DÉRIVATION ET INTÉGRATION

1. Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

1.1. Dérivée en un point, fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Soient f et g des fonctions continues de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $I = [a, b]$, f à valeurs dans E un e.v.n., et g à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que l'on a : $\forall t \in I$, $\|f'(t)\| \leqslant g'(t)$ et que $\|f(b) - f(a)\| = g(b) - g(a)$.

(1) Prouver que $\forall t \in I$, $\|f(t) - f(a)\| = g(t) - g(a)$.
(2) En déduire que $\forall t \in I$, $\|f'(t)\| = g'(t)$.

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $I = [a, b]$ dans E un e.v.n. de dimension finie. On suppose qu'il existe k réel tel que : $\forall t \in I$, $\|f'(t)\| \leqslant k\|f(t)\|$.
On veut prouver que, s'il existe $u \in I$ tel que $f(u) = 0$ alors f est nulle.
En étudiant la fonction $F(x) = e^{-kx} \displaystyle\int_u^x \|f(t)\| \,\mathrm{d}t$ prouver que $f(t) = 0$ pour $t \geqslant u$.
Conclure.

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{F}}$

(1) Soit g une fonction numérique positive définie sur un voisinage de 0, dérivable en 0, vérifiant $g(0) = 1$. Déterminer $\lim\limits_{y \to 0} [g(y)]^{1/y}$.
(2) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$, montrer que $I(y) = \displaystyle\int_0^1 [f(x)]^y \,\mathrm{d}x$ est dérivable en 0.
(3) En utilisant le 1., montrer que $\lim\limits_{y \to 0} \left(\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^y \,\mathrm{d}x \right)^{1/y} = \exp\left(\int_0^1 \ln(f(x)) \,\mathrm{d}x \right)$ (ceci généralise une propriété de la moyenne).

---

2. Intégration sur un intervalle quelconque

2.1. Fonctions intégrables à valeurs positives.

Exercice 2.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Étudier l'intégrabilité de $f : x \mapsto \dfrac{e^{-1/x}}{x^\alpha}$ sur $]0, +\infty[$ selon les valeurs de α.
Lorsque f est intégrable, on pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-1/x}}{x^\alpha} \,\mathrm{d}x$: chercher la limite de $I(\alpha)$ quand $\alpha \to +\infty$, $\alpha \to 1$.

EXERCICE 2.1.2. $\boxed{\textbf{F}}$

$$\lim_{a\to 0}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)(a^2-x^2)}}.$$

EXERCICE 2.1.3. $\boxed{\textbf{I C}}$

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 2.1.4. $\boxed{\textbf{I C}}$

Étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$a_0=a,\ b_0=b\ (0<a<b)\ ;\ a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\ b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n).$$

Soit $\displaystyle F(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+y^2)}}\quad(x>0,\ y>0)$.

Montrer que $F(a,b)=F(\sqrt{ab},\dfrac{a+b}{2})$ (faire le changement de variable $u=\dfrac{1}{2}(t-\dfrac{xy}{t})$). En déduire une méthode de calcul de $F(a,b)$.

EXERCICE 2.1.5. $\boxed{\textbf{I C}}$

À l'aide de séries, étudier l'intégrabilité sur $I=[0,+\infty[$ des fonctions :

(1) $x\mapsto x\exp(-x^6\sin^2 x)$, (2) $x\mapsto\dfrac{1}{1+x^3\sin^2 x}$, (3) $x\mapsto\dfrac{x^\alpha}{1+x^\beta\sin^2 x}$.

EXERCICE 2.1.6. $\boxed{\textbf{I}}$

(1) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x$ (cf. exercice 2.2.6). En déduire

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}\left[\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right]\mathrm{d}x=\gamma$$

(où $\gamma=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n)$).

(2) (*i*) Montrer que $\forall x\in[0,n]$, $e^{-x}\geqslant\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\geqslant 1-x$.

(*ii*) Soit $\displaystyle I_n=\int_0^1\frac{1}{t}\left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]\mathrm{d}t$ et $\displaystyle J_n=\int_1^n\frac{1}{t}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\mathrm{d}t$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}I_n=\int_0^1\frac{1}{t}(1-e^{-t})\,\mathrm{d}t\ \text{et}\ \lim_{n\to+\infty}J_n=\int_0^1\frac{e^{-1/t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(*iii*) Prouver que $I_n-J_n=(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n})-\ln n$, en déduire que

$$\gamma=\int_0^1\frac{1-e^{-t}-e^{-1/t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

EXERCICE 2.1.7. **D**

Soit F une fonction continue de $[1,+\infty[$ à valeurs complexes, de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ telle que F' soit intégrable sur $]0,+\infty[$, vérifiant $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$.

(1) Montrer que $A(x)=\displaystyle\int_1^x F(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{n=1}^{E(x)} F(n)$ a une limite quand x tend vers $+\infty$.

(2) Pour $p>0$, $a\in\mathbb{R}$, donner la nature de la série $\sum u_n(a)$ où

$$u_n(a)=\frac{(\ln n)^p}{n^{1+ia}}=\frac{(\ln n)^p}{\exp[(1+ia)\ln n]}.$$

2.2. **Fonctions intégrables à valeurs réelles ou complexes.**

EXERCICE 2.2.1. **D T**

Étudier l'intégrabilité sur I des fonctions f :

(1) $\dfrac{\ln(1+ax^2)}{x^2}$, $I=]0,1]$ (2) $\dfrac{\ln|1-x|}{\sqrt{|x|}(1+x^2)}$, $I=]-\infty,0[$

(3) $\dfrac{\ln x}{1+x^2}$, $I=]0,+\infty[$ (4) $\dfrac{\sin x}{x\ln^2 x}$, $I=[2,+\infty[$

EXERCICE 2.2.2. **I T**

Calcul de :

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$ (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha\in\{2,3,\frac{3}{2}\})$ (3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^3\ln x}{(1+x^4)^3}\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{6x^4}{1+x^6}\,\mathrm{d}x$ (5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(8x^2-4x+5)\sqrt{x^2+1}}$ (6) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{Argsh}\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln x}{(x-1)\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$ (8) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\operatorname{ch} t+\cos x}\,\mathrm{d}t$ $(x\in]0,\pi[)$

EXERCICE 2.2.3. **I**

Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$, f intégrable sur $[0,+\infty[$. Montrer que

$$\lim_{u\to-\infty}\int_u^{+\infty}(f(a+x)-f(b+x))\,\mathrm{d}x$$

existe et la calculer.

Application : calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^x\,\mathrm{d}x}{(1+ae^x)(1+be^x)}$.

EXERCICE 2.2.4. **I C**

(1) Montrer que la fonction $f\ :t\mapsto\dfrac{\ln t\ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $]0,1[$. On pose alors $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

(2) Montrer que $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\frac{\ln^2 t}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

(3) En déduire que $I = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n}\int_0^1 t^p \ln^2 t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^1 t^n h(t)\,\mathrm{d}t$ où $h(t) = \frac{t\ln^2 t}{1-t}$.

(4) Montrer alors que $I = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$.

EXERCICE 2.2.5. $\boxed{\textbf{I C}}$

On reprend l'exercice 2.2.4 et on s'intéresse à $I = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2 t}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Montrer directement que $I = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$, en déduire comment calculer une valeur approchée de I à 10^{-p} près.

EXERCICE 2.2.6. $\boxed{\textbf{I C}}$

On suppose que : $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $0 < a < b$.

(1) Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $I(\varepsilon) = \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$. Déterminer $\lim_{\varepsilon\to 0} I(\varepsilon)$ en fonction de $f(0)$.

(2) On suppose que $\lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ existe et on pose

$$J(\varepsilon) = \lim_{X\to+\infty}\int_\varepsilon^X \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Établir une relation entre $I(\varepsilon)$ et $J(\varepsilon)$; en déduire que

$$\lim_{(\varepsilon,X)\to(0,+\infty)}\int_\varepsilon^X \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$$

existe et donner sa valeur.

(3) Applications :

(i) Montrer que $C(a,b) = \lim_{(\varepsilon,X)\to(0,+\infty)}\int_\varepsilon^X \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

(ii) Faire de même avec $A(a,b) = \lim_{(\varepsilon,X)\to(0,+\infty)}\int_\varepsilon^X \frac{\operatorname{Arctan} ax - \operatorname{Arctan} bx}{x}\,\mathrm{d}x$.

(iii) Calculer $E(a,b) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$ et retrouver la valeur de $E(a,b)$ en calculant d'abord $\frac{\partial E}{\partial a}(a,b)$ (on justifiera soigneusement ce calcul).

EXERCICE 2.2.7. $\boxed{\textbf{D}}$

Soit $f \in C^\infty([0,+\infty[, \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)} = 0$ et (a_n) une suite réelle de limite $a \neq 0$.

On suppose que f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.

Montrer que

$$a\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \sim \sum_{p=0}^{n} a_p f(p) \text{ en } +\infty.$$

2.3. Le théorème de Lebesgue de convergence dominée.

Exercice 2.3.1. **I**

Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ où $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^x \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$ $(x > -1)$.

Exercice 2.3.2. **F** On rappelle que $\cos t = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{t^{2n}}{(2n)!}$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$.

Exercice 2.3.3. **I**

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) \in]-1,1[$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}(zt)}{\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2z}{(2n+1)^2 - z^2}.$$

Exercice 2.3.4. **I**

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, montrer l'égalité

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha+1)\zeta(1+\alpha)$$

où $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}$ et $\zeta(y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^y}$.

2.4. Intégrales dépendant d'un paramètre.

Exercice 2.4.1. **F**

Trouver le minimum de $f(x) = \displaystyle\int_0^1 |t^2 - x|\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2.4.2. **I**

Pour $x \geqslant 1$, on définit $F(x,y) = \displaystyle\int_1^x t^y e^t\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x,y+1)}{F(x,y)} = +\infty$ (on pourra commencer par montrer que lorsque $x \to +\infty$, $F(x,y)$ est équivalent à $\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^x t^y e^t\,\mathrm{d}t$).
En déduire, par une intégration par parties que $F(x,y) \sim x^y e^x$ $(x \to +\infty)$.

(2) Application : montrer que, pour tout y de $\mathbb{R}$, la somme $S_n(y) = \ln^y 2 + \cdots + \ln^y n$ est équivalente à $n \ln^y n$ quand n tend vers $+\infty$ (utiliser la comparaison série-intégrale).

Exercice 2.4.3. $\boxed{\textbf{F}}$

On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{x-t}}{t}\,\mathrm{d}t$; chercher le développement limité à l'ordre 2, suivant les puissances de $\dfrac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 2.4.4. $\boxed{\textbf{F}}$

(1) Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^x)\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que F est monotone décroissante. En cherchant une majoration et une minoration de $F(x)$ (ou en transformant cette intégrale), montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = +\infty$.

(3) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ (se ramener au cas où $x \geqslant 0$).

Exercice 2.4.5. $\boxed{\textbf{I}}$

Montrer que la fonction $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+itx}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} ite^{-t^2+itx}\,\mathrm{d}t$.

À l'aide d'une intégration par parties, prouver que f vérifie l'équation différentielle : $2y' + xy = 0$.

En déduire la valeur de f connaissant $f(0) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 2.4.6. $\boxed{\textbf{D T}}$

(1) Si $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ avec $2n > m$ et m impair, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n\sin(\dfrac{m\pi}{2n})}$$

(on obtient ce résultat en décomposant la fraction rationnelle).

(2) En déduire que, pour $\alpha \in]0,1[$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x}{1+x} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$ (utiliser une suite $u_p = \dfrac{m_p}{2n_p}$ de rationnels tendant vers α).

---

3. Intégrales doubles

3.1. Intégrales doubles sur un produit d'intervalles.

Exercice 3.1.1. $\boxed{\textbf{I C}}$ Fonction d'Euler :

(1) Étudier pour $x > 0$ l'existence de $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(2) Chercher une relation entre $\Gamma(x)$ et $\Gamma(x+1)$.

(3) On suppose ici que $x > 1$ et $y > 1$.

a) Montrer que $\Gamma(x)\Gamma(y) = \lim_{a \to +\infty} C(a)$ où
$$C(a) = 4 \iint_{(u,v)\in[0,a]^2} e^{-(u^2+v^2)} u^{2x-1} v^{2y-1}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$$
pour $a > 1$.

b) On pose $R(a) = 4 \int_0^a r^{2(x+y)-1} e^{-r^2}\, \mathrm{d}r \times \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta \sin^{2y-1}\theta\, \mathrm{d}\theta$, montrer que
$$R(a) \leqslant C(a) \leqslant R(a\sqrt{2}).$$

c) En déduire que
$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y)B(x,y)$$
où $B(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{y-1}\, \mathrm{d}t$, étendre ce résultat au cas où $x > 0$ et $y > 0$.

(4) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner une expression élémentaire de $\Gamma(n + \frac{1}{2})$.

(5) Montrer, en utilisant le résultat de l'exercice 2.4.6, que, pour $x \in]0,1[$, on a :
$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Exercice 3.1.2. $\boxed{\text{I}}$

Soit $f(x,y) = \dfrac{y}{(1+x^2y)(1+y^2)}$, montrer que f est intégrable sur $]0,+\infty[^2$ et calculer son intégrale sur ce produit d'intervalles.

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \dfrac{\ln x}{1+x^4}\, \mathrm{d}x$.

Exercice 3.1.3. $\boxed{\text{I}}$

Soit $f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y+1)^3}$ définie sur $[0,+\infty[^2$.

(1) Montrer que $f(.,y)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$.

(2) Est-ce que la fonction f est intégrable sur $[0,+\infty[^2$?

(3) Calculer $\displaystyle\int_{[0,a]^2} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Qu'en penser ?

3.2. **Intégrales doubles sur une partie élémentaire.**

Exercice 3.2.1. $\boxed{\text{I}}$

Soient a et b 2 réels > 0 tels que $a < b$, calculer $I = \displaystyle\iint_D (y^2 - x^2)^{xy}(x^2+y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid a \leqslant xy \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y^2 - x^2 \leqslant 1\}$.

Exercice 3.2.2. $\boxed{\text{I}}$

Soit $\mathcal{R} = [a,b]\times[c,d] = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{R}_i$ où les $\mathcal{R}_i$ sont des pavés d'intérieur disjoint. On suppose que chaque $\mathcal{R}_i$ a un côté de longueur entière.

À l'aide d'une fonction dont l'intégrale sur $\mathcal{R}$ est nulle, montrer que $\mathcal{R}$ possède au moins un côté de longueur entière.

4. Courbes d'un espace vectoriel normé

4.1. Courbes paramétrées.

Exercice 4.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit Γ la courbe définie par $x = \dfrac{\cos u}{\operatorname{ch} u}, \dfrac{\sin u}{\operatorname{ch} u}, z = \operatorname{th} u, u \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que Γ est tracée sur une sphère S.
(2) Montrer que Γ coupe les méridiennes de S (pour la direction Oz) sous un angle constant.

4.2. Étude locale d'un arc orienté Γ de classe $\mathcal{C}^k$.

Exercice 4.2.1. $\boxed{\textbf{I C}}$

Soit (C) la courbe définie par $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$.

Montrer que, pour tout point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ par lequel passent 3 plans osculateurs à (C) en P_1, P_2 et P_3, les 4 points P_1, P_2, P_3 et M_0 sont coplanaires.

On rappelle que les plans osculateurs sont les sous-espaces fondamentaux de dimension 2 et que, si les vecteurs $\overrightarrow{M'(t)}$ et $\overrightarrow{M''(t)}$ sont libres alors leur équation peut s'écrire $\det(\overrightarrow{MM(t)}, \overrightarrow{M'}(t), \overrightarrow{M''}(t) = 0$.

Exercice 4.2.2. $\boxed{\textbf{I}}$

Trouver l'ensemble des points Ω tels que 2 des plans osculateurs à la courbe $(\Gamma)\ : x = t, y = t^2, z = t^3$ passant par Ω, coupent le plan $z = h$ suivant 2 droites orthogonales.

4.3. Théorème du relèvement.

Exercice 4.3.1. $\boxed{\textbf{D}}$ L'objectif de cet exercice est de prouver le théorème du relèvement dans le cas continu.

On se donne donc une fonction continue $f\ : I \mapsto \mathbb{U}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

(1) On se place tout d'abord dans le cas où I est un segment.
    Montrer qu'il existe une application $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ telle que $\|f - e^\varphi\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2}$.
(2) Soit $g = \dfrac{e^\varphi}{f}$, montrer qu'il existe $\psi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ telle que $g = e^\psi$.
    Conclure dans ce cas.
(3) Généraliser le résultat précédent au cas où I est un intervalle quelconque.

Exercice 4.3.2. $\boxed{\textbf{I}}$

Montrer qu'il n'existe pas d'application f continue de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ f(z)^2 = z$ (considérer l'application $g\ : t \mapsto f(e^{it})$).

4.4. **Étude métrique d'un arc orienté.**

EXERCICE 4.4.1. $\boxed{\textbf{F C}}$
Soit (C) l'arc géométrique : $x = a\cos^3 u,\ y = a\sin^3 u,\ z = a\cos 2u$.

(1) Former l'équation de la surface (S) engendrée par la rotation de (C) autour de l'axe Oz. On écrira que l'ensemble des points obtenus doit satisfaire les conditions suivantes Il existe $u \in [0, 2\pi[$ tel que
  (i) $z = a\cos 2u$,
  (ii) $x^2 + y^2 = a^2(\cos^6 u + \sin^6 u)$.

(2) Calculer l'abscisse curviligne d'un point de la courbe et exprimer le vecteur $\overrightarrow{T} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}s}$.
Trouver le vecteur normal $\overrightarrow{N} = \dfrac{\mathrm{d}T}{\|\,\mathrm{d}T\|}$ et la courbure $\gamma = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}T}}{\mathrm{d}s}.\overrightarrow{N}$.

---

1. Indications :

Indication 1.1.1

(1) Raisonner par l'absurde en utilisant l'inégalité triangulaire.
(2) Montrer que si $x > y$ alors $\|f(x) - f(y)\| = g(x) - g(y)$ et passer à la limite.

Indication 1.1.2 Applique l'inégalité des accroissements finis à $g(t) = k\int_u^t \|f(v)\|\,\mathrm{d}v$ pour en déduire que la fonction F est décroissante sur $[u, b]$ puis que f est nulle sur $[u, b]$. Faire de même sur $[a, u]$.

Indication 1.1.3

(1) Prendre le logarithme.
(2) Montrer que $|f(x)^y - 1 - y\ln f(x)| \leqslant \frac{y^2}{2}\sup_{t\in[0,y]}[(\ln f(x))^2 e^{t\ln f(x)}]$.
(3) Immédiat.

Indication 2.1.1 f est intégrable ssi $\alpha > 1$, poser ensuite $t = \frac{1}{x}$. En minorant $I(\alpha)$ par $\int_2^{+\infty} t^{\alpha-2}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et par $\int_0^1 t^{\alpha-2}e^{-t}\,\mathrm{d}t$, montrer que $I(\alpha) \to +\infty$ quand $\alpha \to \infty$ et $\alpha \to 1$.

Indication 2.1.2 Utiliser l'encadrement $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{a^2-x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{a^2-x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Indication 2.1.3 Écrire que $\int_0^{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{(1+\frac{t^2}{n})^n} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+\frac{t^2}{n})^n}$ et poser $t = \sqrt{n}\sin\theta$ dans la première intégrale, $t = \sqrt{n}\tan\theta$ dans la deuxième.

Indication 2.1.4 Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. $u(t)$ est une bijection strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$ et après calculs on prouve que $F(a, b) = F(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$. Utiliser alors l'encadrement $\frac{\pi}{b_n} = F(b_n, b_n) \leqslant F(a_n, b_n) \leqslant F(a_n, a_n) = \frac{\pi}{a_n}$.

Indication 2.1.5

(1) L'intégrale et la série $\sum u_n$ (où $u_n = \int_{n\pi-\pi/2}^{n\pi+\pi/2} xe^{-x^6\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$) sont de même nature, couper l'intégrale u_n en 3 (sur les intervalles $[n\pi - \pi/2, n\pi - \alpha_n]$, $[n\pi - \alpha_n, n\pi + \alpha_n]$ et $[n\pi + \alpha_n, n\pi + \pi/2]$) et faire un bon choix pour α_n pour conclure à l'intégrabilité.
(2) L'intégrale et la série $\sum u_n$ (où $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$) sont de même nature, majorer alors u_n par $\frac{\pi}{\sqrt{1+n^3\pi^3}}$ pour conclure à l'intégrabilité.
(3) On pose $f(x) = \frac{x^\alpha}{1+x^\beta\sin^2 x}$, en 0, la condition d'intégrabilité est $\alpha > -1$, en $+\infty$, avec $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ que l'on ramène sur $[0, \pi]$, si $\alpha > 0$ montrer que $u_n \sim \frac{\pi^{\alpha+1-\beta/2}}{n^{\beta/2-\alpha}}$ (même chose si $\alpha \leqslant 0$).
Conclure alors que f est intégrable sur $[\pi, +\infty[$ ssi $\frac{\beta}{2} - \alpha > 1$.

Indication 2.1.6

(1) Utiliser l'exercice 2.2.6, on trouve $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln n$.
Écrire $\int_0^{+\infty} e^{-px}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}$ puis montrer que $g(x) = \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et conclure.

(2) (i) Montrer que $\sqrt[n]{1-x} \leqslant 1 - \frac{x}{n}$ avec une étude de fonction (par exemple), pour l'autre inégalité, utiliser $\ln(1-x) \leqslant -x$ pour $x \in [0,1[$.
(ii) Utiliser le théorème de convergence dominée pour calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim_{n\to+\infty} J_n$ et faire le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.
(iii) Montrer que $I_n - J_n + \ln n = \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,\mathrm{d}u$ en posant $u = \frac{t}{n}$ puis $v = 1-u$. Passer à la limite quand $n \to +\infty$.

Indication 2.1.7

(1) Écrire $A(n) = \sum_{k=2}^{n} a_p - F(1)$ où $a_p = \int_{p-1}^{p} F(t)\,\mathrm{d}t - F(p)$, pour conclure à l'absolue convergence de la série $\sum a_n$, montrer que $|a_p| \leqslant \int_{p-1}^{p} |F'(t)|\,\mathrm{d}t$. En déduire que $A(x)$ a une limite en $+\infty$.

(2) Appliquer ce résultat à $F(x) = \frac{(\ln x)^p}{x^{1+ia}}$ (F vérifie bien les hypothèses). Conclure que la série $\sum u_n(a)$ diverge ssi $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^{1+ia}}\,\mathrm{d}x$ existe.

Indication 2.2.1 (1) f intégrable ssi $a \geqslant -1$, (2) f intégrable, (3) f intégrable, (4) f intégrable.

Indication 2.2.2 (1) $\pi\frac{\sqrt{2}}{4}$, (2) 0, $-\frac{1}{8}$, $\ln 2$, (3) $-\frac{1}{32}$, (4) 2π, (5) $\frac{1}{15}\ln 2 + \frac{\pi}{10}$, (6) $\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$, (7) 2π, (8) x.

Indication 2.2.3 Écrire que $\int_u^{+\infty}(f(a+x) - f(b+x))\,\mathrm{d}x = \int_{a+u}^{b+u} f(t)\,\mathrm{d}t$ et en déduire que $\lim_{u\to-\infty} \int_u^{+\infty}(f(a+x) - f(b+x))\,\mathrm{d}x = l(b-a)$.
Écrire que $\frac{e^x}{(1+ae^x)(1+be^x)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{1+ae^x} - \frac{1}{1+be^x}\right)$ pour $a \neq b$. La limite vaut alors $\frac{\ln b - \ln a}{b-a}$ si $b \neq a$ et $\frac{1}{a}$ sinon.

Indication 2.2.4

(1) En 0 : $f(t) \sim \ln t$ et f se prolonge par continuité en 1.

(2) $I = \dfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln^2 t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ après I.P.P.

(3) Écrire que $\frac{1}{1-t} = \sum_{p=0}^{n} t^p + \frac{t^{n+1}}{1-t}$ et intégrer terme à terme.

(4) Montrer que $h(t)$ est continue sur [0,1], majorer le reste et calculer $\int_0^1 t^p \ln^2 t\,dt$ à l'aide de 2 I.P.P.

Indication 2.2.5 Utiliser le théorème d'intégration terme à terme, majorer ensuite le reste avec le théorème de comparaison série-intégrale.

Indication 2.2.6

(1) Écrire que $I(\varepsilon) - f(0)\ln\frac{b}{a} = \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{f(u)-f(0)}{u}\,\mathrm{d}u$ et utiliser la continuité en 0.

(2) Montrer que $\int_\varepsilon^X \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{aX}^{bX} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$, en déduire que $J(\varepsilon) = I(\varepsilon)$ puis conclure que $\lim_{(\varepsilon,X)\to(\varepsilon,X)} \int_\varepsilon^X \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a}$.

(3) (i) Montrer que $\lim_{X\to+\infty} \int_1^X \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ existe puis $C(a,b) = \ln\frac{b}{a}$.
(ii) Montrer que $\frac{\mathrm{Arctan}\,x - \pi/2}{x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et conclure que $A(a,b) = -\frac{\pi}{2}\ln\dfrac{b}{a}$.
(iii) $E(a,b) = \ln\frac{b}{a}$, appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$ pour prouver que $\frac{\partial E}{\partial a}(a,b) = -\frac{1}{a}$ et conclure.

Indication 2.2.7
Poser $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et montrer que $F(k+1) - F(k) = f(k) + \int_k^{k+1}(k+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ (1).
Trouver A tel que, pour $k \geqslant A$, $\left|\int_k^{k+1}(k+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et conclure que $\int_k^{k+1}(k+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t = o(F(k+1) - F(k))$. En déduire que $f(k) \sim F(k+1) - F(k)$ (2) puis que $a_k f(k) \sim a(F(k+1) - F(k))$ (3) et utiliser le théorème d'équivalence des sommes partielles

des séries divergentes d'où $\sum_{k=0}^{n-1} a_k f(k) = aF(n) + o(F(n))$ (4).
Enfin, montrer que $\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ et conclure.

Indication 2.3.1 Montrer que $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$ et appliquer le théorème de convergence dominée, on trouve $\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Indication 2.3.2 Poser $f_n(x) = (-1)^n e^{-x}\frac{x^n}{(2n)!}$ et appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Indication 2.3.3 Montrer que $f(t) = \frac{\mathrm{sh}(zt)}{\mathrm{sh}\,t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ puis écrire que pour $t>0$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ où $f_n(t) = 2\,\mathrm{sh}(zt)e^{-(2n+1)t}$ et appliquer le théorème de convergence dominée à $S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} f_n(t)$.

Indication 2.3.4 Utiliser l'égalité valable pour $t>0$, $\frac{t^\alpha}{e^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^\alpha e^{-nt}$ et utiliser le théorème de Lebesgue d'intégration terme à terme d'une série de fonction.

Indication 2.4.1 Montrer que si $x \geqslant 1$, $f(x) = x - \frac{1}{3}$, si $x \leqslant 0$, $f(x) = \frac{1}{3} - x$ et si $0 < x < 1$, $f(x) = \frac{1}{3}(4x\sqrt{x} - 3x + 1)$ puis que le minimum de f se trouve dans $[0,1]$. Faire alors une étude de fonction pour conclure que $\inf f(x) = \frac{1}{4}$.

Indication 2.4.2

(1) Écrire $F(x,y) = \int_1^{\sqrt{x}} t^y e^t\,\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{x}}^{x} t^y e^t\,\mathrm{d}t$ et que si $y \geqslant 0$, $\int_1^{\sqrt{x}} t^y e^t\,\mathrm{d}t = o(x^{y/2}(e^x - e^{\sqrt{x}}))$, de même pour $y<0$. Utiliser enfin la relation $F(x,y+1) = x^{y+1}e^x - e - (y+1)F(x,y)$.

(2) Si $y \geqslant 0$ alors $\int_{k-1}^{k} \ln^y u\,\mathrm{d}u < \ln^y k < \int_k^{k+1} \ln^y u\,\mathrm{d}u$, en déduire l'encadrement $\int_{\ln 2}^{\ln n} t^y e^t\,\mathrm{d}t < S_n(y) - \ln^y 2 < \int_{\ln 3}^{\ln n+1} t^y e^t\,\mathrm{d}t$ et conclure. Idem si $y<0$.

Indication 2.4.3
Faire un changement de variable et une I.P.P. pour en déduire que $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Indication 2.4.4

(1) Immédiat si $x \geqslant 0$ et pour $x<0$, $\ln(1+t^x) \sim_0 x\ln t$. Remarquer que $F(-x) = F(x)+x$.

(2) $x < x' \Rightarrow t^x > t^{x'}$, si $x>0$ montrer que $F(x) \leqslant \frac{1}{x+1}$, si $x<0$, utiliser $F(-x) = F(x)+x$.

(3) Sur $]0,+\infty[$ utiliser le théorème de continuité sous le signe intégral, sur $]-\infty,0[$ utiliser $F(x)+x = F(-x)$. Enfin, en 0, utiliser la décroissance de F.

Indication 2.4.5 Appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral, intégrer $e^{-t^2}t$ et dériver ie^{itx}. On trouve $f(x) = \sqrt{\pi}e^{-x^2/4}$.

Indication 2.4.6

(1) Écrire $\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{x_k^m}{x-x_k}$ où $x_k = e^{i\alpha_k}$, $\alpha_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k \in [\![0, 2n-1]\!]$ rassembler les parties conjuguées en déduire $\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2x\cos m\alpha_k - 2\cos(m-1)\alpha_k}{x^2-2x\cos\alpha_k+1}$. On obtient alors $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}\,\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2}\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{+X}\frac{x^{m-1}\,\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}$.
Montrer que $\int_{-X}^{+X}\frac{2x\cos m\alpha_k - 2\cos(m-1)\alpha_k}{x^2-2x\cos\alpha_k+1}\,\mathrm{d}x = -2\sin m\alpha_k\left[\mathrm{Arctan}\,\frac{x-\cos\alpha_k}{\sin\alpha_k}\right]_{-X}^{+X}$ et conclure en passant à la limite.

(2) Faire le changement de variable $v = x^{2n}$ pour en déduire que $F(\frac{m}{2n}) = \frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{2n}}$ avec $F(\alpha) = \int_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x}{1+x}$. Montrer alors que $F(\alpha)$ est continue à l'aide du théorème de continuité sous le signe intégral et conclure.

Indication 3.1.1

(1) Résultat du cours.
(2) Résultat du cours.
(3) a) Poser $t = u^2$ dans l'expression de $\Gamma(x)$ et utiliser le théorème de Fubini.
b) Immédiat car on intègre une fonction positive.

c) Passer en polaires dans l'expression de $R(a)$, prendre la limite quand $a \to +\infty$.
Cas où $x > 0$ et $y > 0$: montrer que $B(x, y+1) = \frac{y}{x} B(x+1, y)$ et $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$ et appliquer la relation que l'on vient de prouver à $x+1 > 1$ et $y+1 > 1$.

(4) $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n} n!}$.

(5) Montrer que $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^1 (1-t)^{x-1} t^{-x}\, dt$ et faire les changements de variables $u = \frac{1}{t}$ et $v = u - 1$.

Indication 3.1.2 Montrer que $\int_a^b f(x, y)\, dx \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{y}}{1+y^2}$ qui est intégrable sur $]0, +\infty[$, puis que $\iint_{]0,+\infty[^2} f(x, y)\, dx\, dy = \frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$. En utilisant Fubini, montrer que
$\iint_{]0,+\infty[^2} \frac{y}{(1+x^2y)(1+y^2)}\, dx\, dy = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx - 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4}\, dx$ d'où $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^4}\, dx = -\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

Indication 3.1.3

(1) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x, y)\, dx = \frac{1}{2(y+1)^2}$ puis que $\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y)\, dx \right) dy = \frac{1}{2}$.

(2) Montrer que $\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x, y)\, dy \right) dx = -\frac{1}{2}$.

(3) Faire le changement de variable $\varphi : (x, y) \mapsto (y, x)$, l'intégrale est nulle.

Indication 3.2.1 Faire le changement de variable $u = xy$, $v = y^2 - x^2$ et montrer que l'application $\varphi : (x, y) \in D \mapsto (xy, y^2 - x^2) \in [a, b] \times [0, 1]$ est bijective. On trouve $I = \frac{1}{2} \ln \frac{b+1}{a+1}$.

Indication 3.2.2 Prendre $f(x, y) = e^{2i\pi(x+y)}$.

Indication 4.1.1 (1) On a $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,

(2) passer en cylindriques : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\operatorname{ch} u} \overrightarrow{U} + \operatorname{th} u \overrightarrow{V} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \overrightarrow{k}$ où $\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$
et montrer que Γ coupe les méridiennes de S selon un angle de $\pi/4$.

Indication 4.2.1 Soit (Π) est le plan $ux + vy + wz + h = 0$, montrer que si (Π) passe par trois points distincts $P_i(t_i)$ alors l'équation $2wt^3 + 3vt^2 + 3ut + h = 0$ admet t_1, t_2, t_3 comme racines, en déduire l'équation de (Π) $2\sigma_2 x - 2\sigma_1 y + 3z - 6\sigma_3 = 0$ (les σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires des t_i). Montrer alors sans calcul que le plan osculateur a pour équation $2t^2 x - 2ty + z - 2t^3 = 0$ puis que $x_0 = \sigma_1$, $y_0 = \sigma_2$, $z = 2\sigma_3$.

Indication 4.2.2 Écrire l'équation du plan (P) passant par $\Omega_0(x_0, y_0, z_0)$ normal au vecteur (u, v, w) et prendre son intersection avec le plan $z = h$, en déduire que (P) est osculateur à (Γ) ssi $w = \frac{v^2}{3u}$ et $u^3 + 3uv(ux_0 + vy_0) + v^3 z_0 = 0$. Supposer que $v \neq 0$ et poser $\lambda = \frac{u}{v}$ en déduire que $z_0[z_0^2 + 3x_0 z_0 + 3y_0 + 1] = 0$ ($v = 0$ donne le même résultat). La réciproque ne pose pas de problème.

Indication 4.3.1

(1) Avec le théorème de Weierstrass, montrer qu'il existe un polynôme P à coefficients complexes qui vérifie $\|f - P\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}$ et utiliser le théorème du relèvement.

(2) Poser $\psi(t) = \ln |g(t)| + i \operatorname{Arctan} \frac{\operatorname{Im}(g(t))}{\operatorname{Re}(g(t))}$.

(3) Prendre (I_n) une suite croissante de segments de réunion I et définir par récurrence une suite (θ_n) telle que $f = e^{i\theta_n}$ sur I_n.

Indication 4.3.2 Écrire $g(t) = e^{i\theta(t)}$ et obtenir une impossibilité avec $g(2\pi) = f(1) = e^{-i\pi} = -1$, $g(0) = f(1) = 1$.

Indication 4.4.1

(1) On obtient $x^2 + y^2 - \frac{3}{4} z^2 = \frac{a^2}{4}$ avec $-a \leqslant z \leqslant a$.

(2) $ds = 5a \sin u \cos u\, du$ et en cylindriques : $\overrightarrow{T} = \frac{3}{5} \overrightarrow{U}(\pi - u) - \frac{4}{5} \overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{N} = -\overrightarrow{V}(\pi - u)$ et $\gamma = \frac{6}{25a \sin 2u}$.

1. Solutions

Solution 1.1.1

(1) Supposons que pour $t \in]a, b[$, on ait $\|f(t) - f(a)\| < g(t) - g(a)$ alors, grâce à l'inégalité triangulaire, on sait que

$$\begin{aligned}\|f(b) - f(a)\| &\leqslant \|f(b) - f(t)\| + \|f(t) - f(a)\| \\ &< (g(b) - g(t)) + (g(t) - g(a)) = g(b) - g(a)\end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Conclusion : $\forall t \in I$, $\|f(t) - f(a)\| = g(t) - g(a)$.

(2) De la même manière, on montre que si $x > y$ alors $\|f(x) - f(y)\| = g(x) - g(y)$, on divise alors par $x - y$ et on prend la limite quand y tend vers x et on obtient l'égalité $\|f'(x)\| = g'(x)$ grâce à la continuité de la norme (en a, il faudra prendre la limite quand x tend vers $y = a$).

Solution 1.1.2 On utilise l'inégalité des accroissements finis (*théorème 6.3 page 258*) avec $g(t) = k \displaystyle\int_u^t \|f(v)\| \, \mathrm{d}v$.

On a alors $\|f(x) - f(u)\| = \|f(x)\| \leqslant g(x)$ pour $x \geqslant u$. La fonction F est décroissante sur $[u, b]$ ($F'(x) = e^{-kx}[\|f(x)\| - g(x)]$), positive et $F(u) = 0$ donc $F = 0$, ce qui permet d'affirmer que f est nulle sur $[u, b]$.

On fait le même genre de raisonnement avec $G(x) = e^{kx} \displaystyle\int_x^u \|f(t)\| \, \mathrm{d}t$ d'où f est nulle sur $[a, u]$.

Conclusion : f est bien nulle sur $[a, b]$.

Solution 1.1.3

(1) Sur un voisinage de 0 g est strictement positive. On peut prendre le logarithme soit

$$\begin{aligned}\ln g(y)^{1/y} &= \frac{1}{y} \ln[1 + yg'(0) + o(y)] \\ &= g'(0) + o(1)\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{y \to 0} g(y)^{1/y} = e^{g'(0)}$.

(2) On a $f(x)^y = e^{y \ln f(x)}$ et, en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange on obtient

$$|f(x)^y - 1 - y \ln f(x)| \leqslant \frac{y^2}{2} \sup_{t \in [0,y]} [(\ln f(x))^2 e^{t \ln f(x)}.$$

En choisissant y dans $[0, 1]$ et compte tenu du fait que f est bornée sur $[0, 1]$ on peut écrire que

$$\left| \frac{I(y) - I(0)}{y} - \int_0^1 \ln f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{M}{y} \int_0^1 \frac{t^2}{2} \, \mathrm{d}t \to 0$$

donc I est dérivable en 0 de dérivée $\displaystyle\int_0^1 \ln f(x) \, \mathrm{d}x$.

(3) On a $I'(0) = \displaystyle\int_0^1 \ln(f(x)) \, \mathrm{d}x$ grâce au 2. et on applique le 1.

Solution 2.1.1 En $+\infty$: $f(x) \sim \dfrac{1}{x^\alpha}$ donc f est intégrable ssi $\alpha > 1$.
En 0 : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (pas de problème).
On pose ensuite $t = \dfrac{1}{x}$: $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-2}e^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_2^{+\infty} t^{\alpha-2}e^{-t}\,\mathrm{d}t = J_\alpha$.
Or $J_\alpha \geqslant 2^{\alpha-2}\displaystyle\int_2^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t \to +\infty$ quand $\alpha \to +\infty$ donc $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I(\alpha) = +\infty$.
Quand $\alpha \to 1$, $I(\alpha) \geqslant \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-2}e^{-t}\,\mathrm{d}t \geqslant \dfrac{1}{e(\alpha-1)} \to +\infty$.

Solution 2.1.2 On écrit l'encadrement

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{a^2-x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{a^2-x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

et on intègre ces inégalités. La limite vaut alors π.

Solution 2.1.3 On a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{(1+\frac{t^2}{n})^n} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+\frac{t^2}{n})^n}.$$

On pose $t = \sqrt{n}\sin\theta$ dans la première intégrale, $t = \sqrt{n}\tan\theta$ dans la deuxième d'où :

$$\sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta\,\mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta \leqslant \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-3}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

et donc $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \sim \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta\,\mathrm{d}\theta = I_n$.
On trouve même $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ grâce à Wallis.
Remarque : on peut retrouver ce résultat beaucoup plus simplement en utilisant le théorème de Lebesgue de convergence dominée (cf *exemple (ii) page 267*)

Solution 2.1.4 On a $a_n < b_n$ donc $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$. (a_n) et (b_n) convergent et

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + b_n) - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$$

(la limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique).
$u(t)$ est une bijection strictement croissante de $]0,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$. On écrit alors que :

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+y^2)}} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4t^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+y^2)}(t^2+xy)} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(u^2+xy)(u^2+(\frac{x+y}{2})^2)}} \\
&= F(\sqrt{xy}, \frac{x+y}{2}).
\end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ F(a,b) = F(a_n,b_n)$. Comme
$$\frac{\pi}{b_n} = F(b_n,b_n) \leqslant F(a_n,b_n) \leqslant F(a_n,a_n) = \frac{\pi}{a_n}$$
alors $F(a,b) = F(c,c) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+c^2} = \frac{\pi}{c}$ où $c = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ (ceci est une méthode de calcul d'une intégrale elliptique).

Solution 2.1.5

(1) L'intégrale et la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ (où $u_n = \displaystyle\int_{n\pi-\pi/2}^{n\pi+\pi/2} xe^{-x^6\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$) sont de même nature. En coupant l'intégrale u_n en 3, on écrit
$$u_n = \int_{n\pi-\pi/2}^{n\pi-\alpha_n} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{n\pi-\alpha_n}^{n\pi+\alpha_n} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{n\pi+\alpha_n}^{n\pi+\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$$
où $f(x) = xe^{-x^6\sin^2 x}$. On peut majorer u_n par $v_n + w_n$ où $v_n = \pi(n\pi + \frac{\pi}{2})e^{-(n\pi-\pi/2)^6\sin^2\alpha_n}$ (en majorant les intégrales sur $[n\pi-\pi/2, n\pi-\alpha_n]$ et $[n\pi+\alpha_n, n\pi+\pi/2]$) et $w_n = 2\alpha_n(n\pi+\alpha_n)$ (en majorant l'exponentielle par 1 dans l'intégrale qui reste) En prenant $\alpha_n = \dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ les séries v_n et w_n convergent donc la fonction est intégrable sur I.

(2) On étudie la série $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$. Or $u_n < \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+n^3\pi^3\sin^2 t} = \frac{\pi}{\sqrt{1+n^3\pi^3}}$ il y a donc convergence.

(On peut aussi majorer l'intégrale par $2\displaystyle\int_0^{/pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+4n^3\pi t^2}$ en remarquant que $\sin t \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$ sur $[0,\pi/2]$. Cette dernière intégrale vaut $\dfrac{1}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}\operatorname{Arctan}(n^3\pi^3) \leqslant \dfrac{\sqrt{\pi}}{2n^{3/2}}$.)

Un dessin des courbes représentatives permet de comprendre les découpages :

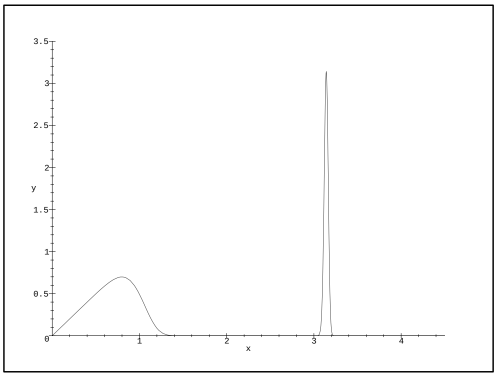


Figure 1. Première courbe

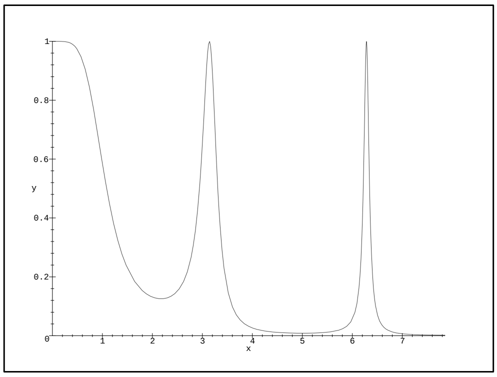


Figure 2. Deuxième courbe

(3) On pose $f(x) = \dfrac{x^\alpha}{1+x^\beta\sin^2 x}$.

- En 0, la condition d'intégrabilité s'écrit : $\alpha > -1$.
- En $+\infty$, posons $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{(t+n\pi)^\alpha}{1+(t+n\pi)^\beta\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ pour $n \geqslant 1$.

Si $\alpha > 0$, en utilisant les inégalités $n^\alpha \pi^\alpha \leqslant (t + n\pi)^\alpha \leqslant (n+1)^\alpha \pi^\alpha$ on obtient

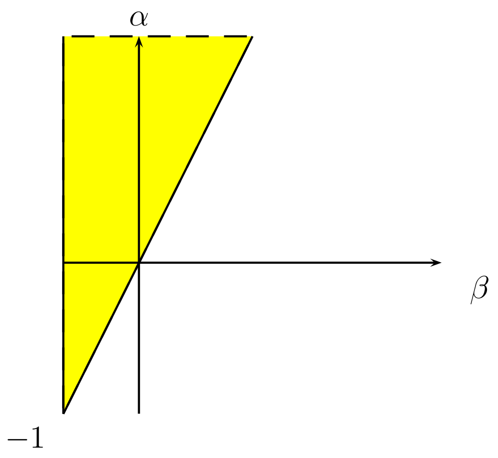
$$\int_0^\pi \frac{n^\alpha \pi^\alpha}{1 + (n+1)^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t}\,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \int_0^\pi \frac{(n+1)^\alpha \pi^\alpha}{1 + n^\alpha \pi^\alpha \sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

Puis, comme $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}t}{1 + a^2 \sin^2 t} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}$ on en déduit l'encadrement

$$\frac{n^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{(n+1)^\beta \pi^\beta + 1}} \leqslant u_n \leqslant \frac{(n+1)^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{n^\beta \pi^\beta + 1}}$$

d'où $u_n \sim \dfrac{\pi^{\alpha+1-\beta/2}}{n^{\beta/2-\alpha}}$ car les deux quantités qui encadrent u_n sont équivalentes. On obtient la même chose si $\alpha \leqslant 0$.

La série $\sum u_n$ converge ssi $\dfrac{\beta}{2} - \alpha > 1$. f est donc intégrable sur $[\pi, +\infty[$ ssi $\dfrac{\beta}{2} - \alpha > 1$.
Conclusion : f est intégrable ssi $\alpha > -1$ et $\beta < 2\alpha$ ce qu'on peut illustrer par le dessin suivant (où la partie grisée correspond à l'ensemble des couples (α, β) pour lesquels on a intégrabilité de f) :



Solution 2.1.6

(1) On procède comme à l'exercice 2.2.6 et on trouve $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln n$.

Remarque : on peut aussi utiliser Fubini et écrire

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-nx}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \left(\int_1^n e^{-ux}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_1^n \left(\int_0^{+\infty} e^{-ux}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u = \int_1^n \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \\ &= \ln n\end{aligned}$$

(justifié par le théorème de convergence dominée de Lebesgue).

On utilise maintenant le fait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}$ pour écrire : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \ln n = \int_0^{+\infty} \left(e^{-x} - e^{-nx}\right) g(x)\,\mathrm{d}x$ où $g(x) = \dfrac{1}{1 - e^{-x}} - \dfrac{1}{x}$.

À l'aide d'un développement limité en 0, on prouve que g a une limite en 0, on montre aussi que g a une limite en $+\infty$, donc g est bornée sur $\mathbb{R}$ par M. On peut écrire alors

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-nx} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant M \int_0^{+\infty} e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{M}{n}$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-nx}g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ce qui permet de prouver le résultat demandé.

(2) (*i*) On utilise l'inégalité de la moyenne

$$\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

(cf. question (*iii*) page 107) avec $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 1$ et $a_n = 1-x$ ce qui donne $\sqrt[n]{1-x} \leqslant 1-\dfrac{x}{n}$ d'où l'inégalité demandée en élevant à la puissance n (ou pouvait s'en tirer aussi avec une étude de fonction).

Pour l'autre inégalité, on utilise le fait que $\ln(1-x) \leqslant -x$ pour $x \in [0,1[$ d'où

$$n\ln(1-\frac{x}{n}) \leqslant -x$$

et on prend l'exponentielle de part et d'autre.

(*ii*) On a donc $0 \leqslant \dfrac{1}{t}\left[1-\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\right] \leqslant \dfrac{1}{t}\left[1-(1-t)\right] = 1$ donc le théorème de convergence dominée (*théorème 6.22 page 266*) s'applique pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

De même $\dfrac{1}{t}\left(1-\dfrac{t}{n}\right) \leqslant \dfrac{e^{-t}}{t}$ pour $t \in [1,n]$. Le même théorème s'applique d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{t}$ et pour avoir l'égalité demandée, on fait le changement de variable $u = \dfrac{1}{t}$.

(*iii*) On a

$$\begin{aligned} I_n - J_n + \ln n &= \int_0^n \frac{1}{t}\left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

en posant $u = \dfrac{t}{n}$

$$= \int_0^1 \frac{1-v^n}{1-v}\,\mathrm{d}v = 1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}$$

ce qui donne $I_n - J_n = (1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}) - \ln n$.

On obtient la dernière relation en passant à la limite quand $n \to +\infty$.

Solution 2.1.7

(1) On a $A(n) = \sum\limits_{k=2}^{n} a_p - F(1)$ où $a_p = \displaystyle\int_{p-1}^{p} F(t)\,\mathrm{d}t - F(p)$. Or $a_p = \displaystyle\int_{p-1}^{p}(p-1-t)F'(t)\,\mathrm{d}t$ par intégration par parties. On obtient donc $|a_p| \leqslant \displaystyle\int_{p-1}^{p}|F'(t)|\,\mathrm{d}t$. Cette dernière inégalité associée à l'intégrabilité de $t \mapsto F'(t)$ sur $[1,+\infty[$ assure l'absolue convergence de la série $\sum a_n$.

On a donc l'existence d'une limite pour la suite (A_n). Or, pour $n = E(x)$,

$$|A(x)-A(n)| = \left|\int_n^x F(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_n^x |F(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M_n$$

où $M_n = \sup_{t\in[n,n+1]} |F(t)|$ qui par hypothèse tend vers 0 en $+\infty$.

On peut alors conclure que $A(x)$ a une limite en $+\infty$.

(2) On applique ce résultat à $F(x) = \dfrac{(\ln x)^p}{x^{1+ia}}$.

$$F'(x) = \frac{(\ln x)^{p-1}}{x^{2+ia}}[p-(1+ia)\ln x] \text{ d'où } |F'(x)| \leqslant \frac{(\ln x)^{p-1}}{x^2}[p+\sqrt{1+a^2}\ln x] = G(x).$$

G est continue en 1 et en $+\infty$ on a $G(x) \sim \sqrt{1+a^2}\dfrac{(\ln x)^p}{x^2}$ donc $t \mapsto F'(t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Ensuite $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ car $|F(x)| = \dfrac{(\ln x)^p}{x}$.

Conclusion : en utilisant le résultat du 1. on peut dire que la série $\sum u_n(a)$ diverge ssi

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^p}{x^{1+ia}}\,\mathrm{d}x \text{ existe.}$$

En effet, en posant $u = \ln x$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^X \frac{(\ln x)^p}{x^{1+ia}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\ln X} u^p e^{-iau}\,\mathrm{d}u \\ &= \underbrace{-\frac{(\ln X)^p X^{-ia}}{ia}[1+o(1)]}_{\to\infty} + K \underbrace{\int_1^{\ln X} u^{p-E(p)-2}e^{-iau}\,\mathrm{d}u}_{\text{qui a une limite}} + \underbrace{C_p}_{\text{constantes d'intégration}}\end{aligned}$$

(en faisant plusieurs intégrations par parties pour obtenir $u^{p-E(p)-2}$).

Solution 2.2.1

(1) Il faut bien sûr $a \geqslant -1$ (sinon la fonction n'est pas continue sur I) et dans ce cas la fonction est continue sur $[0,1]$ donc intégrable.

(2) Au voisinage de $-\infty$, on a $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$ car $\ln|1-x| \leqslant \sqrt{|x|}$ pour x assez grand. En 0, f se prolonge par continuité (par $f(0)=0$).

(3) En 0, $|f(x)| \leqslant |\ln x|$ et $\ln x$ est intégrable, en $+\infty$, $|f(x)| \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2} \ll \dfrac{1}{x^{3/2}}$ qui est intégrable. On a même (en faisant le changement de variable $u = 1/x$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} = 0.$$

(4) En $+\infty$: $\left|\dfrac{\sin x}{x\ln^2 x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x\ln^2 x}$ et $\dfrac{1}{x\ln^2 x}$ admet comme primitive la fonction $-\dfrac{1}{\ln x}$ (poser $t = \ln x$) qui a une limite nulle en $+\infty$.

Solution 2.2.2 Réponses :

(1) $\pi\dfrac{\sqrt{2}}{4}$: on peut intégrer sur $\mathbb{C}$ ou poser $x = e^t$, alors

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{2\operatorname{ch} 2t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{t}}{2\operatorname{ch} 2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} 2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\operatorname{Arctan}(\sqrt{2}\operatorname{sh} t)\right]_{-\infty}^{+\infty}.$$

(2) 0, $-\dfrac{1}{8}$, $\ln 2$ (faire des intégrations par parties).

(3) $-\dfrac{1}{32}$ (même technique).

(4) 2π (5) $\dfrac{1}{15}\ln 2+\dfrac{\pi}{10}$ (6) $\ln\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$

(7) On pose $x=\sin^2 t$ et on fait une I.P.P. pour trouver 2π (8) x

---

Solution 2.2.3 Par changement de variable, on a

$$\int_u^{+\infty}(f(a+x)-f(b+x))\,\mathrm{d}x=\int_{a+u}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t-\int_{b+u}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{a+u}^{b+u}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or $\lim\limits_{u\to-\infty}\displaystyle\int_{a+u}^{b+u}f(t)\,\mathrm{d}t=l(b-a)$ donc $\lim\limits_{u\to-\infty}\displaystyle\int_u^{+\infty}(f(a+x)-f(b+x))\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $l(b-a)$.

On écrit que $\dfrac{e^x}{(1+ae^x)(1+be^x)}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{1+ae^x}-\dfrac{1}{1+be^x}\right)$ pour $a\neq b$.

Pour que la fonction intégrée soit définie et intégrable sur $\mathbb{R}$, il faut supposer $a>0$ et $b>0$. En posant $a=e^\alpha$ et $b=e^\beta$ on se ramène exactement à la question précédente, l'intégrale dans ce cas vaut $\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}=\dfrac{\ln b-\ln a}{b-a}$.

Si $a=b$ alors, par le changement de variable $u=e^x$, on se ramène à $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+au)^2}=\frac{1}{a}$.

Solution 2.2.4

(1)
- En 0 : $f(t)\sim\ln t$ et $t\mapsto\ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ (de primitive $x\ln x-x$),
- En 1 : $f(t)\sim(t-1)\ln(1-t)$ et donc f se prolonge par continuité en 1

ce qui assure l'intégrabilité de f.

(2) $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\frac{\ln^2 t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ après intégration par parties.

En effet, on pose

$$\begin{array}{ll} \mathrm{d}u=\ln t\dfrac{\mathrm{d}t}{t} & u=\dfrac{1}{2}\ln^2 t\\ v=\ln(1-t) & \mathrm{d}v=-\dfrac{\mathrm{d}t}{1-t}\end{array}$$

d'où $I=\displaystyle\int_0^1 v\,\mathrm{d}u=\underbrace{\left[\frac{1}{2}\ln^2 t\ln(1-t)\right]_0^1}_{=0}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\ln^2 t}{1-t}\,\mathrm{d}t.$

(3) On écrit ensuite que $\dfrac{1}{1-t}=\sum\limits_{p=0}^{n}t^p+\dfrac{t^{n+1}}{1-t}$ et on intègre terme à terme.

(4) $h(t)$ est continue sur [0,1] donc

$$\left|\int_0^1 t^n h(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_0^1 t^n|h(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{\sup|h(t)|}{n+1}\to 0$$

d'où $I=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\displaystyle\int_0^1 t^p\ln^2 t\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ car $\displaystyle\int_0^1 t^p\ln^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{(p+1)^3}$ (faire deux intégrations par parties en dérivant à chaque fois le logarithme).

Solution 2.2.5 On écrit cette fois ci
$$f(t)=\frac{\ln^2 t}{2(1-t)}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{t^p\ln^2 t}{2}$$
pour $t\in]0,1[$. On recommence le calcul de l'intégrale $I_p=\displaystyle\int_0^1\frac{t^p\ln^2 t}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{(p+1)^3}$ et pour conclure on utilise le théorème d'intégration terme à terme (*théorème 6.23 page 267*) qui nous assure en même temps de l'intégrabilité de f.
On a alors
$$\int_{n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}\leqslant r_n\leqslant\int_{n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^3}+\frac{1}{(n+1)^3}.$$
(en utilisant la comparaison série-intégrale (cf. *théorème 5.38 page 243*).
Pour avoir une valeur approchée à 10^{-p} prés, on prendra $(n+1)^3\geqslant 2.10^p$ soit $n\geqslant 2^{1/3}10^{p/3}$. Si $p=3$, on prendra $n=9$ et dans ce cas : $s_9+\dfrac{1}{162}\leqslant I\leqslant s_9+\dfrac{1}{162}+\dfrac{1}{10^3}$ d'où $I=1,202057$.

Solution 2.2.6

(1) On a : $I(\varepsilon)-f(0)\ln\dfrac{b}{a}=\displaystyle\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(u)-f(0)}{u}\,\mathrm{d}u$. Or pour tout α il existe η tel que $\varepsilon b<\eta\Rightarrow|f(u)-f(0)|<\alpha$. On a alors $|I(\varepsilon)-f(0)\ln\dfrac{b}{a}|\leqslant\alpha\ln\dfrac{b}{a}$ donc $\lim_{\varepsilon\to0}I(\varepsilon)=f(0)\ln\frac{b}{a}$.
Remarque : on pouvait aussi poser $u=\varepsilon x$ et utiliser le théorème de continuité sous le signe intégral.

(2) On a
$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^X\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_\varepsilon^X\frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_\varepsilon^X\frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{\varepsilon a}^{aX}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{\varepsilon b}^{bX}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\text{ par changements de variable}\\&=\int_{\varepsilon a}^{\varepsilon b}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_{aX}^{bX}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$
et comme la dernière intégrale tend vers 0 lorsque $X\to+\infty$, on a
$$J(\varepsilon)=\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x=I(\varepsilon)$$
et donc
$$\lim_{(\varepsilon,X)\to(\varepsilon,X)}\int_\varepsilon^X\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

(3) (*i*) $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_1^X\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ existe donc $C(a,b)=\ln\dfrac{b}{a}$.
En effet, par une intégration par parties, on a
$$\int_1^X\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\sin x}{x}\right]_1^X+\int_1^X\frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
et comme $\dfrac{\sin X}{X}\to0$ quand $X\to+\infty$ et que $x\mapsto\dfrac{\sin x}{x^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ on peut conclure à l'existence de la limite.
(*ii*) $\dfrac{\operatorname{Arctan}x-\pi/2}{x}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
En effet, on sait que $\operatorname{Arctan}x-\pi/2=\operatorname{Arctan}1/x$ pour $x>0$ (*théorème 2.4 page 36*)

donc $\dfrac{\operatorname{Arctan} x - \pi/2}{x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

On peut conclure alors que $A(a,b) = -\dfrac{\pi}{2}\ln\dfrac{b}{a}$.

(*iii*) $e^{-x}x$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $E(a,b) = \ln\dfrac{b}{a}$.

La fonction $f(a,x) = \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}$ est continue pour $(a,x) \in]0,+\infty[^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial a}(a,x) = -e^{-ax}$ est C^1 sur le même ensemble. Soit $\alpha > 0$ alors, pour $a \geqslant \alpha$ on a

$$\left|\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right| \leqslant \frac{e^{-\alpha x}-e^{-bx}}{x} \quad \text{et} \quad \left|-e^{-ax}\right| \leqslant e^{-\alpha x}$$

donc on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$ (théorème 6.52 page 270) d'où

$$\frac{\partial E}{\partial a}(a,b) = -\frac{1}{a} \Rightarrow E(a,b) = -\ln a + C$$

et par symétrie $C = \ln b$.

Conclusion : on retrouve bien le résultat annoncé soit $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}$.

Solution 2.2.7 On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et donc $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}(F(k+1)-F(k))$ et, avec la formule de Taylor-intégral,

$$F(k+1)-F(k) = f(k) + \int_k^{k+1}(k+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)} = 0$ on peut trouver A tel que, pour $t \geqslant A$, $|f'(t)| \leqslant \varepsilon f(t)$ et donc, pour $k \geqslant A$, $\displaystyle\left|\int_k^{k+1}(k+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_k^{k+1}|f'(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Conclusion : au voisinage de $+\infty$:

$$\int_k^{k+1}(k+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t = o(F(k+1)-F(k))$$

et d'après (1) :

$$f(k) \sim F(k+1)-F(k). \tag{2}$$

Comme $a_n \to a \neq 0$ on sait que

$$a_k f(k) \sim a(F(k+1)-F(k)). \tag{3}$$

La série de terme général $a(F(k+1)-F(k))$ est de signe constant et divergente, donc, en vertu du théorème d'équivalence des sommes partielles des séries divergentes (*théorème 5.36 page 242*), on a

$$a\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} a(F(k+1)-F(k)) \sim \sum_{k=0}^{n-1} a_k f(k)$$

i.e.

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k f(k) = aF(n) + o(F(n)). \tag{4}$$

Enfin, on compare les intégrales divergentes : si $f' = o(f)$ alors $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = o\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ (même démonstration que pour Césaro) i.e. $f(x) = o(F(x))$ et grâce à (4), on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k f(k) \sim a\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Solution 2.3.1 On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$. Comme $\ln(1+x) \leqslant x$ alors $n\ln(1-\frac{t}{n}) \leqslant -t$ donc $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$. On peut alors appliquer le théorème de convergence dominée (*théorème 6.22 page 266*) à la suite de fonctions $f_n(t) = t^x\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$ qui est majorée par $t^x e^{-t}$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^1 t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Solution 2.3.2 Soit $f_n(x) = (-1)^n e^{-x}\dfrac{x^n}{(2n)!}$, f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{n!}{(2n)!} = u_n$. Or $\sum u_n$ est une série absolument convergente donc on peut appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions d'où

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-x}\frac{x^n}{(2n)!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Solution 2.3.3 On vérifie que $f(t) = \dfrac{\operatorname{sh}(zt)}{\operatorname{sh} t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. En effet f est prolongeable par continuité en 0 et, si $z = x+iy$, $\operatorname{sh}(zt) = \operatorname{sh}(xt)\cos(yt) + i\operatorname{ch}(xt)\sin(yt)$, donc $\left|\dfrac{\operatorname{sh}(zt)}{\operatorname{sh} t}\right| \leqslant 2\dfrac{\operatorname{ch}(xt)}{\operatorname{sh} t} \sim 2e^{(|a|-1)t}$ avec $a < 1$.

Pour $t > 0$ on a $f(t) = 2e^{-t}\operatorname{sh}(zt)\dfrac{1}{1-e^{-2t}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ où $f_n(t) = 2\operatorname{sh}(zt)e^{-(2n+1)t}$. On pose $S_N(t) = \sum\limits_{n=0}^{N} f_n(t)$, S_N converge simplement vers f et $|S_N(t)| \leqslant 2|\operatorname{sh}(zt)|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{-(2n+1)t} = |f(t)|$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_N(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, après un petit calcul, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2z}{n^2-z^2}$ donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}(zt)}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2z}{(2n+1)^2-z^2}.$$

Solution 2.3.4 On utilise l'égalité valable pour $t > 0$:

$$\frac{t^\alpha}{e^t - 1} = \frac{t^\alpha e^{-t}}{1 - e^{-t}} = t^\alpha e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{t^\alpha e^{-nt}}_{=f_n(t)}.$$

Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, intégrables sur $]0, +\infty[$ et de plus, en posant $\alpha_1 = \mathrm{Re}(\alpha)$,

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{\alpha_1} e^{-nt} = \frac{1}{n^{1+\alpha_1}} \Gamma(\alpha_1 + 1)$$

qui est le terme général d'une série convergente donc on peut utiliser le théorème de Lebesgue d'intégration terme à terme d'une série de fonction et conclure à l'égalité.

Solution 2.4.1 On distingue les cas suivants :

- Si $x \geqslant 1$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 (x - t^2) \,\mathrm{d}t = x - \frac{1}{3}$.
- Si $x \leqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 (t^2 - x) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{3} - x$.
- Si $0 < x < 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\sqrt{x}} (x - t^2) \,\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{x}}^1 (t^2 - x) \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3}(4x\sqrt{x} - 3x + 1). \end{aligned}$$

Il est à noter ici que MAPLE donne un résultat erroné pour le calcul de f vu qu'il donne $f(x) = 1/3\ (-1 + 3\,x)\ \mathit{signum}(-1 + x)$...

On remarque que, si $x \geqslant 1$ alors $f(x) \geqslant f(1) = \dfrac{2}{3}$, si $x \leqslant 0$ alors $f(x) \geqslant f(0) = \dfrac{1}{3}$ donc le minimum de f va se trouver pour $x \in [0, 1]$. f est dérivable sur $]0, 1[$ et $f'(x) = 2\sqrt{x} - 1$ d'où le tableau de variations de f

x	0		$1/4$		1
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$1/3$	$\searrow$	$1/4$	$\nearrow$	$2/3$

et donc $\inf f(x) = \dfrac{1}{4}$.

On remarque que f est de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux.

Solution 2.4.2

(1) On écrit que $F(x, y) = \displaystyle\int_1^{\sqrt{x}} t^y e^t \,\mathrm{d}t + \int_{\sqrt{x}}^x t^y e^t \,\mathrm{d}t$. $y \geqslant 0$, or

$$\int_1^{\sqrt{x}} t^y e^t \,\mathrm{d}t \leqslant x^{y/2}(e^{\sqrt{x}} - e) = o(x^{y/2}(e^x - e^{\sqrt{x}}))$$

et on fait la même chose pour $y < 0$, donc $F(x, y) \sim \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^x t^y e^t \,\mathrm{d}t = G(x, y)$.

$t \geqslant \sqrt{x} \Rightarrow G(x, y + 1) \geqslant \sqrt{x} G(x, y) \Rightarrow \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{G(x, y + 1)}{G(x, y)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{F(x, y + 1)}{F(x, y)} = +\infty$.

Puis $F(x, y + 1) = x^{y+1} e^x - e - (y + 1) F(x, y)$. En divisant par $F(x, y + 1)$, on obtient le résultat.

(2) $y \geqslant 0$ on a : $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln^y u \, \mathrm{d}u < \ln^y k < \int_{k}^{k+1} \ln^y u \, \mathrm{d}u$. En posant $t = \ln u$ et en additionnant ces inégalités, on trouve :

$$\int_{\ln 2}^{\ln n} t^y e^t \, \mathrm{d}t < S_n(y) - \ln^y 2 < \int_{\ln 3}^{\ln n+1} t^y e^t \, \mathrm{d}t$$

et donc $S_n(y) \sim n \ln^y n$. On procède de même pour $y < 0$.

Solution 2.4.3 En faisant le changement de variable $t = x + u$ on a

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \, \mathrm{d}u}{x+u} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \, \mathrm{d}u}{(x+u)^3}$$

(intégration par parties). Or

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} \, \mathrm{d}u}{(x+u)^3} \leqslant \frac{1}{x^3} \int_0^{+\infty} e^{-u} \, \mathrm{d}u$$

donc on peut écrire $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Solution 2.4.4

(1) F est bien définie pour $x \geqslant 0$ (car la fonction intégrée est continue) et pour $x < 0$ on a $\ln(1 + t^x) \underset{0}{\sim} x \ln t$ qui est intégrable sur $]0, 1]$.

Remarque : on a la relation :

$$F(-x) = F(x) + x \text{ (car } \ln(1 + t^{-x}) = \ln(1 + t^x) - x \ln t).$$

(2) On remarque que $x < x' \Rightarrow t^x > t^{x'} \Rightarrow F(x) > F(x')$.
- $x > 0$: $\ln(1 + t^x) \leqslant t^x$ donc $F(x) \leqslant \dfrac{1}{x+1}$ ce qui donne $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$.
- Si $-x \to +\infty$ alors $F(-x) = F(x) + x \to +\infty$.

(3) F est bien continue sur $]0, +\infty[$ grâce au théorème de continuité sous le signe intégral (*théorème 6.24 page 267*). F est continue sur $]-\infty, 0[$ grâce à la relation $F(x) + x = F(-x)$. Enfin, en 0, comme F est décroissante, si $x > 0$ on a $F(-x) \geqslant F(0) \geqslant F(x)$ et donc $x \geqslant F(-x) - F(0) \geqslant 0$ et $x \geqslant F(0) - F(x) \geqslant 0$ d'où F est continue en 0.

Solution 2.4.5 Comme $\left|ite^{-t^2+itx}\right| \leqslant |t|e^{-t^2}$, $\left|e^{-t^2+itx}\right| \leqslant e^{-t^2}$ où $t \mapsto e^{-t^2} \in L^1(\mathbb{R})$ et $(t, x) \mapsto ite^{-t^2+itx}$, $(t, x) \mapsto e^{-t^2+itx}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral (*théorème 6.26 page 268*) donc f est dérivable.
Pour intégrer par parties, on pose $\mathrm{d}v = e^{-t^2} t \, \mathrm{d}t$ et $u = ie^{itx}$ et l'on obtient $f'(x) = -\dfrac{x}{2} f(x)$.
On résout alors l'équation différentielle pour trouver $f(x) = f(0)e^{-x^2/4} = \sqrt{\pi}e^{-x^2/4}$.

Solution 2.4.6

(1) On va décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{x^{m-1}}{1 + x^{2n}}$ en éléments simples :

Le dénominateur s'annule pour $x = x_k = e^{i\alpha_k}$ où $\alpha_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $0 \leqslant k \leqslant 2n - 1$

On a alors la décomposition

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}} = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{a_k}{x-x_k},$$

où $a_k = \dfrac{P(x_k)}{Q'(x_k)}$ et on a $a_k = \dfrac{x_k^{m-1}}{2nx_k^{2n-1}} = -\dfrac{x_k^m}{2n}$ car $x_k^{2n} = -1$
On obtient finalement la décomposition dans $\mathbb{C}$:

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{x_k^m}{x-x_k}$$

soit encore en rassemblant les parties conjuguées et en remarquant que $x_k = \overline{x}_{2n-1-k}$

$$\frac{x^{m-1}}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2x\cos m\alpha_k - 2\cos(m-1)\alpha_k}{x^2-2x\cos\alpha_k+1}$$

car $(x-\overline{x}_k)x_k^m + x - x_k)\overline{x}_k^m = 2x\cos(m\alpha_k) - 2\cos((m-1)\alpha_k)$
Comme m est impair on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2}\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{+X} \frac{x^{m-1}\,\mathrm{d}x}{1+x^{2n}}.$$

Pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$, on écrit que

$$\begin{aligned}\frac{2x\cos m\alpha_k - 2\cos(m-1)\alpha_k}{x^2-2x\cos\alpha_k+1} &= \frac{2x\cos m\alpha_k - 2\cos m\alpha_k\cos\alpha_k}{x^2-2x\cos\alpha_k+1} \\ &\quad - \frac{2\sin m\alpha_k\sin\alpha_k}{(x-\cos\alpha_k)^2+(\sin\alpha_k)^2}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_{-X}^{+X} \frac{2x\cos m\alpha_k - 2\cos(m-1)\alpha_k}{x^2-2x\cos\alpha_k+1}\,\mathrm{d}x &= \cos m\alpha_k \ln\frac{X^2-2X\cos\alpha_k+1}{X^2+2X\cos\alpha_k+1} \\ &= -2\sin m\alpha_k\left[\operatorname{Arctan}\frac{x-\cos\alpha_k}{\sin\alpha_k}\right]_{-X}^{+X}\end{aligned}$$

Or $0 \leqslant k \leqslant n-1$ donc on a $0 < \alpha_k < \pi$ d'où $\sin\alpha_k > 0$, et à la limite on a :

$$\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{+X} \frac{2x\cos m\alpha_k - 2\cos(m-1)\alpha_k}{x^2-2x\cos\alpha_k+1}\,\mathrm{d}x = -2\pi\sin m\alpha_k$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin m\alpha_k = \frac{\pi}{2n}\Im\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{im(2k+1)\frac{\pi}{2n}}\right) = \frac{\pi}{2n\sin\dfrac{m\pi}{2n}}.$$

Remarque : tous ces calculs peuvent être évités si on utilise le théorème des résidus de Cauchy (hors programme).

(2) En faisant le changement de variable $v = x^{2n}$ on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{m-1}\,\mathrm{d}x}{1+x^{2n}} = \frac{1}{2n}\int_0^{+\infty} \frac{v^{\frac{m}{2n}-1}}{1+v}\,\mathrm{d}v$

Donc, en posant $F(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x}{1+x}$ on a :

$$F(\frac{m}{2n}) = \frac{\pi}{\sin\frac{m\pi}{2n}}$$

Pour obtenir le résultat final, il suffit de montrer que $F(\alpha)$ est continue car l'ensemble $\{\frac{m}{2n},\ m \text{ impair},\ m < 2n\}$ est dense dans $[0,1]$: Or, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x}{1+x} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x}{1+x}$$

et pour $\alpha \in [a,b] \subset]0,1[$ on peut appliquer les théorèmes de continuité sous le signe intégral à chacune des deux intégrales (*théorème 6.24 page 267*).

- Pour $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x}{1+x}$ on domine $\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ par x^{a-1} qui est intégrable.
- Pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x}{1+x}$ on domine $\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ par x^{b-2} qui est bien intégrable sur $[1,+\infty]$
  Dès lors en approchant α par une suite de rationnels et en utilisant la continuité de F on peut conclure que pour $\alpha \in]0,1[$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x}{1+x} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Solution 3.1.1

(1) Convergence en 0 et en $+\infty$ donc Γ est définie sur $]0,+\infty[$ (cf. *page 270*).

(2) On a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ en faisant une intégration par parties

$$\begin{array}{ll} u = t^x & \mathrm{d}u = xt^{x-1}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\,\mathrm{d}t & v = -e^{-t} \end{array}$$

d'où

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} u\,\mathrm{d}v = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} xt^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\ &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

On en déduit, par une récurrence immédiate, $\Gamma(n+1) = n!$.

(3) a) En posant $t = u^2$ dans l'expression de $\Gamma(x)$ on obtient

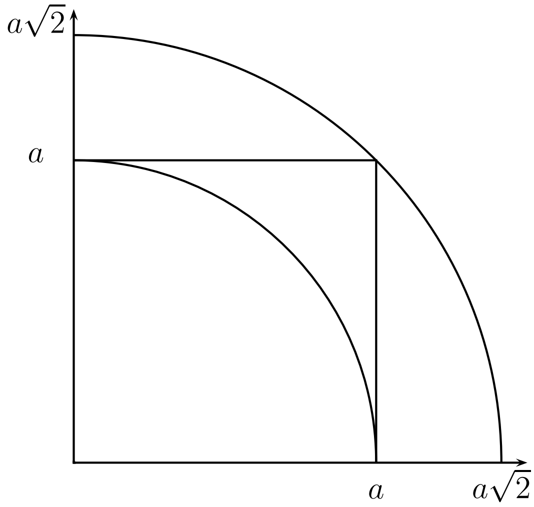
$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} u^{2x-1}e^{-u^2}du.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4\left(\int_0^{+\infty} u^{2x-1}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_0^{+\infty} v^{2y-1}e^{-v^2}\,\mathrm{d}v\right) \\ &= \lim_{a\to+\infty} 4\left(\int_0^{a} u^{2x-1}e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_0^{a} v^{2y-1}e^{-v^2}\,\mathrm{d}v\right) \\ &= \lim_{a\to+\infty} C(a) \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini.

b) Un dessin aide beaucoup à la démonstration :



En effet, on intègre une fonction positive donc, en appliquant le *théorème 5.8 page 98*, on peut dire que

$$\iint_{\mathcal{R}(a)} 4e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \leqslant \iint_{\mathcal{C}(a)} 4e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \leqslant \iint_{\mathcal{R}(a\sqrt{2})} 4e^{-(u^2+v^2)}u^{2x-1}v^{2y-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

où $\mathcal{R}(a)$ désigne le quart de disque centré en $(0,0)$ de rayon a et $\mathcal{C}(a)$, le carré de coté a.

c) En passant en polaires dans l'expression de $R(a)$, on a

$$4\int_0^a r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}\,\mathrm{d}r \times \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,\mathrm{d}\theta \leqslant C(a) \leqslant 4\int_0^{a\sqrt{2}} r^{2(x+y)-1}e^{-r^2}\,\mathrm{d}r \times \int_0^{\pi/2} \cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$$

et, grâce au théorème d'encadrement (*théorème 3.17 page 61*) on peut conclure à

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \lim_{a\to+\infty} C(a) = \Gamma(x+y)B(x,y)$$

en posant $t = r^2$ dans la première intégrale, $u = \sin^2\theta$ dans la deuxième.
Généralisons le résultat au cas où $x > 0$ et $y > 0$:

$$B(x+1,y) = \int_0^1 (1-t)^x t^{y-1}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{x-1}t^{y-1}\,\mathrm{d}t}_{B(x,y)} - \underbrace{\int_0^1 (1-t)^{x-1}t^{y}\,\mathrm{d}t}_{B(x,y+1)}$$

puis on intégre $B(x,y+1)$ par parties, ce qui donne $B(x,y+1) = \dfrac{y}{x}B(x+1,y)$ d'où

$$B(x+1,y) = \frac{x}{x+y}B(x,y) \tag{R}$$

pour $x > 0$ et $y > 0$.
Ensuite, si $x > 0$ et $y > 0$ alors $x+1 > 1$ et $y+1 > 1$ donc, en appliquant ce qu'on

vient de prouver on a

$$\begin{aligned}\underbrace{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}_{=xy\Gamma(x)\Gamma(y)} &= \Gamma(x+y+2)\times B(x+1,y+1)\\ &= (x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)\times\frac{x}{x+y+1}\frac{y}{x+y}B(x,y)\end{aligned}$$

en utilisant la relation (R) deux fois. Après simplification on obtient la formule généralisée.

(4) Comme $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\pi$ alors $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ et on utilise le 2. On obtient finalement $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$.

(5) Avec le résultat du 2. on a

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\Gamma(1)B(x,1-x)=\int_0^1(1-t)^{x-1}t^{-x}\,\mathrm{d}t.$$

On fait alors les changements de variables $u=\dfrac{1}{t}$ et $v=u-1$ d'où $B(x,1-x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{v^{x-1}\,\mathrm{d}v}{1+v}$ et grâce au résultat de l'exercice 2.4.6, on peut conclure

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

Solution 3.1.2 On a $\displaystyle\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{1+y^2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1/y}=\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{y}}{1+y^2}$ qui est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Soit $I\times I'=[a,b]\times[c,d]\subset]0,+\infty[^2$ on a

$$\iint_{I\times I'}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\leqslant\int_c^d\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{y}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Conclusion : f est intégrable sur $]0,+\infty[^2$ et $\displaystyle\iint_{]0,+\infty[^2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}}$.

De même, $f(x,.)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et en faisant le calcul dans ce sens, on arrive à

$$\begin{aligned}\iint_{]0,+\infty[^2}\frac{y}{(1+x^2y)(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\left(\int_0^{+\infty}\frac{x^2+y}{1+y^2}-\frac{x^2}{1+x^2y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x-2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En comparant avec le premier résultat, on en déduit l'égalité

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

Solution 3.1.3

(1) $f(.,y)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $f(.,y)\sim\dfrac{1}{x^2}$ en $+\infty$ donc $f(.,y)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. En décomposant la fraction rationnelle par rapport à x on obtient immédiatement $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2(y+1)^2}$ puis $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$.

(2) On remarque que $f(y,x) = -f(x,y)$ et par "symétrie" $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$.
On peut conclure que f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[^2$.

(3) On fait le changement de variable $\varphi\ :\ (x,y)\mapsto(y,x)$ et on applique la formule de changement de variable

$$\iint_{[0,a]^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{[0,a]^2} f(y,x)|J_\varphi|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\iint_{[0,a]^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

donc $\displaystyle\iint_{[0,a]^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$. Ceci s'explique bien par le fait que f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[^2$.

Solution 3.2.1 Les paramètres qui interviennent dans cet exercice nous amènent à faire le changement de variable suivant $u = xy$, $v = y^2 - x^2$.
Soit $\varphi\ :\ (x,y)\in D\mapsto(xy, y^2-x^2)\in[a,b]\times[0,1]$, montrons que φ est bijective : $x = \dfrac{u}{y}$ donc $v = y^2 - \dfrac{u^2}{y^2}$. L'équation $Y^2 - vY - u^2 = 0$ admet deux racines réelles dont l'une Y_0 est strictement > 0, on prend alors $y = \sqrt{Y_0}$ et x et parfaitement déterminé. Si on pose $\psi\ :(u,v)\in[a,b]\times[c,d]\mapsto(x,y)\in D$ alors $\psi = \varphi^{-1}$.
Le jacobien $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)} = 2(x^2+y^2) > 0$ donc on peut affirmer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et la caractérisation des difféomorphismes nous permet d'affirmer que φ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.
Finalement $I = \dfrac{1}{2}\int_a^b\left(\int_0^1 v^u\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{b+1}{a+1}$.

Solution 3.2.2 Il suffit de prendre $f(x,y) = e^{2i\pi(x+y)}$. En effet, si $\mathcal{R}_i = [p,q]\times[c_i,d_i]$ où p et q sont des entiers alors $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}_i} f = 0$ et, par additivité, $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f = 0$. Or cette intégrale vaut $\dfrac{1}{(2i\pi)^2}\left(e^{2i\pi b}-e^{2i\pi a}\right)\left(e^{2i\pi d}-e^{2i\pi c}\right)$ et elle est nulle ssi $b-a$ ou $d-c$ est un entier.

Solution 4.1.1

(1) Évident ! On a $x^2+y^2+z^2 = 1$.

(2) On passe en cylindriques : $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} u}\overrightarrow{U} + \operatorname{th} u\overrightarrow{V} + \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 u}\overrightarrow{k}$ où $\overrightarrow{U} = \begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix}-\sin u\\ \cos u\\ 0\end{pmatrix}$.
La méridienne de S passant par $M(u)$ a une tangente dirigée par $\overrightarrow{W} = -\operatorname{sh} u\overrightarrow{U} + \overrightarrow{k}$.
Or $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}u}.\overrightarrow{W} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}u}\right\|\|\overrightarrow{W}\|$ donc Γ coupe les méridiennes de S selon un angle de $\pi/4$.

Solution 4.2.1 Soit (Π) le plan $ux + vy + wz + h = 0$ (on procède comme pour les cubiques dans le plan) :
la recherche de $(\Pi) \cap (C)$ se ramène à la résolution de l'équation :

$$2wt^3 + 3vt^2 + 3ut + h = 0 \tag{(1)}$$

Si (Π) passe par trois points distincts $P_i(t_i)$ alors l'équation (1) admet t_1, t_2, t_3 comme racines ce qui donne $\sigma_1 = -\dfrac{3v}{2w}$, $\sigma_2 = \dfrac{3u}{2w}$ et $\sigma_3 = -\dfrac{h}{2w}$. En choisissant $w = 3$ (les coefficients de l'équation cartésienne d'un plan sont déterminés à une constante multiplicative près) on obtient l'équation de (Π)

$$2\sigma_2 x - 2\sigma_1 y + 3z - 6\sigma_3 = 0.$$

Le plan osculateur coupe la courbe en trois points confondus, il est donc obtenu à partir de (Π) en prenant $t_1 = t_2 = t_3 = t$ (par passage à la limite) d'où son équation :

$$2t^2x - 2ty + z - 2t^3 = 0.$$

Les coordonnées du point M_0 vérifient donc

$$2t_i^2x_0 - 2t_iy + z - 2t_i^3 = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3.$$

Si on pose $Q(t) = 2t^2x_0 - 2ty_0 + z - 3t^3$, on sait que Q admet les racines t_i, $i = 1, 2, 3$ donc $Q(t) = -2(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$ d'où $x_0 = \sigma_1$, $y_0 = \sigma_2$, $z = 2\sigma_3$.
On vérifie alors que M_0 appartient bien au plan (Π).
Conclusion : les quatre points P_1, P_2, P_3 et M_0 sont coplanaires.

Solution 4.2.2 Tout plan (P) passant par $\Omega_0(x_0, y_0, z_0)$ admet une équation de la forme :

$$u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0$$

où $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$ est un vecteur normal à (P). Son intersection avec le plan $z = h$ est la droite qui se projette sur le plan xOy selon la droite d'équation $u(x-x_0)+v(y-y_0)+w(h-z_0) = 0$ et un vecteur normal à cette droite est le vecteur $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ que l'on suppose non nul pour la circonstance.
L'équation du plan osculateur à (Γ) est donnée par

$$3\,t^2x - t^3 - 3\,ty + z = 0.$$

(P) est osculateur à (Γ) ssi $w = \dfrac{v^2}{3u}$ et $u^3 + 3uv(ux_0 + vy_0) + v^3z_0 = 0$.
On obtient 3 plans (en général). Pour $v \neq 0$, en posant $\lambda = \dfrac{u}{v}$ la condition cherchée s'écrit $\lambda_1\lambda_2 = -1$ où les λ_i sont les racines de $\lambda^3 + 3x_0\lambda^2 + 3y_0\lambda + z_0 = 0$.
On a alors $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\lambda_3 = z_0$ soit $z_0 = \lambda_3$.
On exprime que z_0 est racine de $\lambda^3+3x_0\lambda^2+3y_0\lambda+z_0 = 0$ ce qui donne $z_0[z_0^2+3x_0z_0+3y_0+1] = 0$.
Si $z_0 = 0$ alors on a $\lambda^3 + 3x_0\lambda^2 + 3y_0\lambda + z_0 = \lambda(\lambda^2 + 3x_0\lambda + 3y_0) = 0$ soit $y_0 = -\dfrac{1}{3}$.
L'ensemble des points (Ω) est donc contenu dans l'ensemble d'équation $\{z^2 + 3xz + 3y + 1 = 0\}$ (équation d'un paraboloïde hyperbolique). Le cas $v = 0$ nous amène à prendre $u \neq 0$, on retrouve alors le même résultat.
Réciproque : si $M(x, y, z)$ appartient au paraboloïde d'équation $z^2 + 3xz + 3y + 1 = 0$, cela signifie que l'équation $\lambda^3 + 3x_0\lambda^2 + 3y_0\lambda + z_0 = 0$ admet z_0 comme racine et, en distinguant les cas $z_0 \neq 0$ et $z_0 = 0$, cela signifie que cette équation a deux racines dont le produit vaut -1 ce qui est la condition cherchée.

Solution 4.3.1

(1) D'après le théorème de Weierstrass, il existe 2 applications polynomiales qui approchent $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ d'aussi près que l'on veut donc il existe un polynôme P à coefficients complexes qui vérifie $\|f-P\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{2}$. P ne s'annule pas et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc on peut lui appliquer le théorème du relèvement du cours, il existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{C})$ telle que $P = e^\varphi$.

(2) Comme $|f| = 1$, on a $\|1-g\| \leqslant \dfrac{1}{2}$, la partie réelle de g est > 0 et on pose $\psi(t) = \ln|g(t)| + i\operatorname{Arctan}\dfrac{\mathrm{Im}(g(t))}{\mathrm{Re}(g(t))}$ qui est continue.
On a ainsi $f = e^{i\theta}$ avec $\theta = -i(\varphi-\psi)$ fonction continue à valeurs réelles.
Si τ est une autre fonction qui vérifie $f = e^{i\tau}$ alors $\tau(t) = \theta(t) + 2n(t)\pi$ où $n(t)$ est une fonction à valeurs entières définie sur I donc n est constante (raisonner par l'absurde et utiliser le T.V.I.).

(3) Soit (I_n) une suite croissante de segments de réunion I. Soit θ_0 la fonction définie sur I_0 telle que $f = e^{i\theta_0}$. Si $t_0 \in I_0$, on définit par récurrence la suite (θ_n) par $\theta_n(t_0) = \theta_0(t_0)$. Par unicité on a $\theta_{n+1}(t) = \theta_n(t)$ pour tout $t \in I_n$. On définit alors θ sur I par $\theta(t) = \theta_n(t)$ si $t \in I_n$.

Solution 4.3.2 $|g(t)| = 1$ donc il existe θ continue telle que $g(t) = e^{i\theta(t)}$ et on a $e^{2i\theta(t)} = e^{it}$ soit $2\theta(t) = t + 2k\pi$. Si on choisit la détermination de θ qui s'annule en 0 alors $\theta(t) = \dfrac{t}{2}$ et $g(t) = e^{i\theta(t)/2}$ mais $t \mapsto g(t)$ est supposée être continue sur $\mathbb{R}$ (par composée d'applications continues) or $g(2\pi) = f(1) = e^{-i\pi} = -1$ et $g(0) = f(1) = 1$ ce qui est impossible.

Solution 4.4.1

(1) On élimine u entre $x^2+y^2 = a^2(\cos^6 u + \sin^6 u)$ et $z = a\cos 2u$ d'où : $x^2+y^2-\dfrac{3}{4}z^2 = \dfrac{a^2}{4}$ avec $-a \leqslant z \leqslant a$ (portion d'hyperboloïde a une nappe).

(2) $u \in]0,\pi/2[$, $\mathrm{d}s = 5a\sin u\cos u\,\mathrm{d}u$ et en cylindriques : $\overrightarrow{T} = \dfrac{3}{5}\overrightarrow{U}(\pi-u) - \dfrac{4}{5}\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{N} = -\overrightarrow{V}(\pi-u)$ et $\gamma = \dfrac{6}{25a\sin 2u}$.
