exprime simplement en fonction de P_n .

Indication 4.1.5 Utiliser l'U.C. de f puis partager $[a, b]$ en parties égales, majorer et minorer $f_n(x) - f(x)$.

Indication 4.1.6 Utiliser la convergence des suites $(P_n(p))$ pour $p \in \mathbb{N}$ pour prouver la convergence des coefficients des P_n puis utiliser l'équivalence des normes en dimension finie.

Indication 4.1.7 Utiliser l'I.A.F. puis prouver que f (limite simple des f_n) est continue et partager l'intervalle $[a, b]$ en parties égales. La propriété n'est plus vraie sur un intervalle non borné (trouver un contre-exemple).

Indication 4.1.8 Simplifier l'expression $\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$ (pour la somme partielle) puis montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t - t}{t^2 \sin t}$ est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$.

Indication 4.1.9 (1) F est définie sur \mathbb{R}_+^* (utiliser le T.S.A.),

(2) on trouve $F(x) = (1 - \frac{1}{2^{x-1}})g(x)$, (3) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)g(x) = 1$, (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$.

Indication 4.1.10 Restreindre l'étude à $I = [-\pi/2, +\pi/2]$, pas de C.U. mais C.U. sur $[-a, +a]$ pour $a \in]0, \pi/2[$.

Indication 4.1.11 Domaine de convergence : $|a| = 1$: demi-plan, $|a| > 1$: extérieur d'un cercle, $|a| < 1$: intérieur d'un cercle.

Indication 4.1.12

- (1) On a une série à termes positifs majorée puis on fait une récurrence à l'aide de la relation $u_n(x+1) = F(n) - F(n+1) + u_{n+1}(x)$.
- (2) Majorer le reste pour prouver la C.U. sur $[0, 1]$ puis étendre à \mathbb{R} .
- (3) g est continue.
- (4) $a = 0$.

Indication 4.1.13 (1) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ C ssi $x > 0$; $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$ C ssi $x \geq 0$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} x e^{-n^2 x} = 0$.

Indication 4.1.14 C'est un cas particulier du théorème de double limite.

Indication 4.2.1

- (1) Utiliser le T.S.A.
- (2) Majorer le cosinus par 1.
- (3) Utiliser la somme partielle d'une suite géométrique et intégrer.
- (4) Remarquer que $(-1)^k \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos xt \, dt = u_k(t)$

Indication 4.3.1

- (1) Utiliser la linéarité de E pour se ramener au cas de monômes, procéder par récurrence sur m pour la variance.
- (2) Décomposer la somme donnant $\text{Var}(f)$ selon que $|k - E(f)| \geq \alpha$ ou $|k - E(f)| < \alpha$.
- (3)
 - a) Chercher le nombre de sous-ensembles à k éléments dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 - b) Montrer que $\text{Var}(f_1 + \dots + f_n) = nt(1 - t)$ puis utiliser le (2).
 - c) Utiliser la continuité uniforme de f et le (b).

1. SOLUTIONS :

Solution 1.1.1 $N(x, y) \geq 0$, si $N(x, y) = 0$ alors $x + ty = 0$ pour $t \in [0, 1]$ donc $x = y = 0$.
Les deux autres propriétés de la norme se vérifient facilement.

Comment représenter la boule unité ?

Soit (x, y) tel que $N(x, y) = 1$ avec $y \neq 0$. On divise par y , on est ramené à étudier la valeur de $N(\alpha, 1)$.

- Si $\alpha \geq 0$, $N(\alpha, 1) = \alpha + \frac{1}{2}$,
- si $\alpha \leq -1$, $N(\alpha, 1) = -\alpha - 1$,
- si $-1 \leq \alpha \leq 0$ alors $N(\alpha, 1) = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{2}$.

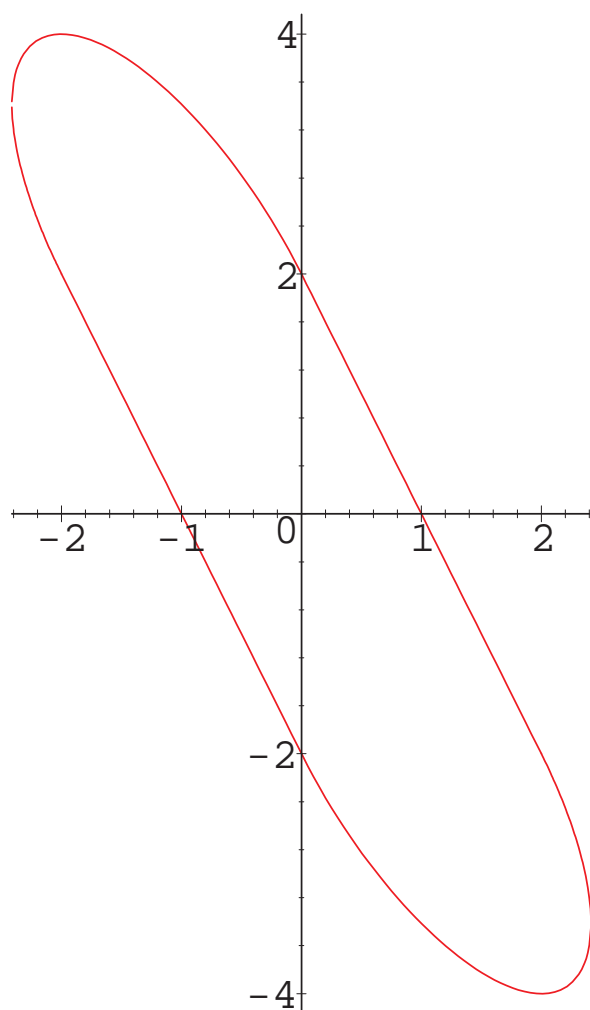
(La discussion est plus simple si, en se ramenant au cas où $x \geq 0$, on distingue les deux cas : $x + y \geq 0$ et $x + y \leq 0$.)

Remarque : en fait

$$\int_0^1 |x + ty| dt = \left[\frac{(x + ty)|x + ty|}{2y} \right]_0^1 = \frac{1}{2y} [(x + y)|x + y| - x|x|]$$

qui permet de simplifier la discussion...

On aura donc pour la sphère unité deux segments parallèles contenus dans les droites $|x + y/2| = 1$ tangents aux arcs d'ellipses $x^2 + xy + \frac{y^2}{2} = |y|$ de centres respectifs $O_1(-1, 2)$ et $O_2(1, -2)$.



On a construit les droites

$$y = 2(1 - x), \quad x \in [0, 2],$$

$$y = -2(1 + x), \quad x \in [-2, 0]$$

et les portions d'ellipses

$$y = 1 - x + \sqrt{1 - 2x - x^2}, \quad x \in [-1 - \sqrt{2}, 0],$$

$$y = 1 - x - \sqrt{1 - 2x - x^2}, \quad x \in [-1 - \sqrt{2}, -2],$$

$$y = -1 - x + \sqrt{1 + 2x - x^2}, \quad x \in [2, 1 + \sqrt{2}],$$

$$y = -1 - x - \sqrt{1 + 2x - x^2}, \quad x \in [0, 1 + \sqrt{2}].$$

FIGURE 1. La boule unité pour la norme N .

Solution 1.1.2

(1) Il suffit de montrer que N est une norme euclidienne et de considérer le produit scalaire :

$$\varphi(f, g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t) dt$$

φ est bien définie positive (vérification immédiate).

(2) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^x f'(t) dt \right)^2 \leq \int_0^x dt \cdot \int_0^x f'^2(t) dt \leq \int_0^1 f'^2(t) dt$$

donc avec l'inégalité $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ on obtient

$$f^2(x) = \left(f(0) + \int_0^x f'(t) dt \right)^2 \leq 2N(f)^2.$$

(3) Les normes ne sont pas équivalentes car, avec $f_n(x) = x^n$ alors $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$, cette dernière quantité tend vers $+\infty$.

Solution 1.1.3

(1) On note $\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$ et $\omega(f) = \sup_{\substack{(x,y) \in [0,1]^2 \\ x \neq y}} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|$.

On vérifie que $N(f) = \|f\| + \omega(f) = 0 \Rightarrow f = 0$, que $N(\lambda f) = |\lambda|N(f)$ et $N(f + g) \leq N(f) + N(g)$.

De même pour N_a où $N_a(f) = 0 \Rightarrow f(a) = 0$ et $\omega(f) = 0$, i.e. f est constante et vaut 0.

(2) Ensuite, on a

$$0 \leq N(f) - N_a(f) \leq \|f\| - |f(a)|$$

or $|f(x) - f(a)| \leq |x - a|\omega(f) \leq \omega(f)$ donc

$$\|f\| - |f(a)| = |f(x_0)| - |f(a)| \leq |f(x_0) - f(a)| \leq \omega(f)$$

d'où $0 \leq N(f) - N_a(f) \leq \omega(f) \leq N_a(f)$.

Les deux normes sont donc équivalentes.

N n'est pas équivalente à N_∞ , il suffit pour cela de prendre $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, $N_\infty(f_n) = \frac{1}{n}$

et $N(f_n) = \frac{1}{n} + 1$ car

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{x^n - y^n}{x - y} \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} \right|.$$

Donc $\sup_{\substack{(x,y) \in [0,1]^2 \\ x \neq y}} \left| \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} \right| = 1$ en prenant $x = 1$ et y tendant vers 1.

Solution 1.1.4 Solution revue par Stéphane

On remarque que le résultat est trivial pour $p \leq 2n$.

Nous sommes confrontés à une norme de somme de vecteurs majorant une somme de normes. Ce sens de l'inégalité n'est pas confortable à manipuler. On va donc se ramener à des ensembles où il y a égalité entre la norme des sommes de vecteurs et la somme de leurs normes, ce qui devrait nous simplifier la vie.

Voici une solution possible : départageons les vecteurs (x_i) en $2n$ ensembles J_j qui vérifient la propriété suivante :

$$\forall (x_i) = (\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,n}) \in J_j \quad \|x_i\| = (-1)^j \alpha_{i,E(\frac{j}{2})}$$

Cette restriction des maxima à une même coordonnée et à un même signe nous assure que la norme de la somme des vecteurs est bien égale à la somme des normes :

$$\left\| \sum_{i \in J_j} x_i \right\| = \sum_{i \in J_j} \|x_i\|$$

Le plus dur étant fait, on définit pour le plaisir une norme \mathcal{N} sur ces ensembles par $\mathcal{N}(J_j) = \sum_{i \in J_j} \|x_i\|$. La famille $(\mathcal{N}(J_j))_{j=1, \dots, 2n}$ étant finie, notons m l'indice de son maximum.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \|x_i\| &= \sum_{j=1}^{2n} \sum_{i \in J_j} \|x_i\| \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \mathcal{N}(J_j) \\ &\leq 2n \mathcal{N}(J_m) \\ &\leq 2n \left\| \sum_{i \in J_m} x_i \right\| \\ &\leq 2n \sup_{J \subset I} \left\| \sum_{i \in J} x_i \right\| \end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat souhaité :

$$\boxed{\sum_{i \in I} \|x_i\| \leq 2n \sup_{J \subset I} \left\| \sum_{i \in J} x_i \right\|}$$

Solution 1.1.5 Il suffit par exemple de trouver une matrice A telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, A et λA soient semblables.

Commençons par $n = 2$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient. En effet, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$ on a $PAP^{-1} = \lambda A$.

Si $n > 2$: on prend $A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P' = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$ comme matrice de passage.

On a alors $P'A'P'^{-1} = \lambda A$ d'où $\|PAP^{-1}\| = |\lambda| \cdot \|A\| \neq \|A\|$ si $|\lambda| \neq 1$.

Conclusion : si on prend f endomorphisme d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E , il n'existe pas de norme sur $\mathcal{L}(E)$ issue d'une norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui soit intrinsèque (i.e. indépendante de la base choisie). On a vu, en algèbre qu'on pouvait définir le déterminant et la trace d'un endomorphisme à partir d'une représentation matricielle quelconque (cf page 158, remarque 8.5.3 et la définition 8.5.11 ainsi que la proposition 2.1.7 et la définition 2.1.12 page 185), ce n'est donc pas possible avec la norme.

Solution 1.2.1

(1) Cas où $z_0 \in \mathbb{R}^*$, on étudie la fonction $f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x}$, fonction impaire d'où le tableau

de variations $(x_0 = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \text{ et } f(x_0) = 2\sqrt{\alpha\beta})$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	—	-	+
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

$f(x_0)$

On montre alors que la suite (z_n) converge vers 1 (cf. dernière question).

Si $z_0 \in i\mathbb{R}^*$ alors on écrit $z = ix$ et on est ramené à étudier la suite $x_{n+1} = g(x_n)$

où $g(x) = \alpha x - \frac{\beta}{x}$ qui est une fonction croissante et qui n'admet pas de point fixe ($g(x) = x \Leftrightarrow x^2 = -1$) donc la suite (x_n) ne converge pas.

- (2) Soit $z = x + iy$ alors $f(z) = \left(\alpha + \frac{\beta}{x^2 + y^2}\right)x + iy \left(\alpha - \frac{\beta}{x^2 + y^2}\right)$ donc $f(\Pi^+) \subset \Pi^+$.

Si $Z \in \Pi^+$ alors l'équation $f(z) = Z$ est équivalente à $\alpha z^2 - Zz + \beta = 0$ qui admet 2 racines complexes z_1 et z_2 . Comme $z_1 + z_2 = \frac{Z}{\alpha}$ alors l'une au moins de ces racines a une partie réelle > 0 .

Conclusion : $f(\Pi^+) = \Pi^+$.

- (3) Un calcul simple donne $\frac{f(z) - 1}{f(z) + 1} = \frac{z - 1}{z + 1} \frac{z - \frac{\beta}{\alpha}}{z + \frac{\beta}{\alpha}}$.

- (4) Comme $f(-z) = -f(z)$ on aura $f(\Pi^-) = \Pi^-$ donc, si $z \notin i\mathbb{R}^*$ alors la suite est bien définie.

Si $z = ix$ alors g s'annule pour $x = \pm\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ et si x_n prend l'une de ces valeurs alors la suite (z_n) n'est pas définie.

On se limite au cas où $z_0 \in \Pi^+$, on sait alors que tous les termes de la suite (z_n) sont dans Π^+ . Si on utilise le programme MAPLE suivant

```
Z:=proc(c,a,n)
local i,zn;
zn:=c;
for i from 1 to n do
zn:=a*zn+(1-a)/zn
od;
end;
```

alors on s'aperçoit que si $c = z_0$ n'est pas imaginaire pur alors la suite converge vers 1. Soit $z = re^{i\theta} \in \Pi^+$ alors $f(z) = \alpha re^{i\theta} + \frac{\beta}{r}e^{-i\theta}$. On se place sur un secteur angulaire $-\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0$ avec $\theta_0 = \pm \text{Arg } z_0$, $r \neq 0$ alors on a $-\theta_0 \leq \text{Arg } f(z) \leq \theta_0$ et

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= \left(\alpha r + \frac{\beta}{r}\right)^2 (1 - \sin^2 \theta)^2 + \left(\alpha r - \frac{\beta}{r}\right)^2 \sin^2 \theta \\ &= \left(\alpha r + \frac{\beta}{r}\right)^2 - 2\alpha\beta \sin^2 \theta \leq \left(\alpha r + \frac{\beta}{r}\right)^2. \end{aligned} \quad (\text{E})$$

Comme on a séparé les variables, cela va devenir plus simple :

- $|f(z)|$ est maximal pour $\theta = 0$ et $\alpha r + \frac{\beta}{r}$ maximal,
- $|f(z)|$ est minimal pour $\theta = \theta_0$ et $\alpha r + \frac{\beta}{r}$ minimal or on a vu que $\alpha r + \frac{\beta}{r} \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$

donc $|f(z)| \geq \sqrt{4\alpha\beta - 2\alpha\beta \sin^2 \theta_0} = \sqrt{4\alpha\beta} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{2}} \leq 1$. On pose par la suite

$$\frac{1}{r_0} = \sqrt{4\alpha\beta} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{2}}, \quad r_0 \geq 1.$$

Si $r > 1$ alors $|f(z)| < \alpha r + \frac{\beta}{r} \leq \alpha r + \beta < r$ et on a la discussion suivante :

- Si, à partir d'un certain rang, $|z_n| \geq 1$ alors la suite $(|z_n|)$ est décroissante et minorée donc elle converge.

Soit r sa limite. On a $r_{n+1}^2 = \left(\alpha r_n + \frac{\beta}{r_n}\right)^2 - 2\alpha\beta \sin^2 \theta_n$ (cf. relation (E)) par conséquent la suite $(\sin^2 \theta_n)$ converge vers s et on obtient à la limite

$$r^2 = \left(\alpha r + \frac{\beta}{r}\right)^2 - 2\alpha\beta s.$$

On en déduit que $r \leq \alpha r + \frac{\beta}{r}$ soit $(1 - \alpha)r = \beta r \leq \frac{\beta}{r}$ donc $r \leq 1$. Comme $r_n \geq 1$, c'est que $r = 1$ et cela entraîne $s = 0$. Dans ce cas, la suite tend vers 1.

- S'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $|z_n| < 1$ alors $|z_{n+1}| \geq \frac{1}{r_0}$ car on a vu que, de toutes façons, $|f(z)| \geq \frac{1}{r_0}$. Si $|z_{n+1}| \geq 1$ alors

$$\frac{1}{r_0} \leq |z_{n+2}| < |z_{n+1}|.$$

Soit on se retrouve dans le cas précédent soit il existe $p \geq 2$ tel que $|z_{n+p}| \leq 1$. À partir de ce rang, on aura par récurrence $\frac{1}{r_0} \leq |z_m| \leq r_0$ car si $|z| \in [1/r_0, r_0]$ on a $|f(z)| \leq \alpha r_0 + \beta r_0 = r_0$.

Soit K l'ensemble des z vérifiant $|z| \in [1/r_0, r_0]$ et $\text{Arg}(z) \in [-\text{Arg}(z_0), \text{Arg}(z_0)]$. Par une récurrence immédiate si $z_n \in K$ alors $z_{n+k} \in K$. La fonction $z \mapsto \frac{z - \frac{\alpha}{\beta}}{z + \frac{\alpha}{\beta}}$ est continue, elle atteint ses bornes sur K . Soit k sa borne supérieure alors $k < 1$ (car tous les éléments de K ont une partie réelle > 0).

On ainsi $\left| \frac{z_{n+1} - 1}{z_{n+1} + 1} \right| \leq k \left| \frac{z_n - 1}{z_n + 1} \right|$ et, par une récurrence immédiate, $\left| \frac{z_n - 1}{z_n + 1} \right| \leq k^n \left| \frac{z_0 - 1}{z_0 + 1} \right| \rightarrow 0$ d'où $z_n \rightarrow 1$ car z_n est bornée.

Solution 1.2.2 Considérons la construction arborescente suivante (faire un dessin) : Racine : $x(1) = (1, 1)$, branche gauche : $x(2) = (1, 2)$, branche droite : $x(3) = (2, 1)$.

Branches gauche et droite de $x(2)$: $x(4) = (1, 3)$, $x(5) = (3, 2)$.

Branches gauche et droite de $x(3)$: $x(6) = (2, 3)$, $x(7) = (3, 1)$.

Branches gauche puis droite respectivement de $x(4)$, $x(5)$, $x(6)$, $x(7)$:

$$x(8) = (1, 4), x(9) = (4, 3), x(10) = (3, 5), x(11) = (5, 2),$$

$$x(12) = (2, 5), x(13) = (5, 3), x(14) = (3, 4), x(15) = (4, 1)$$

etc... La poursuite de la construction de l'arbre se faisant selon la règle :

Le noeud (a, b) possède comme branche gauche $(a, a + b)$ et comme branche droite $(a + b, b)$.

On obtient ainsi tous les couples (a, b) d'entiers premiers entre-eux (la remontée de l'arbre à partir d'un couple (a, b) conduit à $(1, 1)$ par l'algorithme d'Euclide). De plus, si on part de 1 en x_1 et si on concatène un 0 si on va à gauche et un 1 si on va à droite, la suite de 1 et 0 obtenue pour atteindre x_n n'est autre que le développement binaire de n . Exemple : x_{11} est obtenu après 1011.

Considérons alors $x(n)$ et $x(n - 1)$. Il y a deux cas :

- Ou bien n est une puissance de 2, $n = 2^k$. Dans ce cas, $x(n)$ se trouve à l'extrême gauche de l'arbre après le chemin 100...0 (avec k zéros) et $x(n) = (1, k + 1)$. Quant à $x(n - 1)$, il se trouve à l'extrême droite du rang précédent, après le chemin 11...1 (avec k uns) et $x(n - 1) = (k, 1)$. De sorte que, si on considère que $x(n) = (r_n, s_n)$ désigne la fraction r_n/s_n , on a :

$$x_n = x(n) = \frac{1}{k+1} \text{ et } x(n-1) = \frac{k}{1} = k \Rightarrow x(n) = \frac{1}{1 + 2E(x(n-1)) - x(n-1)}$$

puisque $E(x(n-1)) = k$.

- Ou bien $x(n)$ est au milieu de l'arbre avec $x(n-1)$ à sa gauche immédiate. Ces deux nombres proviennent d'une même racine $x(m) = (r_m, s_m)$ suivi d'une suite de déplacement 011...1 pour $x(n-1)$ et 100...0 pour $x(n)$, avec le même nombre k de 1 pour $x(n-1)$ que de 0 pour $x(n)$. On a alors :

$$(r_m, s_m) - 0 - > (r_m, r_m + s_m) - 1 - > (2*r_m + s_m, r_m + s_m) - 1 - > (3*r_m + 2*s_m, r_m + s_m) - 1 - > \dots - 1 - > ((k+1)*r_m + k*s_m, r_m + s_m) = x(n-1)$$

$$\text{De même on aura } x(n) = (r_m + s_m, kr_m + (k+1)s_m) \Rightarrow x(n) = \frac{r_m + s_m}{kr_m + (k+1)s_m} = \frac{1}{k + \frac{s_m}{r_m + s_m}} \text{ alors que } x(n-1) = \frac{(k+1)r_m + ks_m}{r_m + s_m} = k + \frac{r_m}{r_m + s_m} \Rightarrow k = E(x(n-1)) \text{ et } x(n) = 1/(1 + 2*k - x(n-1)).$$

Solution 1.2.3

- (1) a) Par récurrence sur p , on trouve $\Delta^p(P)(X) = \sum_{k=0}^p (-1)^{n-k} \binom{p}{k} P(X+k)$, on peut aussi écrire que $\Delta = \tau - \text{Id}$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ où $\tau : P \mapsto Q$ défini par $Q(X) = P(X+1)$. Δ^p se calcul avec la formule du binôme.
- b) En examinant les termes de plus haut degré de $\Delta(P)$ on trouve que $\deg \Delta(P) = \deg P - 1$ si $\deg P \geq 1$ et $\Delta(P) = 0$ si $\deg P \leq 0$. Par une récurrence immédiate, on obtient $\deg \Delta^k(P) \leq \deg P - k$ donc $\Delta^p(P) = 0$ si $p > \deg P$.
- c) On va faire intervenir la base de Hilbert $e_i(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-i+1)}{i!}$. On a

$$\begin{aligned} \Delta e_i(X) &= \frac{(X+1)(X)\dots(X-i+2)}{i!} - \frac{X(X-1)\dots(X-i+1)}{i!} \\ &= \frac{X(X-1)\dots(X-i+2)[X+1 - (X-i+1)]}{i!} \\ &= e_{i-1} \end{aligned}$$

donc $\Delta^p e_p = 1$. On exprime alors X^p dans cette base :

$$X^p = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p,$$

$\Delta^p(X^p) = \lambda_p \Delta^p e_p$ (tous les autres termes sont nuls) et $\lambda_p = p!$ en examinant les termes de plus haut degré.

Conclusion : $\Delta^p(X^p) = p!$.

- d) On a $R(X+1) - R(X) = \frac{P(X+1)Q(X) - P(X)Q(X+1)}{Q(X)Q(X+1)}$ or les termes de plus haut degré des polynômes $P(X+1)Q(X)$ et $P(X)Q(X+1)$ sont égaux donc $\deg(P(X+1)Q(X) - P(X)Q(X+1)) \leq \deg P + \deg Q - 1$ et finalement $\deg R \leq \deg P - \deg Q - 1$.

- (2) On applique ce que l'on vient de voir au polynôme $P = lX^p + a_1X^{p-1} + a_2X^{p-2} + \dots + a_p$ et à la fraction rationnelle $R = \frac{a_{p+1}}{X} + \dots + \frac{a_{2p}}{X^p}$:
- $\Delta^p(P) = pl$ et $\deg \Delta^p(R) \leq -p - 1$. $v_n = \frac{1}{p!} \Delta^p P(n) + \frac{1}{p!} \Delta^p(R)(n) + O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right) = l + O\left(\frac{1}{n^{p+1}}\right)$.

Solution 1.3.1 On a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{A} \subset A$ donc $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A$ ouvert.

(i) $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{O \subset A} O$ (cf *remarque 5.1.11 page 226*) or $O \subset A \Rightarrow O \subset B$ donc

$$\overset{\circ}{A} \bigcup_{O \subset A} O \subset \overset{\circ}{B}.$$

(ii) $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} = \bigcup_{O \subset A, O' \subset B} (O \cap O') = \bigcup_{O'' \subset A \cap B} O'' = \overset{\circ}{A \cap B}$.

En effet, si O et O' sont deux ouverts contenus respectivement dans A et B alors $O \cap O'$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$. Réciproquement, si O'' est un ouvert contenu dans $A \cap B$ alors on peut prendre $O = O''$ et $O' = O''$ et $O'' = O \cap O'$. Il y a donc identité des familles d'ouverts $O \cap O'$ et O'' .

(iii) $\overset{\circ}{A} \subset A \cup B, \overset{\circ}{B} \subset A \cup B$ donc $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$.

Un contre-exemple est donné par $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Solution 1.3.2

(1) Si $x \in A$ on a $d(x, A) = 0$ (prendre $y = x \in A$ dans la définition).

Si $d(x, A) = 0$ alors pour tout n de \mathbb{N} , on sait qu'il existe $y_n \in A$ tel que $d(x, y_n) \leq \frac{1}{n+1}$ (par définition de la borne inférieure). La suite (y_n) est une suite d'éléments de A qui converge vers x . Grâce au *théorème 5.9 page 227* (caractérisation de l'adhérence) on peut affirmer que $x \in A$.

(2) Il suffit de prendre pour A l'axe Ox et pour B la branche d'hyperbole $xy = 1$ avec $x > 0$. A et B sont deux ensembles fermés (immédiat avec la caractérisation séquentielle des fermés qui a servi à la question précédente) et si $M(x, 0) \in A, N(x, 1/x) \in B$, on a $d(M, N) = \frac{1}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

On a bien $k(A, B) = 0$ avec $A \cap B = \emptyset$.

Solution 1.4.1

(1) Soit $h(x) = f(x) - g(x)$, h atteint sa borne inférieure sur $[a, b]$, soit k cette borne inférieure. $k > 0$ donc on a bien la propriété vraie à l'ordre 1.

H.R. : on suppose la propriété vraie à l'ordre n , $f^n(x) \geq kn + g^n(x)$.

$$f^{n+1}(x) = f^n(f(x)) \geq kn + g^n(f(x)) = kn + f(g^n(x)) \geq kn + k + g^n(x) = k(n+1) + g^n(x).$$

(2) On raisonne par l'absurde : s'il n'existe pas d'élément $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = g(x)$ alors $h(x) = f(x) - g(x)$ est une fonction continue sur $[a, b]$ et qui ne s'annule pas donc elle garde un signe constant que l'on peut supposer > 0 . Si $x \in [a, b]$ alors $f^n(x) \in [a, b]$,

de même $g^n(x) \in [a, b]$ or $f^n(x) \geq kn + g^n(x) \geq kn + a \rightarrow +\infty$ ce qui est impossible.
Conclusion : on a bien prouvé l'existence de $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = g(x)$.

Solution 1.5.1 Grâce au théorème 5.11, il suffit de montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

Pour cela utilisons le critère séquentiel de continuité (conséquence du *théorème 5.10 page 229*)
soit $x_n \rightarrow 0$ montrons que $f(x_n) \rightarrow 0$. Prenons $y_n = \frac{x_n}{\sqrt{\|x_n\|}}$ alors $y_n \rightarrow 0$ donc $\exists M : \|f(y_n)\| \leq$

M . La majoration $\|f(x_n)\| \leq M\sqrt{\|x_n\|}$ nous permet d'avoir $f(x_n) \rightarrow 0$.

Conclusion : f est bien une application linéaire continue.

Solution 1.5.2 On a tout d'abord $|f(x - y)| = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x - y\|$ pour tout $y \in H$ donc $|f(x)| \leq \|f\| d(x, H)$.

Soit maintenant $a \in S(0, 1)$ tel que $|f(a)| \geq \|f\| - \varepsilon$: on peut écrire $x = y + f(x)\alpha$ où $\alpha = \frac{a}{f(a)}$

et $y \in H$. Alors $\|x - y\| = |f(x)| \cdot |\alpha| = \frac{|f(x)|}{|f(a)|}$ donc

$$d(x, H)(\|f\| - \varepsilon) \leq \|x - y\|(\|f\| - \varepsilon) \leq \|x - y\| \cdot |f(a)| \leq |f(x)|$$

et ceci pour tout $\varepsilon > 0$ d'où l'inégalité

$$d(x, H) \cdot \|f\| \leq |f(x)|$$

ce qui permet de conclure à l'égalité $d(x, H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$.

Solution 1.6.1

(1) Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{h=0}^m b_h X^h$ alors $PQ = \sum_{j=0}^{n+m} c_j X^j$ où $c_j = \sum_{k+h=j} a_k b_h$ (en posant $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_h = 0$ si $h > m$).

$$(1) \quad \|P \cdot Q\| = \sum_{j=0}^{n+m} |c_j| \leq \sum_{h,k} |a_k| |b_h| = \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{h=0}^m |b_h| \right) = \|P\| \cdot \|Q\|.$$

(2) On prend la suite $R_n = \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k(k+1)}$ alors $\|R_n\| = 1 - \frac{1}{n+1}$ et (R_n) est une suite de Cauchy. Supposons par l'absurde que la suite (R_n) admette une limite que l'on note P . Si $\deg P = p$,

$$\|P - R_n\| \geq \sum_{k=p+1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{n+1}$$

donc $\|P - R_n\|$ ne peut tendre vers 0 ce qui abouti à une contradiction.

Conclusion : E n'est pas complet.

(3) Si les coefficients de P et Q sont positifs, on a égalité dans (1) $\|P \cdot Q\| = \|P\| \cdot \|Q\|$ et donc, par une récurrence immédiate sur k , $\|P^k\| = \|P\|^k$.

On peut aussi dire que $\|P\| = P(1)$ si P a tous ses coefficients positifs. Comme P^k a aussi tous ses coefficients positifs, ce sera la même chose donc

$$\|P^k\| = P(1)^k = \|P\|^k.$$

Solution 1.6.2 Si $a \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) alors les ensembles

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} \mid \|a - u_n\| \leq \varepsilon\} \text{ et } B(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} \mid \|a - u_{\varphi(n)}\| \leq \varepsilon\} = \varphi^{-1}(A(\varepsilon)).$$

contiennent une infinité d'éléments.

Par symétrie, on en déduit que (u_n) et $(u_{\varphi(n)})$ ont mêmes valeurs d'adhérence.

Si (u_n) est une suite de Cauchy, il en est de même de la suite $(u_{\varphi(n)})$.

En effet on sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \forall p \in \mathbb{N}, \|u_n - u_{n+p}\| \leq \varepsilon.$$

L'ensemble des $q \in \mathbb{N}$ tels que $\varphi(q) \leq N$ est fini. Si on note N_1 son plus grand élément alors

$$\forall n \geq N_1, \forall p \in \mathbb{N}, \|u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n+p)}\| \leq \varepsilon,$$

donc la suite $(u_{\varphi(n)})$ est aussi une suite de Cauchy.

Solution 1.6.3 p est bien définie car 0 appartient à l'intérieur de K . En effet, comme K est d'intérieur non vide il existe $B(x, r) \subset K$ et par symétrie $B(-x, r) \subset K$. Comme les milieux de couples de points appartenant à K appartient lui aussi à K alors $B(0, r) \subset K$.

Montrons ensuite que si $p(x) \neq 0$ alors $\frac{x}{p(x)} \in K$. Comme $p(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+, \frac{x}{\lambda} \in K\}$ alors

il existe une suite de réels (λ_n) qui tend vers $p(x)$. La suite $\left(\frac{x}{\lambda_n}\right)$ est une suite d'éléments de K donc on peut en extraire une suite convergente dans K : $\left(\frac{x}{\lambda_{\varphi(n)}}\right)$. Or $\lambda_{\varphi(n)} \rightarrow p(x)$ (suite extraite d'une suite convergente) donc, à la limite, on sait que $\frac{x}{p(x)} \in K$.

Prouvons maintenant que p vérifie les 3 axiomes de la norme :

- $p(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \frac{1}{\lambda}x \in K \Leftrightarrow x = 0$ car K est borné.
- Soit $x_0 \in K$ tel que $x_0 = \frac{x}{p(x)}$. Soit α un réel > 0 , comme $\frac{\alpha x}{\alpha p(x)} = x_0 \in K$ on a $p(\alpha x) \leq \alpha p(x)$. De même, on obtiendrait $p(x) \leq \frac{1}{\alpha}p(\alpha x)$ d'où l'égalité $p(\alpha x) = \alpha p(x)$. Vu que K est symétrique, on a $p(-x) = p(x)$ et en conclusion, pour tout réel α , $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$.
- Enfin en écrivant que :

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)} = \frac{p(x)}{p(x)+p(y)} \cdot \underbrace{\frac{x}{p(x)}}_{\in K} + \frac{p(y)}{p(x)+p(y)} \cdot \underbrace{\frac{y}{p(y)}}_{\in K}$$

alors, on en déduit que $\frac{x+y}{p(x)+p(y)} \in K$ car K est convexe donc $p(x+y) \leq p(x)+p(y)$.

Solution 2.1.1

- On a $1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left((-1)^{2n} + \frac{1}{2n} \right)$ donc 1 est valeur d'adhérence de A . Comme $1 \notin \{(-1)^n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$, $A \neq \bar{A}$ et donc A n'est pas fermé (cf théorème 5.7 page 226 sur la caractérisation des fermés).
- On procède de même pour B .
- $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ et 0 n'appartient pas à C donc C n'est pas fermé.

Solution 2.1.2 $\bar{B}(x, a+1) \cap F$ est un compact (fermé borné en dimension finie *corollaire 5.26 page 236*) et $f : y \mapsto d(x, y)$ est continue (f est 1-lipschitzienne) donc f est minorée et atteint ses bornes.

Solution 2.1.3 On pose $A_p = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, F) < \frac{1}{p}\}$.

Si $y \in F$ alors $B(y, 1/p) \subset A_p$, si $y \in A_p \setminus F$ alors $d(y, F) = \varepsilon < \frac{1}{p}$. Si on pose $\eta = \frac{1}{p} - \varepsilon$ alors $B(y, \eta) \subset A_p$.

Conclusion : $A_p, p \in \mathbb{N}^*$ est un ouvert.

On a ensuite $F \subset \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} A_p$, montrons l'inclusion dans l'autre sens.

Si $x \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} A_p$ alors $\forall p \in \mathbb{N}^*, d(x, F) < \frac{1}{p}$ donc $d(x, F) = 0$ et comme F est fermé, $x \in F$.

Remarque : on pouvait aussi dire que $f : x \mapsto d(x, F)$ est une application continue et $A_p = f^{-1}\left(\left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{p} \right[\right)$ donc A_p est un ouvert.

Solution 2.1.4 Montrons tout d'abord que, pour tout x de E , il existe t dans F tel que $d(x, F) = d(x, t)$.

En effet, avec $d = d(x, F)$, l'ensemble $K = \bar{B}(x, 2d) \cap F$ est un compact (fermé, borné en dimension finie cf. *corollaire 5.26 page 236*). Comme l'application $d : t \in E \mapsto d(x, t)$ est continue, elle atteint son minimum (cf. *théorème 5.22 page 234*) il existe donc $t \in K$ tel que $d(x, t) = d(x, F)$.

Soit $x \in E \setminus F$ alors $d(x, F) > 0$ car tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé dans E . Il existe $t \in F$ tel que $d(x, F) = d(x, t)$.

Il suffit alors de poser $y = \frac{x-t}{\|x-t\|}$. On a bien $\|y\| = 1$ et $d(y, F) = d(y, 0) = 1$. En effet, si $u \in F$ alors

$$d(y, u) = \left\| \frac{x-t}{\|x-t\|} - u \right\| = \frac{1}{\|x-t\|} \|x-t - \|x-t\|u\|$$

or $t + \|x-t\|u \in F$ donc $\inf\{d(y, u), u \in F\} = \|y\|$.

Solution 2.1.5 Montrons tout d'abord que 0 est un point d'accumulation de G (i.e. tout voisinage de 0 contient un élément de G distinct de 0) :

en effet, comme G n'est pas discret, il possède un point d'accumulation u , qui appartient à G car G est fermé et par translation, on en déduit que 0 est lui-même point d'accumulation.

On a donc l'existence d'une suite (x_n) d'éléments de G , $x_n \neq 0$ qui converge vers 0. La suite $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$ est une suite de S_{n-1} , sphère unité de \mathbb{R}^n , qui est compacte. Soit $(\frac{u_n}{\|u_n\|})$ une suite extraite qui converge vers a (où $u_n \in G$). On va montrer que G contient la droite $\mathbb{R}a$.

Soit D_n la droite $\mathbb{R}u_n$ et v un élément non nul de la droite $\mathbb{R}a$. Si v_n désigne la projection de v sur D_n , on a $\|v - v_n\| \leq \left\| a - \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\| \cdot \|v\|$ (faire un dessin).

Il existe un entier α_n tel que $\|v_n - \alpha_n u_n\| < \|u_n\|$, on a alors $\|v - \alpha_n u_n\| \leq \|v - v_n\| + \|v_n - \alpha_n u_n\|$ quantité qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

La suite $(\alpha_n u_n)$ est donc une suite d'éléments de G qui tend vers v . Donc $v \in G$ et $G \supset \mathbb{R}a$ c.q.f.d.

Solution 2.1.6 On prend la norme $N(A) = \sup_{i,j} |a_{ij}|$ pour $A = (a_{ij})$.

Il suffit de montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \varepsilon > 0, \exists B \in B(A, \varepsilon)$ telle que $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$:

- si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ c'est réglé,
- si $A \notin \text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors le polynôme $P_A(X) = \det(A - XI)$ s'annule en 0 et n'a qu'un nombre fini de racines. Il existe donc $\eta > 0$ inférieur à ε tel que $P_A(\eta) \neq 0$; on prend $B = A - \eta I$. $N(B - A) < \varepsilon$ et $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ car son déterminant est non nul.

Solution 2.1.7

(1) $\|f\|^2 = \sup_{\|X\|=1} (X^T A^T A X)$ or, dans une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) , on peut écrire

$$X^T A^T A X = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \text{ et donc}$$

$$\|f\|^2 = \sup\{\lambda \in \text{Sp}(A^T A)\}.$$

En effet, la matrice $A^T A$ est une matrice symétrique positive d'ordre n . Si on range les valeurs propres de $A^T A$ dans l'ordre croissant, on a

$$X^T A^T A X \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2$$

donc, dans un premier temps, $\|f\| \leq \sqrt{\lambda_n}$. et si on calcule $\|f(e_n)\|^2$ on trouve λ_n ce qui permet d'avoir l'égalité.

(2) Soit $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ alors

$$\sum_{i=1}^p |y_i| \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^p |a_{ij}| \right) |x_j| \leq \sup_{j \in [1, n]} \left(\sum_{i=1}^p |a_{ij}| \right) \sum_{j=1}^n |x_j|.$$

On a donc $\|f\| \leq \sup_{j \in [1, n]} \left(\sum_{i=1}^p |a_{ij}| \right)$.

Soit $j_0 \in [1, n]$ tel que $\sum_{i=1}^p |a_{ij_0}| \geq \sum_{i=1}^p |a_{ij}|$ et x tel que $x_j = \delta_{jj_0}$, on a alors l'égalité

$$\|f(x)\| = \sup_{j \in [1, n]} \left(\sum_{i=1}^p |a_{ij}| \right) \text{ donc}$$

$$\|f\| = \sup_{j \in [1, n]} \left(\sum_{i=1}^p |a_{ij}| \right).$$

(3) De la même façon, on obtient : $\|f\| = \sup_{i \in [1, p]} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$.

Remarque : on a utilisé ici les résultats de la *question (i) page 232*.

Solution 2.1.8 On confond, lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre, les endomorphismes de \mathbb{C}^n et leur matrice.

Soit (u_1, \dots, u_n) une base de vecteurs propres pour M , on pose $N(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$ où $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$

et on note D la matrice diagonale $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ semblable à M (D est la matrice de l'endomorphisme M de \mathbb{C}^n dans la nouvelle base (u_i)). Alors

$$N(Dx) = N\left(\sum_{i=1}^n x_i \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot |\lambda_i| \leq R_M N(x).$$

Soit i_0 tel que $|\lambda_{i_0}| = \max_{i \in [1, n]} |\lambda_i|$ alors $N(Du_{i_0}) = |\lambda_{i_0}|$ donc, si on note \mathcal{N} la norme subordonnée à N , on a $\mathcal{N}(M) = |\lambda_{i_0}|$.
De même $\mathcal{N}(M^p) = R_M^p$. Grâce à l'équivalence des normes en dimension finie, alors

$$aR_M^p \leq \|M^p\| \leq bR_M^p$$

et, en prenant les racines $p^{\text{ièmes}}$ on a $a^{1/p} R_M \leq f_p(M) \leq b^{1/p} R_M$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} f_p(M) = R_M$.

Solution 2.1.9

- (1) On remarque tout d'abord que $B_p(A - I) = \frac{1}{p}(A^p - I)$ et comme la suite (A^p) est bornée, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} B_p(A - I) = 0$.

La suite (B_p) est bornée (on a immédiatement $\|B_p\| \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} \|A^k\|$), le théorème de

Bolzano-Weierstrass (cf *théorème 5.21 page 234*) nous permet d'en extraire une suite convergente $(B_{\varphi(p)})$ vers une matrice B qui vérifiera nécessairement $B(A - I) = 0$.

Par une récurrence immédiate, on a $BA^k = B$, ce qui donne $BB_p = B$ et, comme la multiplication matricielle est continue, $B^2 = B$.

- (2) B étant la matrice d'un projecteur, on a $\text{Ker } B \oplus \text{Ker}(I - B) = \mathbb{C}^n$.

Comme $B(A - I) = 0$, $\text{Im}(A - I) \subset \text{Ker } B$.

Prouvons maintenant que $\text{Ker}(A - I) \subset \text{Ker}(B - I)$: si $AX = X$ alors $A^k X = X$ pour tout k i.e. $B_p X = X$ et par passage à la limite $BX = X$.

On en déduit immédiatement $\text{Ker}(A - I) \oplus \text{Im}(A - I) = \mathbb{C}^n$ et, en prime, on a les égalités : $\text{Im}(A - I) = \text{Ker } B$, $\text{Ker}(A - I) = \text{Ker}(B - I)$.

Solution 2.1.10 On choisit par exemple la norme $\|A\| = n \sup_{(i,j) \in [1, n]^2} |a_{ij}|$. On a alors $\|A \cdot B\| \leq$

$$\|A\| \cdot \|B\|.$$

Dans \mathbb{C} , A est trigonalisable donc, il existe P matrice de passage telle que $A' = P^{-1}AP$ soit triangulaire. On note alors B'_p la matrice diagonale dont le terme de la $i^{\text{ième}}$ ligne, $i^{\text{ième}}$ colonne vaut $\frac{i}{p}$.

On remarque alors que, pour p suffisamment grand, $A' + B'_p$ a toutes ses valeurs propres distinctes, il en est de même pour $A + B_p$ où l'on a posé $B_p = PB'_p P^{-1}$. On a alors une suite de matrices diagonalisables qui tend vers A c.q.f.d.

Il en résulte en particulier que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution 2.1.11

- (1) Si (e_i) est une base orthonormée de F , $y = \sum_{i=1}^n (x \cdot e_i) \cdot e_i$ alors $x - y \in F^\perp$ et $F \cap F^\perp = \{0\}$

(en fait on redémontre le *théorème 4.2 page 201*).

- (2) Montrons tout d'abord le lemme suivant :

$$((f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathcal{L}(E)) \Leftrightarrow (\forall x \in E, (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } E)$$

En effet si (f_n) converge dans $\mathcal{L}(E)$ vers f alors $\|f(x) - f_n(x)\| \leq \|f - f_n\| \cdot \|x\| \rightarrow 0$ donc $(f_n(x))$ converge.

Réciproque : soit (e_1, \dots, e_p) une base de E , on choisit la norme infinie sur E alors, si $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$, on a

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_n(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^p x_i (f(e_i) - f_n(e_i)) \right\| \\ &\leq \|x\| \sum_{i=1}^p \|f(e_i) - f_n(e_i)\| \end{aligned}$$

donc $\|f - f_n\| \leq \sum_{i=1}^p \|f(e_i) - f_n(e_i)\| \rightarrow 0$.

Si $v = \text{Id} - u$ et si $y \in \text{Ker } v$ alors : $(v(x)|y) = (v(x)|u(y)) = (x|y) - (u(x)|u(y)) = 0$ (car u est orthogonal) donc

$$\text{Im } v \subset (\text{Ker } v)^\perp \text{ et } \text{Im } v \cap \text{Ker } v = \{0\}.$$

Comme $\dim \text{Im } v + \dim \text{Ker } v = \dim E$ on a bien $E = \text{Ker } v \oplus \text{Im } v$.

Si $x \in E$, $x = y + (t - u(t))$ où $y \in \text{Ker } v$, alors

$$\frac{1}{n}(\text{Id} + u + \dots + u^{n-1})(x) = y + \frac{t - u^n(t)}{n}$$

(car $u^p(x) = y + u^p(t) - u^{p+1}(t)$) et, comme $\|u^n(t)\| = \|t\|$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t - u^n(t)}{n} = 0$.

Conclusion : grâce au lemme, la suite $(\frac{1}{n}(\text{Id} + u + \dots + u^{n-1}))$ converge vers la projection orthogonale sur $\text{Ker}(\text{Id} - u)$.

Solution 2.1.12 On prouve que la C.N.S. cherchée est

$$(1) \quad \begin{cases} (i) \sup\{|\lambda_i|, \lambda_i \text{ vap de } A\} \leq 1 \\ (ii) \text{ et si } |\lambda_i| = 1, \text{ alors } \dim E_{\lambda_i} \text{ est égal à l'ordre de multiplicité de } \lambda_i \text{ dans } P_A \end{cases}$$

L'utilisation de la réduite de Jordan rend ce résultat quasiment trivial.

Démontrons ce résultat :

- (1) \Rightarrow la suite A^p est bornée.
On écrit le polynôme caractéristique de A sous la forme

$$P_A(X) = \prod_{\substack{i=1 \\ |\lambda_i|=1}}^k (X - \lambda_i)^{m_i} \times Q(X)$$

où le polynôme Q a toutes ses racines de module < 1 . Grâce au lemme des noyaux, on sait que, si on note \mathcal{A} l'endomorphisme de \mathbb{C}^n associé à la matrice A dans la base canonique,

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^p \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \text{Id})^{m_i} \oplus \text{Ker } Q(\mathcal{A})$$

Comme $\dim E_{\lambda_i} = m_i$ alors $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \text{Id})^{m_i} = E_{\lambda_i}$, selon le résultat admis, donc, en choisissant une base dans chaque E_{λ_i} que l'on complète en une base de $\text{Ker } Q(\mathcal{A})$, \mathcal{A} admettra pour matrice $A' =$

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_p I_{m_p} & 0 \\ 0 & \vdots & 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'' & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}. \text{ En vertu du résultat}$$

rappelé, la matrice B peut s'écrire $D + N$ où $D = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_q)$ (en choisissant une base de $\text{Ker } Q(\mathcal{A})$) avec $|\mu_j| < 1$. Les puissances successives de A'' sont bornées et

$$B^k = \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} D^{k-h} N^h$$

d'où $\|B^k\| \leq \sum_{h=0}^k \binom{k}{h} \|D^{k-h}\| \|N^h\|$ et comme la matrice N est nilpotente (d'indice de nilpotence $\leq n$) alors, pour les grandes valeurs de k ($k > n$), on a

$$\|B^k\| \leq \sum_{h=0}^n \binom{k}{h} |\mu|^{k-h} M$$

où M est un majorant de $\{\|N^q\|, q \in [0, n]\}$ et $|\mu| = \max\{|\mu_j|, j \in [1, q]\}$ (on a choisit une norme matricielle subordonnée à la norme 1). Finalement, en majorant $\binom{k}{h}$ par

k^n , $h \in [0, n]$ et μ^{k-h} par $\frac{\mu^k}{\mu^n}$, on obtient

$$\|B^k\| \leq (n+1) M k^n \mu^k \rightarrow 0.$$

La suite (A^p) est bornée.

- Réciproque : si la suite (A^p) est bornée alors toutes les valeurs propres sont de module ≤ 1 . En effet, si λ est une valeur propre, X un vecteur propre associé alors $A^p X = \lambda^p X$ et comme (A^p) est bornée, on a

$$\|\lambda^p X\| = |\lambda|^p \|X\| \leq \|A^p\| \|X\|$$

donc (λ^p) est bornée soit $|\lambda| \leq 1$.

Soit μ une valeur propre de A de module 1 (si elle existe).

Par une récurrence immédiate, on a $B^p = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} \mu^p & p\mu^{p-1} \\ 0 & \mu^p \end{pmatrix}$.

Supposons que $\dim E_\mu < m$ où m est l'ordre de multiplicité de μ . La restriction de \mathcal{A} à l'espace vectoriel $\text{Ker}(\mathcal{A} - \mu \text{Id})^m$ n'est pas diagonalisable (cf *remarque 3.2.4 (ii) page 194* qui est une C.N.S.). Si on trigonalise cette restriction (que l'on note toujours \mathcal{A}) dans la base (E_1, \dots, E_m) et si E_k est le premier vecteur de cette base tel que

$\mathcal{A}E_k \neq \mu E_k$ alors on a $\mathcal{A}E_k = \mu E_k + \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p E_p$ où les α_p ne sont pas tous nuls. On

pose $E'_{k-1} = \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p E_p$, la restriction de \mathcal{A} à l'espace vectoriel $\text{Vect}(E'_{k-1}, E_k)$ admet B

comme matrice. Or $p|\mu^p| \rightarrow +\infty$ donc la suite (A^p) n'est pas bornée.

Solution 2.1.13 On prouve la propriété par récurrence sur n . Elle est immédiate en dimension 1.

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{C}^n associé à la matrice M . $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les vap de M . Soit e'_n un vep associé à λ_n . En renumérotant les vecteurs de la base canonique, on peut supposer que

$(e_1, \dots, e_{n-1}, e'_n)$ est une base de \mathbb{C}^n . Dans cette base, f est représenté par M' et dans la base $(e_1, \dots, e_{n-1}, \frac{1}{p}e'_n)$ par la matrice M'_p où

$$M' = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & N & & \vdots \\ & & & 0 \\ c_1 & \dots & c_{n-1} & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } M'_p = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & N & & \vdots \\ & & & 0 \\ c_1/p & \dots & c_{n-1}/p & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Les matrices M , M' et M'_p sont semblables et la matrice N a pour valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$. Grâce à l'hypothèse de récurrence, on sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists Q' \in GL_{n-1}(\mathbb{C}) \text{ telle que } Q'^{-1}NQ = A' + B'$$

où $A' = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ et $\|B'\| \leq \varepsilon/2$. Si on pose $(c'_1 \dots c'_{n-1}) = (c_1, \dots, c_{n-1})Q'$ et $Q = \begin{pmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors

$$Q^{-1}M'Q = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & Q'^{-1}NQ' & & \vdots \\ & & & 0 \\ c'_1 & \dots & c'_{n-1} & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } Q^{-1}M'_pQ = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & Q'^{-1}NQ' & & \vdots \\ & & & 0 \\ c'_1/p & \dots & c'_{n-1}/p & \lambda_n \end{pmatrix} = A + B_p$$

où $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $B_p = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & B' & & \vdots \\ & & & 0 \\ c'_1/p & \dots & c'_{n-1}/p & \lambda_n \end{pmatrix}$

Pour p suffisamment grand, on a $\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n-1} |c'_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et par conséquent

$$\|B\| \leq \|B'\| + \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n-1} |c'_k| \leq \varepsilon.$$

Remarque : on peut prouver ceci directement : on écrit $M = P^{-1}TP$ où T est triangulaire puis Q est la matrice de passage de (e'_i) à (ε_i) où $\varepsilon_i = \frac{e_i}{K}$. $T = Q^{-1}SQ$ avec $s_{ij} = \frac{t_{ij}}{K^{j-i}}$ et $K = \max\left(\frac{\varepsilon}{\|T\|_\infty}, 1\right)$. $B = S - \text{Diag}(t_{ii})$ et $A = \text{Diag}(t_{ii})$ conviennent.

Solution 2.2.1

- (1) Dans un espace vectoriel normé toute boule est convexe. Puis, en dimension finie, toute boule fermée est compacte c.q.f.d.
- (2) Ce résultat est évident si on fait un dessin ! En effet, $1 - P = \frac{1}{2}(1 - P_1) + \frac{1}{2}(1 - P_2)$, chaque fonction étant positive. Pour que $1 - P(x_0) = 0$ il faut que $1 - P_1(x_0) = 1 - P_2(x_0) = 0$. Soit $q \in [1, k-1]$ tel que $P_1^{(q)}(x_0) = \alpha \neq 0$. On a alors $1 - P_1(x) \sim \beta(x - x_0)^q$ et $1 - P_2(x) \sim -\beta(x - x_0)^q$ ce qui est impossible car les deux fonctions $1 - P_1$ et $1 - P_2$ sont positives.
- (3) On peut prendre par exemple $P_1 = 1$, $P_2 = x^2$ alors $P = \frac{1}{2}(1 + x^2)$. On vérifie que P , P_1 , P_2 sont sur la frontière de B et qu'ils ne sont pas égaux.
- (4) Montrons que tout élément extrémal de B est sur la frontière de B . Si $\|P\| < 1$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}(P, \varepsilon) \subset B$ donc $P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$ où $P_1 = P + \varepsilon \in B$ et

$P_2 = P - \varepsilon \in B$.

Si P est un élément extrémal alors $\|P\| = 1$ et il existe x_0 tel que $P(x_0) = \pm 1$. On se limite ensuite au cas où $P(x_0) = 1$. On se retrouve donc dans le cas du 2.

Si λ est le plus petit réel tel que $P \in B$ (i.e. $\lambda = -\frac{2}{(1+|x_0|)^k}$) alors P est un élément extrémal, sinon P ne l'est pas.

Conclusion : les éléments extrémaux recherchés sont $P = 1 - \frac{1}{(1+|x_0|)^{2p}}(x-x_0)^{2p}$ où x_0 un élément de $[-1, 1]$.

Solution 3.1.1

- (1) $u_n = (-1)^n I_n$ où I_n est une intégrale de Wallis, or on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ et $(I_n) \searrow$.
On a donc affaire à une série alternée et

$$S_n = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - (-1)^n \cos^n x}{1 + \cos x} dx : \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x} = 1$$

car $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{1 + \cos x} dx < u_n \rightarrow 0$ et $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos x} = 1$ est fourni par un logiciel de calcul.

- (2) Posons $v_p = u_{4p} + u_{4p+1} + u_{4p+2} + u_{4p+3}$: $\sum_{k=1}^p v_k = \sum_{q=2}^{2p+1} \left(\frac{(-1)^q}{2q} + \frac{(-1)^q}{2q+1} \right)$ donc, par passage à la limite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{3}$$

(sachant que $\frac{\pi}{4} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{2q+1}$ et que $\ln 2 = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q}$).

Conclusion : comme $u_n \rightarrow 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge et vaut $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{3}{2}$.

Solution 3.1.2 Lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a

$$\ln \frac{1}{|u_n|} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln k \rightarrow +\infty \text{ car } \ln n \rightarrow +\infty$$

en appliquant le théorème de Césaro généralisé à $+\infty$ (que l'on peut démontrer de façon élémentaire).

On a ensuite

$$\ln \frac{1}{|u_{n+1}|} - \ln \frac{1}{|u_n|} = \frac{\ln n + 1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \ln k \geq \frac{\ln(n+1) - \ln n}{n+1}$$

en minorant $-\ln k$ par $-\ln n$ dans la somme. On a inégalité stricte dès que $n \geq 2$. La suite $(|u_n|)$ est strictement décroissante et tend vers 0, le théorème des séries alternées s'applique et donc $\sum u_n$ converge.

Solution 3.2.1 D'après le critère de Cauchy, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ où $v_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{2n-1}$. Comme $(u_n) \searrow$ alors $0 \leq nu_{2n} \leq nu_{2n-1} \leq v_n$ ce qui entraîne que $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_{2n} =$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_{2n-1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0$.

La réciproque est fautive : prendre $u_0 = u_1 = 1$, $u_n = \frac{1}{n \ln n}$.

Solution 3.2.2 On a immédiatement $U_n \sim V_n = \int_0^n t^\alpha dt = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Puis, si $U'_n = \sum_{q=1}^n q^\alpha - \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ alors $u_n = U'_n - U'_{n-1}$ or $u_n \sim \frac{\alpha}{2} n^{\alpha-1}$ donc $U'_n \sim \frac{n^\alpha}{2}$.

Solution 3.2.3 On fait un développement limité en $\frac{1}{n}$, on obtient

$$u_n = -\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.

Si on pose $v_n = \frac{e^n n!}{n^{n+1/2}}$: $\ln v_{n+1} - \ln v_n = u_n$ or $\ln v_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + v_1$ et comme $\ln v_n$ a une limite

l , $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e^l$.

C'est le début de la démonstration de la *formule de Stirling* page 244.

Solution 3.2.4 On écrit que $n^3 - 4n + 2 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) - 3n + 2$ d'où

$$\frac{n^3 - 4n + 2}{n!} = \frac{2}{n!} - \frac{3}{(n-1)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-3)!}$$

(en posant $\frac{1}{p!} = 0$ si $p < 0$). On obtient alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3 - 4n + 2}{n!} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 3 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} = 3e$$

car $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Plus généralement

$$\begin{aligned} S_p &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{p-1}}{(n-1)!} \text{ en simplifiant} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^{p-1}}{n!} \text{ en renumérotant} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} S_k \text{ en développant.} \end{aligned}$$

Avec le programme simple qui suit, on trouve $S_{15} = 1382958545e$ et $S_{20} = 51724158235372e$.

```
S:=proc(n) option remember;
if n= 0 then 1
else sum('binomial((n-1),k) '*S(k)', 'k'=0..n-1)
fi
end;
```

Solution 3.2.5 En utilisant une transformation d'Abel (notion qui n'est plus au programme mais qui peut servir) on a

$$S_n = \sum_{p=1}^n p(r_{p-1} - r_p) = \sum_{p=0}^{n-1} (p+1)r_p - \sum_{p=1}^n pr_p = R_{n-1} - nr_n.$$

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n$ converge alors $S_n \leq R_{n-1}$ donc (S_n) converge (et on a même l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n = \sum_{n=0}^{+\infty} r_n$).

Réciproquement : $nr_n = n \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ka_k$: donc, si $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nr_n = 0$.

Solution 3.2.6

- (1) $\ln \left(n \sin \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \Rightarrow u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ convergence.
- (2) $\frac{\text{ch } \pi/n}{\cos \pi/n} = 1 + \frac{\pi^2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow u_n \sim \frac{\pi^2}{n^2}$ convergence.
- (3) $\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow u_n = \frac{1}{n} e^{-2 \ln n/n + o(\ln n/n)} \Rightarrow u_n \sim \frac{1}{n}$ divergence.
- (4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $\sin u_n = \frac{\sqrt{2n^3+3}}{n^3+2} \sim \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}} \Rightarrow u_n \sim \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}$ convergence.
- (5) $\ln u_n = -\frac{1}{6n^{2-\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2-\alpha}}\right)$: $\alpha \leq 2$ divergence, $\alpha > 2$ convergence.
- (6) $u_n = \left(\frac{a}{3} - \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ convergence ssi $a = \frac{9}{2}$.
- (7) $\sin u_n \sim -\frac{1}{n} \Rightarrow u_n \sim -\frac{1}{n}$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$) divergence.

Solution 3.2.7 Si $n > 0$ alors $10^{p_n-1} \leq n < 10^{p_n}$ donc $p_n - 1 \leq \log n < p_n$ et on a bien : $p_n \sim \log n$.

- Si $\boxed{\alpha < 0}$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n^\alpha = 0$ divergence car u_n ne tend pas vers 0 (cf *théorème 5.32 page 238*).
- Si $\boxed{\alpha = 0}$ alors : $u_n = \frac{1}{n}$ divergence (on retrouve la série harmonique).
- Si $\boxed{\alpha > 0}$ alors : $\exists n_0, \forall n \geq n_0, -p_n^\alpha < -2$. On a donc, pour $n \geq n_0, 0 < u_n < \frac{1}{n^2}$ d'où la convergence (par la *proposition 5.3.2 page 239*).

Solution 3.2.8 Posons $u_n = \frac{s_n}{n^\alpha}$. On a $u_n = \frac{1}{n^\alpha} + v_n$ où $v_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n}$ donc

$$0 < \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha$$

et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha = \frac{1}{2}$ alors $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ converge (on utilise la comparaison logarithmique, proposition 5.3.5 page 241).

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est alors de même nature que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Solution 3.2.9

- (1) On prouve la propriété demandée par récurrence :
vu que $\sqrt{x_1} \leq \sqrt{1+x_1}$, la propriété est vérifiée à l'ordre 1.
Supposons la vérifiée à l'ordre n , alors, pour $x \in S$ on a

$$x_1 f_n(x_2, \dots, x_{n+1}) \leq f_{n+1}^2(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq (1+x_1) f_n(x_2, \dots, x_{n+1})$$

alors, en utilisant l'hypothèse de récurrence et en prenant les racines carrées, on arrive à :

$$\prod_{k=1}^{n+1} x_k^{2^{-k}} \leq f_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq \prod_{k=1}^{n+1} (1+x_k)^{2^{-k}}$$

ce qui achève la récurrence.

- (2) On pose $u_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. En effet, $u_1 \leq u_2$ et par récurrence, si l'on suppose $u_{n-1} \leq u_n$ alors

$$u_{n+1} = \sqrt{1+x_1 f_n(x_2, \dots, x_{n+1})} \geq u_n = \sqrt{1+x_1 f_{n-1}(x_2, \dots, x_n)}.$$

Grâce à l'inégalité du 1., en prenant le logarithme et en remarquant que $\ln(1+x) \leq \ln(2x)$ pour $x \geq 1$, on arrive à

$$\sigma_n \leq \ln u_n \leq \sigma_n + \sum_{k=1}^n \frac{\ln 2}{2^k}$$

où $\sigma_n = \sum \frac{1}{2^n} \ln x_n$. Comme les suites $(\ln u_n)$ et (σ_n) sont croissantes, elles sont de même nature c.q.f.d.

Solution 3.2.10 On prouve par une récurrence immédiate que $u_n \in]0, \pi/2[$ et même que $0 < u_{n+1} < \frac{u_0}{2^n}$ (car $\sin x \leq x$ pour $x > 0$). Donc $u_n \rightarrow 0$.

Pour $x > 0$, on vérifie que $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ donc

$$\frac{1}{2} u_n \left(1 - \frac{u_n^2}{6} \right) < u_{n+1} < \frac{1}{2} u_n$$

i.e. en posant $v_n = 2^n u_n$

$$0 < v_n - v_{n+1} < v_n \frac{u_n^2}{6}.$$

La série $\sum v_n \frac{u_n^2}{6}$ converge car $0 < v_n \leq v_0$ et $u_n^2 \leq \frac{u_0}{2^n}$.

La série aux différences $\sum v_n - v_{n+1}$ converge donc la suite (v_n) converge, soit k sa limite. Il reste à montrer que $k > 0$: on a

$$v_0 - k = \sum_{n=0}^{+\infty} (v_n - v_{n+1}) < \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \frac{u_n^2}{6} < \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_0^3}{6 \cdot 2^{2n}} = \frac{2u_0^3}{9} < u_0$$

et comme $v_0 = u_0$ alors $k > 0$ c.q.f.d.

Solution 3.2.11

- (1) f est continue, strictement monotone car f est injective. f est nécessairement croissante (sinon f a une limite nulle en $+\infty$ et la série diverge).

Ensuite $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{f(k)} \geq \frac{n}{f(2n)} > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{f(2n)} = 0$.

Comme $x > 0$ alors, avec $n = E(x/2)$ on a

$$0 \leq \frac{x}{f(x)} \leq \frac{2n+1}{f(2n)}$$

et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{f(x)} = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{f(2n)} = 0$.

- (2) On a $\text{Card}\{k | f(k) \leq n\} = \text{Card}\{k | k \leq f^{-1}(n)\} = E(f^{-1}(n)) \leq f^{-1}(n)$ (E désigne ici la partie entière) donc

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{f(k) \leq n} f(k) \leq \frac{1}{n} \text{Card}\{k | f(k) \leq n\} \leq \frac{f^{-1}(n)}{n}.$$

Le 1. nous permet d'affirmer que $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(y)}{y} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{f(k) \leq n} f(k) = 0$.

Solution 3.2.12 En réorganisant les termes, on écrit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n v_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{p=k}^{2k-1} u_p \\ &= \sum_{p=1}^{2n-1} u_p \sum_{k=[p/2]+1}^{\inf(p,n)} \frac{1}{k} \\ &= \sum_{p=1}^{2n-1} u_p x_p. \end{aligned}$$

En effet, si on pose $E_n = \{(k, p) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq k \leq n, k \leq p \leq 2k-1\}$ alors on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} (k, p) \in E_n &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq k \leq n \\ k \leq p, k \geq \frac{p}{2} - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p}{2} - 1 \leq k \leq \inf(n, p) \\ 1 \leq p \leq 2n-1 \end{cases} \end{aligned}$$

En remarquant que

- si $1 \leq p \leq n$ alors $x_p = \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + \dots + \frac{1}{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1}$ et donc $\frac{1}{2} \leq x_p \leq 1$ en distinguant les cas p pair ($p = 2k$) et p impair ($p = 2k+1$),
- si $p > n$ alors $0 \leq x_p \leq 1$.

On arrive à

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=1}^n v_k \leq \sum_{k=1}^{2n-1} u_k.$$

d'où l'équivalence par utilisation de la *proposition 5.3.2 page 239*.

Solution 3.2.13 On trouve $a = \frac{34217}{99900}$, $b = \frac{63}{37}$, $c = \frac{25642}{333333}$.

Solution 3.2.14 On distingue deux cas :

- $v_n \not\rightarrow 0$, la série $\sum v_n$ diverge grossièrement.
- $v_n \rightarrow 0$ alors $v_n \sim -\ln\left(1 - \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n}\right) = -\ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = w_n$.
 $w_n = \ln u_n - \ln u_{n+1}$ est le terme général d'une série aux différences et comme $u_n \rightarrow 0$, $\ln u_n \rightarrow -\infty$ donc $\sum w_n$ diverge, il en est de même de $\sum v_n$.

Conclusion : dans les deux cas la série $\sum v_n$ diverge.

Solution 3.2.15

- Si (u_n) converge alors, comme cette suite est croissante, il existe $M > 0$ tel que $u_n \leq M$ d'où, comme $a_n = u_n(u_{n+1} - u_n)$, on a $a_n \leq M(u_{n+1} - u_n)$.
La série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge donc $\sum a_n$ converge.
- Si $\sum a_n$ converge alors, comme $a_n \geq u_0(u_{n+1} - u_n)$, on en déduit que la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge donc la suite (u_n) converge.

Solution 3.2.16

- Si $n = a_p 2^p + \dots + a_1 2 + a_0$ est l'écriture de $n \in \mathbb{N}^*$ en base 2 avec $a_p = 1$ alors $n \geq 2^p$ et $b_n \leq p + 1$ (égalité lorsque tous les a_i sont égaux à 1). Or $\ln n \geq p \ln 2$ d'où $b_n \leq \frac{\ln n}{\ln 2}$.

Pour conclure à la convergence, il suffit de remarquer que $n^{3/2} \frac{b_n}{n(n+1)} \rightarrow 0$.

- Si $k = a_p 2^p + \dots + a_1 2 + a_0$ alors $2k = a_p 2^{p+1} + \dots + a_1 2^2 + a_0 2$ d'où

$$b_{2k+1} = a_p + \dots + a_1 + a_0 + 1 = b_{2k} \text{ et } b_{2k} = a_p + \dots + a_1 + a_0 = b_k.$$

Comme la série $\sum \frac{b_n}{n(n+1)}$ converge, on peut, pour calculer la somme, grouper les termes 2 par 2 :

$$\begin{aligned} b_{2k} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) + b_{2k+1} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) &= b_{2k} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) + (b_{2k} + 1) \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \right) \\ &= b_{2k} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} \right) + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} \end{aligned}$$

d'où, si on appelle S la somme de la série, comme chacune des séries $\sum b_{2k} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2} \right)$ et $\sum \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$ convergent

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{b_{2k}}{k(k+1)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}}_{=\ln 2} \\ &= \frac{S}{2} + \ln 2 \end{aligned}$$

donc $S = 2 \ln 2$.

Solution 3.3.1

(1) Par un développement limité, on a

$$c_n - c_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(1 - 1/n) \sim -\frac{1}{2n^2}$$

donc la série aux différences $\sum_{n=2}^{+\infty} (c_n - c_{n-1})$ converge et, par conséquent la suite (c_n) converge (on a affaire à une série télescopique).

(2) Par une décomposition de fraction rationnelle, on a

$$u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{n}$$

donc

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{p=1}^n u_p = 2 \left(\sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} \right) + \frac{1}{2n+1} - 1 - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \\ &= 2(\ln(2n) + c_{2n}) - 2(\ln n + c_n) + \frac{1}{2n+1} - 1 \end{aligned}$$

et par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2 \ln 2 - 1$.

Solution 3.3.2 On effectue les développements limités suivants :

$$\ln \beta_n = -\frac{a}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \ln \alpha_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$\text{d'où } u_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{converge}} - \frac{a+1}{n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{\text{converge}}.$$

Conclusion : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge ssi $a = -1$.

Solution 3.3.3 On a $b_n \leq a_n$.

- si $\sum a_n$ converge alors $\sum b_n$ converge.
- Si $\sum b_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ et $a_n = \frac{b_n}{1-b_n} \sim b_n$ (on utilise le *théorème 5.36 page 242*) donc $\sum a_n$ converge.

$c_n \leq \frac{a_n}{n^2 a_n} = \frac{1}{n^2}$ ($a_n \neq 0$) donc $\sum c_n$ converge (indépendamment de la nature de la série $\sum a_n$).

Solution 3.3.4

(1) et (2) Par un développement limité en $\frac{1}{n}$, on a

$$\ln a_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha-1}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)$$

- Si $\boxed{2\alpha - 1 < 0}$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n^2 a_n) = -\infty$ donc la série $\sum (a_n - l)$ converge (par comparaison des séries, *proposition 5.3.2 page 239*).
- Si $\boxed{2\alpha - 1 = 0}$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{e}}$: $a_n - \frac{1}{\sqrt{e}} \sim \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{1}{3\sqrt{n}}$ donc la série $\sum a_n$ diverge (cf *théorème 5.36 page 242*).

- Si $\boxed{2\alpha - 1 > 0}$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$, et $a_n - 1 \sim -\frac{1}{2n^{2\alpha-1}}$ d'où la convergence ssi $\alpha > 1$.

Solution 3.3.5

- Pour $\alpha < 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$: divergence.
- $\alpha = 0$, $u_n = n$: divergence.
- $0 < \alpha < 1$, $u_n \geq e^{-n^\alpha} \int_{n-1}^n e^t dt \geq u'_n = e^{(n-1)^\alpha - n^\alpha}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u'_n = 1$: divergence.
- $\alpha = 1$: divergence.
- $1 < \alpha \leq 2$, $e^{n^\alpha} u_n = \int_0^1 e^{t^\alpha} dt + v_n$ où

$$v_n = \underbrace{\left[\frac{1}{\alpha} e^{t^\alpha} t^{1-\alpha} \right]_1^n}_{= \frac{1}{\alpha} (e^{n^\alpha} n^{1-\alpha} - e)} + \underbrace{\frac{\alpha-1}{\alpha} \int_1^n e^{t^\alpha} t^{-\alpha} dt}_{> 0}$$

(en faisant une intégration par parties) donc $v_n \geq \frac{1}{\alpha} (e^{n^\alpha} n^{1-\alpha} - e)$ ce qui donne la minoration $u_n \geq \frac{1}{\alpha n^{\alpha-1}} - \frac{e^{1-n^\alpha}}{\alpha}$: divergence.

- $\alpha > 2$, $u_n \sim v_n e^{-n^\alpha}$ et en reprenant l'intégration par parties précédente, en majorant l'intégrale $\int_1^n e^{t^\alpha} t^{-\alpha} dt$ par v_n ($t^{-\alpha} \leq 1$) on arrive à l'inégalité

$$v_n \leq \frac{e^{n^\alpha} n^{1-\alpha}}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha} v_n$$

ce qui s'écrit finalement $v_n \leq \frac{e^{n^\alpha}}{n^{\alpha-1}}$: convergence.

Solution 3.4.1 En faisant le changement de variable $t = n\pi + x$ on obtient

$$u_n = (-1)^n \int_0^\pi \frac{(n\pi + x) \sin x}{1 + (n\pi + x)^2} dx.$$

Comme $f : X \mapsto \frac{X}{1+X^2}$ est une fonction décroissante pour $X \geq 1$ alors on en déduit que $(|u_n|)$ est décroissante pour $n \geq 1$ ($\sin x$ est ≥ 0 sur $[0, \pi]$).

Ensuite en majorant le sinus par 1, on a

$$|u_n| \leq \int_0^\pi \frac{n\pi + x}{1 + (n\pi + x)^2} dx \leq \pi \times \frac{n\pi}{1 + (n\pi)^2} \rightarrow 0$$

(en utilisant la décroissance de f) d'où $\sum u_n$ converge.

Comme $|u_n| \geq f(n+1) \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2(n+1)\pi}{1 + (n+1)^2\pi^2}$ alors $\sum |u_n|$ diverge.

Solution 3.4.2 On a l'encadrement suivant

$$0 \leq \int_0^{1/n} \frac{\ln t}{1+t} dt - \int_0^{1/n} \ln t dt = - \int_0^{1/n} \frac{t}{1+t} \ln t dt \leq - \int_0^{1/n} t \ln t dt = \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{4n^2}.$$

Comme $\int_0^{1/n} \ln t dt = -\frac{\ln n}{n} - \frac{1}{n}$ on a : $|u_n| = \left(\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \right) n^\alpha$. D'où la discussion :

- $\alpha \geq 1$ la série diverge car $u_n \not\rightarrow 0$,
- $0 \leq \alpha < 1$ la série converge comme somme de 2 séries alternées et d'une série absolument convergente,
- $\alpha < 0$ la série converge comme somme de 3 séries absolument convergentes.

On a utilisé le résultat de la *question (i) page 244* sur les séries de Bertrand.

Solution 3.4.3

(1) On écrit dans un premier temps

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^N u_n &= \sum_{n=2}^N \frac{\ln n}{n} - \int_{3/2}^{N+1/2} \frac{\ln t}{t} dt \\ &= \underbrace{\sum_{n=2}^N \left(\frac{\ln n}{n} - \int_{n-1}^n \frac{\ln t}{t} dt \right)}_{=s_N} - \underbrace{\int_N^{N+1/2} \frac{\ln t}{t} dt}_{\rightarrow 0} + \int_1^{3/2} \frac{\ln t}{t} dt. \end{aligned}$$

Or $\varphi'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} < 0$ (pour $t > e$) i.e. φ est décroissante donc on peut appliquer le théorème de comparaison série-intégrale (cf. *théorème 5.38 page 243*) ce qui entraîne que s_N a une limite et que la série $\sum u_n$ converge.

(2) Si on pose s_n la somme partielle de la série $\sum u_n$, on a

$$\ln v_n = -\frac{\ln^2 n}{2} + \sum_{p=1}^n \frac{\ln p}{p} = s_n + \frac{1}{2} [\ln^2(n+1/2) - \ln^2 n] - \frac{\ln^2 2}{2}$$

qui tend vers $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n - \frac{\ln^2 2}{2}$ d'où $\prod_{q=1}^n \sqrt[q]{q} \sim e^a e^{(\ln n)^2/2}$.

Solution 3.4.4

(1) Si $\sum u_n$ converge alors $s_n \sim s : \frac{u_n}{s_n} \sim \frac{u_n}{s} \Rightarrow \sum \frac{u_n}{s_n}$ converge (de même pour $v_n \sim \frac{u_n}{s^\alpha}$).
Si $\sum \frac{u_n}{s_n}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$, alors on a :

$$\frac{u_{n+1}}{s_{n+1}} + \dots + \frac{u_{p+n}}{s_{p+n}} \geq \frac{u_{n+1} + \dots + u_{p+n}}{s_{p+n}} = \frac{s_{p+n} - s_n}{s_{p+n}} = 1 - \frac{s_n}{s_{p+n}}$$

et on fait tendre p vers ∞ d'où $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{u_p}{s_p} \geq 1$ ce qui est contradictoire (car $R_n \rightarrow 0$).

On peut aussi dire que, si $\sum u_n$ diverge :

si $\frac{u_n}{s_n}$ ne tend pas vers 0 la série $\sum \frac{u_n}{s_n}$ diverge,

sinon $\frac{u_n}{s_n} \rightarrow 0$, alors $-\frac{u_n}{s_n} \sim \ln \left(1 - \frac{u_n}{s_n} \right) = \ln \frac{s_{n-1}}{s_n}$: la série $\sum (\ln(s_{n-1}) - \ln(s_n))$

converge donc $\ln(s_n)$ converge et par conséquent $\sum u_n$ converge c.q.f.d. (Ici, on a utilisé le *théorème 5.36 page 242*.)

(2) Si $\sum u_n$ converge alors $\sum \frac{u_n}{s_n^\alpha}$ converge (même argument qu'au 1.). On ne s'intéresse plus maintenant qu'au cas où $\sum u_n$ diverge.

- Si $\alpha \leq 1$: $\frac{u_n}{s_n} \leq \frac{u_n}{s_n^\alpha}$ dès que $s_n \geq 1$ alors $\sum v_n$ diverge.

- Si $\alpha > 1$: la série $\sum v_n$ converge, en effet $v_n \leq \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{s_{n-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{s_n^{\alpha-1}} \right)$ et donc

$$\sum_{p=1}^n v_n \leq \frac{1}{\alpha - 1} \left(\frac{1}{s_0^{\alpha-1}} - \frac{1}{s_n^{\alpha-1}} \right)$$

qui a bien une limite.

Solution 3.5.1 Avec $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$, on a $k(S_k - S_{k-1}) = a_k$ valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ en posant $S_0 = 0$ d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k(S_k - S_{k-1}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n kS_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)S_k \text{ en faisant une translation d'indice} \\ &= S_n - \frac{S_0 + \dots + S_{n-1}}{n} \text{ en simplifiant.} \end{aligned}$$

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = 0$ grâce au théorème de Césaro.

Solution 3.5.2 Soit $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ une base orthonormée telle que $\vec{r} = r \cdot \vec{K}$.

On utilise la notation complexe dans le plan (\vec{I}, \vec{J}) , comme $\vec{r} \wedge \vec{x}_0 \in \text{Vect}(\vec{I}, \vec{J})$, si on pose $\vec{x}'_0 = \text{proj}_{(\vec{I}, \vec{J})}(\vec{x}_0)$ alors : $x_n = (ri)^n x'_0$ où x_n et x'_0 désignent les affixes des vecteurs \vec{x}_n et \vec{x}'_0 .

La série $\sum \frac{1}{n!} \vec{x}_n$ est A.C. car $\|\vec{x}_n\| = r^n \|\vec{x}'_0\|$ est le terme général d'une série géométrique convergente donc $\sum \frac{\vec{x}_n}{n!}$ converge (cf *théorème 5.41 page 245*) et, en revenant aux affixes,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x_n = x_0 - x'_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ri)^n}{n!} x'_0 = (x_0 - x'_0) + \cos r x'_0 + i \sin r x'_0.$$

R est la rotation d'axe $(0, \vec{r})$ et d'angle r .

Solution 3.5.3 On a $n\sigma_n = \sum_{k=1}^n s_k = \sum_{k=2}^n \left(\sum_{i=1}^{k-1} u_i \right) = n s_n - \sum_{i=1}^{n-1} i u_i$. On fait ensuite la différence des relations obtenues avec n et $n+p$, d'où

$$(n+p)\sigma_{n+p} - n\sigma_n = (n+p)s_{n+p} - n s_n - \sum_{i=n}^{n+p-1} i u_i$$

soit encore :

$$(n+p)\sigma_{n+p} - n\sigma_n = p s_{n+p} + n(s_{n+p} - s_n) - \sum_{i=n}^{n+p-1} i u_i$$

i.e.

$$p(s_{n+p} - \sigma) = (n+p)(\sigma_{n+p} - \sigma) - n(\sigma_n - \sigma) + \sum_{i=n}^{n+p-1} (i-n)u_i.$$

L'hypothèse $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \sigma$ nous permet de majorer $|\sigma_n - \sigma| < \varepsilon$ pour $n \geq N$, d'où, avec la relation précédente :

$$|s_{n+p} - \sigma| \leq \left(\frac{2n}{p} + 1 \right) \varepsilon + \frac{p}{2n} A,$$

en majorant $|u_i|$ par $\frac{A}{i}$ et en divisant par p .

En effet, si l'on pose $\omega_{n,p} = \sum_{i=n}^{n+p-1} \frac{i-n}{i}$ alors $\omega_{n,p} \leq \sum_{i=n+1}^{n+p-1} \frac{i-n}{n} = \frac{p(p-1)}{2n} \leq \frac{p^2}{2n}$ donc

$$\left| \sum_{i=n}^{n+p-1} (i-n)u_i \right| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} (i-n)|u_i| \leq A\omega_{n,p} \leq A \frac{p^2}{2n}.$$

On note $\Delta_\varepsilon = \{(n, p) \in \mathbb{N}^2 \mid n \geq N, n\sqrt{\varepsilon} \leq p \leq 2n\sqrt{\varepsilon}\}$, pour $(n, p) \in \Delta_\varepsilon$ on a :

$$|s_{n+p} - \sigma| \leq (2+A)\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon = \varepsilon'.$$

En étudiant la fonction $f : x \mapsto (2+A)\sqrt{x} + x$ sur $]0, +\infty[$ on montre que f réalise une bijection bicontinue (un homéomorphisme) de $]0, +\infty[$ sur lui-même et donc que pour tout $\varepsilon' > 0$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(\varepsilon) = \varepsilon'$ donc on conservera ε par la suite.

Montrons que, si $N\sqrt{\varepsilon} \geq (1 + \sqrt{\varepsilon})$ (i.e. $N \geq 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$) alors

$$\bigcup_{n=N}^{+\infty} [n(\sqrt{\varepsilon} + 1), n(2\sqrt{\varepsilon} + 1)] = [N(\sqrt{\varepsilon} + 1), +\infty[.$$

En effet, pour tout $n \geq N$ on a $(n+1)(\sqrt{\varepsilon} + 1) \leq n(2\sqrt{\varepsilon} + 1)$ donc les intervalles qui figurent à gauche ne sont pas disjoints, ils forment donc un recouvrement de l'intervalle $[N(\sqrt{\varepsilon} + 1), +\infty[$. Si $q \geq N(\sqrt{\varepsilon} + 1)$ alors il existe $n \geq N$ tel que $n(\sqrt{\varepsilon} + 1) \leq q \leq n(2\sqrt{\varepsilon} + 1)$ et donc

$$n\sqrt{\varepsilon} \leq q - n = p \leq 2n\sqrt{\varepsilon}$$

donc $(n, p) \in \Delta_\varepsilon$ et $|s_q - \sigma| \leq \varepsilon'$.

On peut alors conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \sigma$.

Remarque : on a ainsi une réciproque au théorème de Césaro.

Solution 3.5.4

(1) On part des résultats suivants connus :

- $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ et $\|T^{p+q}\| \leq \|T^p\| \cdot \|T^q\|$,
- $x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, $\alpha + \beta = 1$.

On en déduit immédiatement :

(i) $0 \leq u_n \leq \|T\|$ (la suite (u_n) est bornée),

(ii) $u_{p+q} \leq (u_p)^{\frac{p}{p+q}} (u_q)^{\frac{q}{p+q}} \leq \frac{pu_p + qu_q}{p+q}$ (voir l'inégalité de la question (iii) page 72) et

(iii) $u_{mq} \leq u_q$.

Soit $l = \inf(u_n)$, pour $\varepsilon > 0$, soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $l \leq u_q \leq l + \varepsilon/2$. Si $n \geq q$, on effectue la division de n par q : $n = mq + r$, on exploite alors successivement (ii) et (iii) :

$$u_n \leq \frac{mqu_{mq} + ru_r}{mq+r} \leq \frac{mqu_q + ru_r}{mq+r} \leq u_q + \frac{q}{n} \|T\|.$$

On choisit alors $n \geq n_0$ pour que $\frac{q}{n} \|T\| \leq \varepsilon/2$ et on peut conclure $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. l est appelé *rayon spectral* de T .

- (2) Si $l < 1$, il existe n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq \frac{1+l}{2} = k < 1$, donc la série de terme général $L = \sum T^n$ converge car elle converge absolument par comparaison à la série géométrique k^n (cf *théorème 5.41 page 245*).

On vérifie alors que

$$\left(\sum_{n=0}^N T^n \right) (I - T) = (I - T) \left(\sum_{n=0}^N T^n \right) = I - T^{N+1}$$

et, en passant à la limite (grâce à la continuité du produit dans $\mathcal{L}(E)$) on a $L(I - T) = (I - T)L = I$.

- (3) Comme E est complet, $\mathcal{LC}(E)$ l'est aussi :

soit (f_n) une suite de Cauchy, on pose $g_n = f_n|_{S(0,1)}$ restriction de f_n à la sphère unité. La suite (g_n) converge ($\mathcal{B}(A)$ est un espace de Banach), soit g sa limite. On définit alors

$$f \text{ sur } E \text{ par } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \|x\|g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \text{ alors } (f_n(x)) \text{ converge pour tout } x \text{ de } E$$

vers $f(x)$. f est linéaire et continue. Vu que $\|f_n(x) - f_{n+p}(x)\| \leq \varepsilon$ pour $x \in S(0,1)$ alors, quand $p \rightarrow +\infty$, $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$.

La série donnant L converge (le *théorème 5.41 page 245* s'applique aussi en dimension quelconque à condition que l'espace en question soit complet).

Solution 3.5.5

- (1) • Si $a = 1$ montrons que $\left(\frac{1}{a^p + b^q}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ n'est pas convergente. En effet, si la série

$$\sum \frac{1}{1 + b^q} \text{ converge alors la somme ne dépendant pas de } p, \text{ la série } \sum_p \left(\sum_q \frac{1}{1 + b^q} \right)$$

diverge donc on peut affirmer que la suite double $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{a^p + b^q}$ ne converge pas. Si

la série $\sum \frac{1}{1 + b^q}$ diverge alors la suite double diverge à fortiori.

- Si $a < 1$ alors on utilise l'inégalité $\frac{1}{a^p + b^q} \geq \frac{1}{1 + b^q}$ et là encore, la suite n'est pas convergente.

Ce que l'on a fait pour a peut être répété à l'identique avec b . On ne s'intéresse plus maintenant qu'au cas où $a > 1$ et $b > 1$.

Il suffit de majorer le terme général par une série double convergente. Comme $x^2 + y^2 \geq 2xy$, alors, en prenant $x = a^{p/2}$ et $y = b^{q/2}$ on obtient $\frac{1}{a^p + b^q} \leq \frac{1}{2} a^{-p/2} b^{-q/2}$ et comme chaque série $\sum a^{-p/2}$ et $\sum b^{-q/2}$ est convergente, il en est de même pour la suite étudiée.

- (2) $e^{-ap-bq} = e^{-ap}e^{-bq}$ et chaque série intervenant dans le produit est convergente donc la série double est convergente (pour tout couple (a, b)). On peut même en donner la somme qui est $\frac{1}{(1 - e^{-a})(1 - e^{-b})}$.

Solution 3.5.6 On remarque tout d'abord que $u_{p,q} = \frac{p+q}{(1+p^\alpha)(1+q^\beta)} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha-1}}$ donc la convergence de $(u_{p,q})$ entraîne $\alpha > 2$, de même pour β .

- (i) \Rightarrow (ii) est immédiat car $(1+p^\alpha) \leq (1+p)^\alpha$ (étudier la fonction $f(t) = (1+t)^\alpha - 1 - t^\alpha$) et $(1+q^\beta) \leq (1+q)^\beta$ pour tout (p, q) de \mathbb{N}^2 donc

$$0 \leq \frac{p+q}{(1+p)^\alpha(1+q)^\beta} \leq \frac{p+q}{(1+p^\alpha)(1+q^\beta)}$$

ce qui permet de conclure.

- (ii) \Rightarrow (iii) Si $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{p+q}{(1+p)^\alpha(1+q)^\beta}$ est convergente alors, pour tout q dans \mathbb{N} , la série $\sum_p \frac{p+q}{(1+p)^\alpha(1+q)^\beta}$ est convergente et en particulier pour $q=0$. On a donc $\sum_p \frac{p}{(1+p)^\alpha}$ qui est convergente, d'où $\alpha > 2$ car $\frac{p}{(1+p)^\alpha} \sim \frac{1}{p^{\alpha-1}}$ (en fait c'est le même argument que celui développé en préambule). De même, on a $\beta > 2$.
- (iii) \Rightarrow (i) On utilise ici la comparaison série-intégrale (*théorème 5.38 page 243*). Soit $f(x) = \frac{x+q}{(1+x^\alpha)(1+q^\beta)}$. Si $q \geq 1$ et $x \geq 1$ alors f est décroissante ($f'(x) = \frac{1 - \alpha q x^{\alpha-1} + (1-\alpha)x^\alpha}{(1+x^\alpha)^2(1+q^\beta)} < 0$ pour $x \geq 1$) donc $f(p) \leq \frac{1}{1+q^\beta} \int_{p-1}^p \frac{x+q}{1+x^\alpha} dx$. On a alors

$$\sum_{p>0} f(p) \leq f(1) + \frac{1}{1+q^\beta} \int_1^{+\infty} \frac{x+q}{1+x^\alpha} dx = O\left(\frac{1}{q^{\beta-1}}\right)$$

car $f(1) = \frac{1+q}{2(1+q^\beta)}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{x+q}{1+x^\alpha} dx = A + Bq$. Vu que les séries correspondantes à $p=0$ et $q=0$ convergent on a la conclusion : la série double est bien convergente et on a prouvé toutes les équivalences.

Solution 3.5.7

- (1) On a $\zeta(n) - 1 = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}$ donc la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n}$ est bien absolument convergente et la série double $\sum_{(p,n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^2} \frac{1}{np^n}$ est convergente (cf *théorème 5.47 page 247*).

Si on appelle S la somme de cette suite double, on a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n) - 1}{n} \\ &= \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{np^n} \right) \\ &= - \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} + \ln \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right) \end{aligned}$$

en utilisant le développement de $\ln(1-x)$ pour $|x| < 1$.

Calculons $S_q = \sum_{p=2}^q \left(\frac{1}{p} + \ln \left(1 - \frac{1}{p} \right) \right)$, la somme des logarithmes se simplifie ($1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$) et on obtient $S_q = \sum_{p=2}^q \frac{1}{p} - \ln q$ qui tend vers $\gamma - 1$ d'où la conclusion :

$$S = 1 - \gamma.$$

(2) La série proposée converge car elle est alternée, comme à la question précédente on va s'intéresser à la somme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\zeta(n) - 1)}{n}$
 $\zeta(n) - 1 = \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p^n} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^n} = \frac{1}{n-1}$ donc la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\zeta(n) - 1)}{n}$ est bien absolument convergente et la série double $\sum_{(p,n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0,1\})^2} \frac{(-1)^n}{np^n}$ est convergente (cf *théorème 5.47 page 247*).

Si on appelle S la somme de cette suite double, on a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n(\zeta(n) - 1)}{n} \\ &= \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{np^n} \right) \\ &= \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right) \end{aligned}$$

en utilisant le développement de $\ln(1+x)$ pour $|x| < 1$.

Calculons $S_q = \sum_{p=2}^q \left(\frac{1}{p} - \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right)$, la somme des logarithmes se simplifie ($1 + \frac{1}{p} = \frac{p+1}{p}$) et on obtient $S_q = -1 + \sum_{p=1}^q \frac{1}{p} - \ln(q+1) + \ln 2$ qui tend vers $\gamma - 1 + \ln 2$. d'où la conclusion :

$$S = 1 - \gamma + \ln 2.$$

Et comme $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 - \ln 2$ alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \zeta(n)}{n} = S - 1 - \ln 2 = \gamma.$$

Solution 3.5.8 Montrons que la série $\sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} |z|^{bn+cp+apn}$ est convergente pour $|z| < 1$. On a

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p \in \mathbb{N}} |z|^{bn+cp+apn} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|z|^{bn}}{1 - |z|^{c+an}}$$

et cette dernière série converge car $\frac{|z|^{bn}}{1 - |z|^{c+an}} \leq \frac{|z|^{bn}}{1 - |z|^2}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison < 1 (cf *théorème 5.47 page 247*).

On peut alors faire les calculs formellement, l'interversion des sommes sur n et sur p ne posant pas de problème.

Solution 3.5.9 Comme $|x^2 a^{2n}| < 1$, on peut écrire

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{a^n}{1 + x^2 a^{2n}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} a^n \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{2p} a^{2np} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{a^n}{n!} x^{2p} a^{2np}$$

or la série $\sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} (-1)^p \frac{x^{2p} a^{(2p+1)n}}{n!}$ est convergente.

En effet $\sum_p \frac{|a|^n}{n!} |x|^{2p} |a|^{2np}$ est convergente, de somme $\frac{1}{n!} \frac{|a|^n}{1 - |x^2 a^{2n}|}$. Or, en majorant le terme général par $\frac{1}{n!} \frac{|a|^n}{1 - |x^2 a^2|}$ on obtient une série convergente de somme $\frac{e^{|a|}}{1 - |ax|^2}$. Le *théorème 5.47 page 247* s'applique donc et on peut intervertir les sommations dans l'égalité (1) d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{a^n}{1 + x^2 a^{2n}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2p} (-1)^p \frac{a^n}{n!} a^{2np} = \sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p} (-1)^p e^{a^{2p+1}}.$$

Solution 3.5.10 Calculons $\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{q!}{(p+q+2)!}$:

cette série converge car $\frac{q!}{(p+q+2)!} = \frac{1}{(p+q+2)(\dots)(q+1)} \sim \frac{1}{q^{p+2}}$. Pour calculer la somme, on fait intervenir une série aux différences :

$$\frac{1}{(q+1)(\dots)(p+q+2)} = \frac{1}{p+1} \left[\frac{1}{(q+1)(\dots)(p+q+1)} - \frac{1}{(q+2)(\dots)(p+q+2)} \right]$$

d'où $\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{q!}{(p+q+2)!} = \frac{1}{(p+1)^2}$.

On peut alors conclure directement $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{p!q!}{(p+q+2)!} = \frac{\pi^2}{6}$.

Solution 3.5.11

(1) En fait $\overline{\mathbb{R}[X]}$ est l'espace ℓ^1 , la démonstration est alors la même.

(2) Si $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ alors on définit $P.Q = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n X^n$ où $c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p}$.

On sait que la série $\sum |c_n|$ converge donc $P.Q \in \overline{\mathbb{R}[X]}$. Il est alors facile de vérifier que $\overline{\mathbb{R}[X]}$ est une algèbre normée. Comme ℓ^1 est complet, il en est de même de $\overline{\mathbb{R}[X]}$.

(3) Soit $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E , on peut écrire $P_k = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} X^n$ où $a_{n,k}$ est nulle à partir d'un certain rang. Les suites $(a_{n,k})_{k \in \mathbb{N}}$ sont de Cauchy donc elles convergent. De la même manière que l'on montre que ℓ^1 est complet, on peut montrer que P_k converge dans $\overline{\mathbb{R}[X]}$ vers $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ où $a_n = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n,k}$.

Conclusion : toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans $\overline{\mathbb{R}[X]}$.

Solution 4.1.1 Tout d'abord, la suite (g_n) converge simplement vers $g = \frac{f}{1+f^2}$, montrons qu'il y a convergence uniforme :

$$|g_n - g|(x) = |f_n - f|(x) \frac{|1 - f f_n|}{(1+f^2)(1+f_n^2)}(x) \leq \|f_n - f\| \frac{1 + |f| \cdot |f_n|}{(1+f^2)(1+f_n^2)}(x)$$

car $|f_n - f|(x) \leq \|f - f_n\|$ (où $\|f\|$ désigne la norme infinie sur I , norme de la convergence uniforme). Or

$$(1 + xy) \leq (1 + x^2)(1 + y^2) \text{ pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

(étudier par exemple le trinôme en x) donc $|g_n - g|(x) \leq \|f_n - f\|$ et $\|g_n - g\| \leq \|f_n - f\|$ ce qui assure la convergence uniforme de la suite (g_n) .

Généralisation : la raison pour laquelle l'exemple ci-dessus marche tient à l'uniforme continuité de φ sur \mathbb{R} . Il suffit en fait d'avoir l'uniforme continuité de φ sur un intervalle J contenant les images des fonctions f_n .

Solution 4.1.2 Comme $|F_n(t) - F(t)| \leq t^n$ alors

$$\left| \int_0^1 (F_n(t) - F(t)) dt \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 F_n(t) dt = \frac{1}{2}$.

Remarque : on pouvait aussi conclure immédiatement avec le théorème de Lebesgue de convergence dominée (en utilisant la majoration $F_n(t) \leq \frac{1}{1+t}$), cf. *théorème 6.22 page 266*.

Solution 4.1.3

- (1) Convergence simple vers $f(x) = x$ si $x > 0$, $-1/2$ si $x = 0$ et -1 si $x < 0$. convergence uniforme sur $\mathbb{R} \setminus]-a, a[$ pour $a > 0$.
- (2) Convergence simple vers 0, $\|f_n\| = \frac{n^{a-1}}{e(n^2+1)}$: convergence uniforme sur \mathbb{R} ssi $a < 3$, sinon, convergence uniforme sur $[b, +\infty[$ où $b > 0$.
- (3) Convergence simple vers 0, convergence uniforme sur tout compact de \mathbb{R} .
- (4) Convergence simple vers $\sin x$, convergence uniforme sur tout compact de \mathbb{R} .
- (5) Convergence simple vers 0, convergence uniforme sur $[a, \pi/2[$, $a > 0$.
- (6) $x > 0$ pas de convergence simple, $x \leq 0$: convergence simple vers $f(x) = 0$ si $x < 0$, 1 si $x = 0$; convergence uniforme sur $] -\infty, a]$ où $a > 0$.
- (7) $\alpha = 0$: convergence simple vers $f(x) = 1$ si $x = 0$, 0 ailleurs ; $\alpha > 0$: convergence uniforme vers 0.
- (8) On a convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ vers e^{-x} .

On utilise l'inégalité $X - \frac{X^2}{2} \leq \ln(1+X) \leq X$ pour $|X| < 1$ et on l'applique à $X = \frac{x}{n}$ sur l'intervalle $[0, n]$. On a donc

$$x - \frac{x^2}{2n} \leq n \ln(1 + x/n) \leq x$$

et, en prenant les exponentielles, on a l'encadrement suivant :

$$0 \leq e^{-x} - f_n(x) \leq e^{-x}(1 - e^{-x^2/(2n)}) \leq \begin{cases} e^{-x} \text{ ou} \\ 1 - e^{-x^2/(2n)} \end{cases} .$$

Soit $\varepsilon < 1$,

- si $x \geq -\ln \varepsilon$ alors $0 \leq e^{-x} - f_n(x) \leq \varepsilon$
- si $x \leq -\ln \varepsilon$ alors $0 \leq e^{-x} - f_n(x) \leq \underbrace{1 - e^{-(\ln \varepsilon)^2/(2n)}}_{\rightarrow 0}$ donc il existe $N \mid \forall n \geq N$,

$$1 - e^{-(\ln \varepsilon)^2/(2n)} \leq \varepsilon.$$

Conclusion : on a bien convergence uniforme.

Solution 4.1.4 Par récurrence sur n .

$n = 0$: OK

On prend comme hypothèse de récurrence $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}$.

On a alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - P_{n+1}(x) &= \frac{1}{2} [2\sqrt{x} - x - 2P_n(x) + P_n^2(x)] \\ &= \frac{1}{2} [2(\sqrt{x} - P_n(x)) - (x - P_n^2(x))] \\ &= \frac{\sqrt{x} - P_n(x)}{2} [2 - \sqrt{x} - P_n(x)]\end{aligned}$$

Or $2 \geq 2\sqrt{x} \geq \sqrt{x} + P_n(x)$ donc $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \geq 0$ et donc

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - P_{n+1}(x) &\leq \frac{\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} [2 - \sqrt{x} - P_n(x)] \\ &\leq \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} [1 - \sqrt{x}]\end{aligned}$$

et comme $(1 - \sqrt{x})(2 + (n+1)\sqrt{x}) \leq 2 + n\sqrt{x}$ (trivial en développant) donc $\sqrt{x} - P_{n+1}(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{2 + (n+1)\sqrt{x}}$.

On utilise alors l'inégalité $\frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} \leq \frac{2}{n}$ pour conclure à la convergence uniforme.

Pour Q_n , il suffira de prendre les polynômes $Q_n(x) = P_n(x^2)$.

Remarque : cette démonstration sert souvent de préambule à la démonstration du théorème de Stone-Weierstrass qui généralise les théorèmes de Weierstrass (cf. *théorème 5.63 et 5.64 page 256*).

Solution 4.1.5 f est continue sur $[a, b]$ segment donc f est uniformément continue d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - x'| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On prend m entier $\geq \frac{b-a}{\eta}$ et on partage $[a, b]$ en m parties égales ; soit $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned}f_n(x) - f(x) &= f_n(x) - f_n(x_{i+1}) + f_n(x_{i+1}) - f(x_{i+1}) + f(x_{i+1}) - f(x) \\ &\leq |f_n(x_{i+1}) - f(x_{i+1})| + |f(x_{i+1}) - f(x)| \text{ car } f_n \text{ est croissante} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

en choisissant $n \geq N$ assez grand).

On procède de même, en remplaçant x_{i+1} par x_i , on montre que $f_n(x) - f(x) \geq -\varepsilon$.

Conclusion : on a $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ i.e. f_n converge uniformément vers f .

Solution 4.1.6 On écrit P_n sous la forme

$$P_n(x) = a_{0,n} + a_{1,n}x + a_{2,n}x(x-1) + \dots + a_{p,n}x(x-1)(\dots)(x-p+1).$$

- La suite $(P_n(0))$ converge donc $(a_{0,n})$ a une limite notée a_0 ,
- $(P_n(1))$ converge donc, comme $a_{1,n} = P_n(1) - a_{0,n}$, la suite $(a_{1,n})$ a une limite notée a_1 ,
- $(P_n(2))$ converge donc, comme $2a_{2,n} = P_n(2) - a_{0,n} - 2a_{1,n}$, la suite $(a_{2,n})$ a une limite notée a_2 ,
- ...,

- $(P_n(p))$ converge et comme

$$p!a_{p,n} = P_n(p) - a_{0,n} - \frac{p!}{(p-2)!}a_{2,n} - \dots - \frac{p!}{1!}a_{p-1,n}$$

la suite $(a_{p,n})$ a une limite notée a_p .

Donc, par récurrence, on a obtenu

$$\forall x \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_px(x-1)(\dots)(x-p+1) \in \mathbb{C}_p[X].$$

Remarque : on pouvait aussi exprimer directement les coefficients $a_{k,n}$ en fonction des valeurs des $P_n(j)$ et conclure.

Or, sur $\mathbb{C}_p[X]$ (e.v. de dimension finie) les 2 normes $N_1(P) = \sup_{i \in [0,p]} |a_i|$ et $N_A(P) =$

$\sup_{x \in [-A,+A]} |P(x)|$ ($A > 0$) sont équivalentes donc (P_n) convergence uniforme sur tout segment $[-A,+A]$.

Solution 4.1.7

- (1) Grâce à l'inégalité des accroissements finis, $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x+h) - f_n(x)| \leq Mh$ (la suite (f_n) est équicontinue).

Montrons que f limite simple des f_n est continue : par passage à la limite simple dans l'inégalité ci-dessus, on a immédiatement $|f(x+h) - f(x)| \leq Mh$ ce qui justifie la continuité de f .

Choisissons maintenant h tel que $h = \frac{b-a}{n}$ et $Mh \leq \frac{\varepsilon}{3}$, posons $x_i = a + ih$ (h est aussi choisi pour que $|x - x'| \leq h \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{3}$). Alors, pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$:

$$|f(x) - f_m(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f_m(x_i)| + |f_m(x_i) - f_m(x)|.$$

Il suffit maintenant de prendre m tel que $\sup_{i \in [0,n]} |f(x_i) - f_m(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

- (2) La propriété n'est plus vraie sur un intervalle non borné, prendre par exemple $f_n(x) = \sin \frac{n+1}{n}x$ sur \mathbb{R} qui converge simplement vers $\sin x$ sur \mathbb{R} , dont les dérivées sont bornées par 2 et qui ne converge pas uniformément (prendre $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$).

Solution 4.1.8 Comme $\cos \frac{x}{2^n} = 1 - \frac{x^2}{2^{2n+1}} + o\left(\frac{1}{2^{2n+1}}\right)$ alors $u_n \sim -\frac{x^2}{2^{2n+1}}$ et donc $\sum u_n$ converge simplement sur \mathbb{R} .

En fait, tout repose sur la propriété (évidente par récurrence)

$$\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin 2x}{2^{n+1} \sin \frac{x}{2^n}}.$$

On a alors, $s_n(x)$ désignant la somme partielle,

$$s_n(x) = \ln \left(\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right) = \ln \left(\frac{\sin 2x}{2} \right) - \ln \left(2^n \sin \frac{x}{2^n} \right) \rightarrow \ln \left(\frac{\sin 2x}{2x} \right)$$

(pour n assez grand et $x > 0$). Cette formule est aussi valable pour $x < 0$ car la fonction $s_n(x)$ est paire. La convergence est uniforme sur l'intervalle $] -\pi/2, \pi/2[$.

En effet, en utilisant l'égalité, pour $x > 0$

$$s_n - \ln \frac{\sin 2x}{2x} = \ln x - \ln \left(2^n \sin \frac{x}{2^n} \right)$$

on remarque que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t - t}{t^2 \sin t}$ est continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$ (en 0, utiliser un développement limité), elle est donc bornée d'où

$$0 \leq \frac{t}{\sin t} - 1 \leq Mt^2$$

ce qui donne, pour $x > 0$,

$$\ln x - \ln \left(2^n \frac{\sin x}{2^n} \right) = \ln(1 + \varepsilon_n)$$

où $\varepsilon_n = \frac{t_n}{\sin t_n} - 1 > 0$, $t_n = \frac{x}{2^n}$. En utilisant l'inégalité $\ln(1 + \varepsilon) \leq \varepsilon$ on a

$$\begin{aligned} \ln x - \ln \left(2^n \frac{\sin x}{2^n} \right) &= \ln(1 + \varepsilon_n) \\ &\leq \varepsilon_n \leq M \left(\frac{x}{2^n} \right)^2 \\ &\leq \frac{M'}{2^{2n}}. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité permet de conclure à la convergence uniforme.

Solution 4.1.9

- (1) • Si $x \leq 0$: $\frac{1}{n^x} \not\rightarrow 0$ donc la série définissant F diverge, F n'est pas définie.
 • Si $x > 0$, $\frac{1}{n^x} \searrow 0$, le théorème des séries alternées (*théorème 5.33 page 239*) permet de conclure à la convergence, F est définie.
 Conclusion : F est définie sur $]0, +\infty[$.

(2) En écrivant la somme partielle on a

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^x} - 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k)^x}$$

et, pour $x > 1$, comme la série $\sum \frac{1}{n^x}$ converge, on peut prendre la limite quand $N \rightarrow +\infty$ pour trouver

$$F(x) = \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(2p-1)^x} + \frac{1}{(2p)^x} \right]}_{=g(x)} - 2 \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^x}}_{=2^{1-x}g(x)}$$

d'où $F(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}} \right) g(x)$.

- (3) $1 - \frac{1}{2^{x-1}} = 1 - e^{-(x-1)\ln 2} \sim (x-1)\ln 2$ et comme $F(1) = \ln 2$: $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)g(x) = 1$.
 On peut aussi écrire $n \geq 2$ et $x > 1$:

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^x}.$$

en additionnant ces inégalités de $n = 2$ à N et l'inégalité $\int_1^2 \frac{dt}{t^x} \leq 1 \leq 1$ puis en passant à la limite quand $N \rightarrow +\infty$ on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq g(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x}$$

ce qui donne $\frac{1}{x-1} \leq g(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$ (cf. *remarque 5.3.7 (ii) page 243*).

(4) Le théorème des séries alternées permet d'écrire : $1 - \frac{1}{2^x} \leq F(x) \leq 1$ d'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1.$$

Remarque : la fonction $g(x)$ est appelée fonction zéta de Riemann (noté $\zeta(x)$) et la formule du 2. on peut prolonger cette fonction au cas où $x \in]0, 1[$. En fait, on montre que l'on peut prolonger cette fonction au plan complexe en entier privé du point 1. La conjecture de Riemann (1859) dit que les zéros de la fonction zéta sont tous situés sur la droite $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$ et, si elle est prouvée, jouera un rôle important en théorie des nombres.

Solution 4.1.10 $u_n(x)$ est 2π -périodique et $u_n(\pi - x) = -u_n(x)$, donc on restreint l'étude à $I = [-\pi/2, +\pi/2]$.

- Si $x = \pm \frac{\pi}{2}$ alors $F(x) = 0$,
- si $x \neq \pm \frac{\pi}{2}$ alors $F(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$.

Pas de convergence uniforme sur I mais convergence uniforme sur $[-a, +a]$ pour $a \in]0, \pi/2[$.

Solution 4.1.11 Il y a convergence ssi $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| \leq |a|$ et la convergence est uniforme sur le domaine de convergence car il y a convergence normale.

Domaine de convergence : $|a| = 1$: demi-plan, $|a| > 1$: extérieur d'un cercle, $|a| < 1$: intérieur d'un cercle.

Solution 4.1.12

(1) Pour $x \in [0, 1]$ on a : $0 \leq u_n(x) \leq F(n) - F(n+1)$ donc en additionnant ces inégalités

$$0 \leq \sum_0^N u_n(x) \leq F(0) - F(N+1) \leq F(0),$$

et par conséquent $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge sur $[0, 1]$.

On utilise ensuite la relation $u_n(x+1) = F(n) - F(n+1) + u_{n+1}(x)$ et en sommant

$$\sum_{n=0}^N u_n(x+1) = F(0) - F(N+1) + \sum_{n=0}^{N+1} u_n(x) - u_1(x)$$

et à la limite quand $N \rightarrow +\infty$: $g(x+1) = g(x) + F(x)$ (car $u_1(x) = F(0) - F(x)$).

Ceci permet de montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge sur $[1, 2]$ et par récurrence sur $[k, k+1]$ i.e. sur \mathbb{R}_+ . On fait de même sur \mathbb{R}_- avec $g(x-1) = g(x) - F(x-1)$.

(2) On reprend la relation $u_n(x+1) = F(n) - F(n+1) + u_{n+1}(x)$ et en sommant

$$\sum_{n=N+1}^{N+P} u_n(x+1) = F(N+1) - F(N+P+1) + \sum_{n=N+1}^{N+P} u_{n+1}(x)$$

soit, lorsque $P \rightarrow +\infty$, $R_N(x+1) = R_{N+1}(x) + F(N+1)$ car $\lim_{P \rightarrow +\infty} F(N+P+1) = 0$

(on note $R_N(x)$ le reste d'ordre N de la série $\sum u_n(x)$).

Sur $[0, 1]$: $0 \leq R_N(x) \leq R_N(1) = F(N+1) \rightarrow 0$ (car R est croissante). Donc, on a convergence uniforme sur $[0, 1]$, $[1, 2]$, ... et sur tout segment de \mathbb{R} .

(3) Si F est continue alors g est continue car on a convergence uniforme sur tout compact.

(4) $a = 0$ car $\varphi(x+1) - \varphi(x) = g(x+1) - g(x) - F(x) + F(x-1) = F(x-1)$.

Solution 4.1.13

(1) On a les résultats suivants : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ C ssi $x > 0$; $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$ C ssi $x \geq 0$.

(2) Si $x \leq \frac{1}{n^2}$: $\sum_{k=0}^n e^{-k^2x} \geq \frac{n}{e} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2x} = +\infty$; comme $|v_n(x)| \leq \frac{1}{n^2e}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$

convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} v_n(x) = 0$.

Solution 4.1.14 En fait, on demande de redémontrer, dans un cas particulier, le théorème de double limite appliqué aux séries de fonctions lorsqu'il y a convergence normale (cf *théorème 5.48 et remarque 5.4.3 page 249*).

Par passage à la limite, on a $|c_k| \leq a_k$ donc la série $\sum c_k$ converge absolument.

On choisit ensuite p pour que $\sum_{k=p+1}^{+\infty} a_k \leq \frac{\varepsilon}{3}$ et dans ce cas,

$$\left| \sum_{k=p+1}^{+\infty} (c_{n,k} - c_k) \right| \leq 2 \sum_{k=p+1}^{+\infty} a_k \leq 2 \frac{\varepsilon}{3}.$$

p étant choisi, vu que $\sum_{k=0}^p c_{n,k} \rightarrow \sum_{k=0}^p c_k$, on peut trouver N tel que

$$n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^p (c_{n,k} - c_k) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On arrive à la conclusion en additionnant les 2 inégalités trouvées (on a utilisé ce résultat dans l'exemple d'*application de la page 250*).

Solution 4.2.1

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} = 0$ et $\left(\frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2} \right)' = 2 \frac{x^2 - (2n+1)^2}{((2n+1)^2 + x^2)^2}$ (dérivée par rap-

port à n) donc $|u_n(x)|$, pour x fixé, décroît à partir d'un certain rang, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge sur \mathbb{R} grâce au théorème des séries alternées (cf *théorème 5.33 page 239*).

En effet pour chaque x il existe n_x tel que $(u_n(x))$ décroît pour $n \geq n_x$ donc $\sum_{n \geq n_x} u_n(x)$

converge grâce au T.S.A.

(2) $\left| \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} \right| \leq \frac{1}{\operatorname{ch} t} \sim \frac{2}{e^t}$ donc $t \mapsto \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(3) On utilise la relation obtenue en sommant une suite géométrique

$$\frac{1}{2} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t} = \frac{e^{-t} \cos xt}{1 + e^{-2t}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} \cos xt + (-1)^{n+1} \frac{e^{-(2n+3)t} \cos xt}{1 + e^{-2t}}$$

et on intègre de 0 à $+\infty$ pour avoir le résultat.

(4) On remarque que $(-1)^k \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos xt \, dt = u_k(t)$ (obtenue par intégration par parties ou en prenant la partie réelle de $\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} e^{ixt} \, dt$) et que

$$|R_n(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t} \, dt = \frac{1}{2n+3},$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ ce qui fournit la réponse.

Solution 4.3.1 (1) E est manifestement linéaire, il suffit donc de prouver cette égalité pour Q_i monômes.

Donnons une expression de $E(f^n)$:

- si n est impair alors

$$E(f^n) = \sum_{k \in f(\Omega)} k^n P(f = k).$$

- Si n est pair alors

$$E(f^n) = \sum_{k^n \in f^n(\Omega)} k^n P(f^n = k^n).$$

Or $P(f^n = k^n) = P(f = k) + P(f = -k)$ pour $k \neq 0$ donc la formule citée pour n impair est aussi valable.

Si $Q_i(X) = X^{n_i}$, on a de même (par récurrence sur m) :

$$E\left(\prod_{i=1}^m Q_i(f_i)\right) = \sum_{k_1^{n_1} \dots k_m^{n_m} \in f_1^{n_1}(\Omega) \dots f_m^{n_m}(\Omega)} k_1^{n_1} \dots k_m^{n_m} P(f_1 = k_1, \dots, f_m = k_m) = \prod_{i=1}^m E(f_i^{n_i})$$

puis, par récurrence sur m , on a $\operatorname{Var}(f_1 + f_2 + \dots + f_m) = \operatorname{Var}(f_1) + \operatorname{Var}(f_2) + \dots + \operatorname{Var}(f_m)$.

(2) On écrit que

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(f) &= \sum_{|k-E(f)| \geq \alpha} (k - E(f))^2 P(f = k) + \sum_{|k-E(f)| < \alpha} (k - E(f))^2 P(f = k) \\ &\geq \alpha^2 \sum_{|k-E(f)| \geq \alpha} P(f = k) \end{aligned}$$

(3) a) $P(f_1 + \dots + f_n = k)$ est égale au nombre de sous-ensemble à k éléments dans $[1, n]$ (correspondant aux indices i tels que $f_i = 1$ multiplié par $t^k(1-t)^{n-k}$ qui vaut

$$\prod_{i \in [1, k]} P(f_i = 1) \prod_{i \in [k+1, n]} P(f_i = 0).$$

- b) On vérifie que $\text{Var}(f_i) = t(1-t)$ et donc $\text{Var}(f_1 + \dots + f_n) = nt(1-t)$. On utilise ensuite l'inégalité de Bienaymé-Chebychev associée à l'inégalité $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$ pour $t \in [0, 1]$.
- c) Traduisons la continuité uniforme de f :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \left| \frac{k}{n} - t \right| < \alpha \Rightarrow \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \epsilon/2$$

donc $|B_n(f)(t) - f(t)| \leq \left| \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \right| \leq \left| \sum_{k \in A_n} + \sum_{k \notin A_n} \right| \leq \frac{2\|f\|}{4\alpha^2 n} + \frac{\epsilon}{2}$ on prend $n \geq \frac{\|f\|}{\alpha^2}$ (indépendant de t). $B_n(f)$ est donc une suite de polynômes convergeant uniformément vers f .
