# DÉRIVATION ET INTÉGRATION

## 1. Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

### 1.1. Dérivée en un point, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $f\ :\ ]-a,a[\to F$ espace vectoriel normé de dimension finie continue en 0 et telle qu'il existe $k>0$, $k\neq 1$ tel que

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(kx)}{x}=L.$$

Montrer que $f$ est dérivable en 0.

---

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{D}}$
Si $f\ :\ [a,b]\to F$ espace vectoriel normé, on suppose que $f$ admet une dérivée à droite en $a$. Montrer, en utilisant la convexité de la norme, que $\|f\|$ admet une dérivée à droite en $a$.

---

### 1.2. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Exercice 1.2.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $a<b$ ; on pose :

$$g(x)=\int_a^b f(t-x)e^{it}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $g$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.

---

Exercice 1.2.2. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $E$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $C^1$ sur $[0,1]$. A toute fonction $f$ de $E$, on associe la fonction $g=L(f)$ par :

$$\forall x\in[0,1],\ g(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f(t)\,\mathrm{d}t\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Montrer que $L$ est un endomorphisme de $E$. Quels sont ses éléments propres ?

---

Exercice 1.2.3. $\boxed{\textbf{I}}$
Pour $x>0$, on pose $f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{e^t}{t+x}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que $f$ est décroissante, continue, dérivable.
(2) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)$ ; donner dans les 2 cas un équivalent de $f$ (on montrera que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(f(x)+\ln x)$ existe et vaut $\displaystyle\int_0^1\frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$).

---

## 2. Intégration sur un intervalle quelconque

### 2.1. **Fonctions intégrables à valeurs positives.**

Exercice 2.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$

Démontrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-[x]}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est bien définie et, en fonction de $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right)$, calculer cette intégrale .

$\gamma$ est ce qu'on appelle la *constante d'Euler* et vaut à peu près 0,577.

---

Exercice 2.1.2. $\boxed{\textbf{F T}}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2/n^2)^{n^2}}$.

Montrer que $u_n$ est bien définie et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

---

Exercice 2.1.3. $\boxed{\textbf{I}}$

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x/t}x^n\,\mathrm{d}x$.

Montrer que, pour $a > 0$, on a :

$$\int_a^{+\infty} e^{-x/t}x^n\,\mathrm{d}x < e^{-a/(2t)}n!(2t)^{n+1}.$$

---

Exercice 2.1.4. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $f\ : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux, bornée, telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leqslant \frac{a}{3}\int_0^x e^{-a(x-t)}f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{a}{3}\int_x^{+\infty} e^{a(x-t)}f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{3}e^{-ax/2}, a > 0.$$

Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$.

---

Exercice 2.1.5. $\boxed{\textbf{D}}$

Soit $f \in \mathcal{C}(]0,+\infty[,]0,+\infty[)$ de carré intégrable sur $]0,+\infty[$.

(1) Pour $x > 0$ fixé, montrer que $t \mapsto f(t)$ est intégrable sur $]0,x]$.
   On pose $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(2) Soit $0 < a < b$, on définit

$$z = \left(\int_a^b \left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}, \quad \alpha = \left(\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{(g(a))^2}{a}.$$

   Montrer que $z^2 - 2\alpha z - \beta \leqslant 0$.
   En déduire l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{g(x)}{x}\right)^2\mathrm{d}x$.
   Trouver $k$ réel tel que $I \leqslant k\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.

---

Exercice 2.1.6. $\boxed{\textbf{I}}$

Étudier pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ la nature de la série $\sum u_n$ où

$$u_n=\left(n\int_n^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t\right)^\beta \quad \text{pour } n\geqslant 1.$$

---

Exercice 2.1.7. $\boxed{\textbf{I}}$

Montrer que

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}=1.$$

---

Exercice 2.1.8. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit $F$ une fonction positive, décroissante de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que :

$$\lim_{h\to 0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}hF(nh)=\int_0^{+\infty}F(t)\,\mathrm{d}t$$

(poser $g(h)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}hF(nh)$).

---

Exercice 2.1.9. $\boxed{\textbf{F}}$

Étudier la suite $a_n=\dfrac{P(n)}{S(n)}$ où $P(n)=\displaystyle\int_0^n F(t)\,\mathrm{d}t$ et $S(n)=\sum\limits_{p=0}^{n}F(p)$.

(1) Dans le cas où $F$ a une limite non nulle en $+\infty$.
(2) Dans le cas où $F$ décroît vers 0 en $+\infty$ (on étudiera séparément les cas selon que $F(t)$ est ou non intégrable sur $[0,+\infty[$).

---

Exercice 2.1.10. $\boxed{\textbf{F}}$

Soit $f$ la fonction définie par $f(0)=0$ et pour $x\neq 0$ par :

$$f(x)=x\int_0^x\frac{e^{-t}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{|t|}}.$$

(1) Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$.
(2) Étudier ses variations, les branches infinies et la concavité du graphe (on admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

---

Exercice 2.1.11. $\boxed{\textbf{F}}$

On définit $f\ :\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}\ln(x-n)$ sur $]n,n+1[$.

Montrer, à l'aide d'une série, que $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie.

---

Exercice 2.1.12. $\boxed{\textbf{I}}$

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-nt}}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Étudier $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et trouver un équivalent de $I_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

---

Exercice 2.1.13. $\boxed{\textbf{I}}$

Étudier l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ de $t \mapsto \dfrac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{t^2+1}}$. On pose

$$I(\varepsilon) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Démontrer que, lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers 0, $I(\varepsilon)$ est équivalent à $-\ln\varepsilon$.

---

2.2. **Fonctions intégrables à valeurs complexes.**

Exercice 2.2.1. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nulle sur un voisinage de $+\infty$, montrer que

$$\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2\left(\int_0^{+\infty} tf^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} . \left(\int_0^{+\infty} tf'^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Par quelles hypothèses remplacer "$f$ nulle sur un voisinage de $+\infty$" pour que cette inégalité soit toujours valable ?

---

Exercice 2.2.2. $\boxed{\textbf{F}}$

(1) Déterminer les réels $\lambda$ tels que la suite $I_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos nt}{1 - 2\lambda\cos t + \lambda^2}\,\mathrm{d}t$ soit définie.
(2) Étudier les propriétés des applications $\lambda \to I_n(\lambda)$.
(3) Calculer $I_0(\lambda)$ et $I_1(\lambda)$.
(4) Chercher une relation entre $I_{n-1}(\lambda)$, $I_n(\lambda)$ et $I_{n+1}(\lambda)$.
(5) En déduire l'expression de $I_n(\lambda)$.

---

Exercice 2.2.3. $\boxed{\textbf{I}}$

Étudier l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ ou $[0, +\infty[$ des fonctions :

1. $\dfrac{\sqrt{x}\sin(1/x^2)}{\ln(1+x)}$ 2. $x + 1 - \sqrt{x^2+2x+2}$
3. $\dfrac{\sin x}{x^{\alpha}}$ 4. $\sin(x^2)$

---

Exercice 2.2.4. $\boxed{\textbf{I}}$

Calcul de :

(1) $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$.
(2) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\mathrm{Arctan}\,t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ (poser $u = \mathrm{Arctan}\,t$ et utiliser le 1.).

(3) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1+t)^3}}$.

(4) $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a-\cos t}$.

(5) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ (calculer $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{+X} g(x)\,\mathrm{d}x$ où $g(x) = \displaystyle\frac{x}{1-x\sqrt{2}+x^2}$).

(6) $I(a) = \displaystyle\int_0^{a} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)(1+x^2)}}$ $\quad a > 0$.

(7) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+4}}$.

(8) $I(\alpha) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-\cos\alpha)\sqrt{x^2-1}}$.

---

Exercice 2.2.5. $\boxed{\textbf{I C}}$
Soit $f$ une application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, uniformément continue intégrable sur $[0,+\infty[$.

(1) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (par l'absurde).

(2) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

---

Exercice 2.2.6. $\boxed{\textbf{F C}}$

(1) Soit $f\ : x \mapsto \displaystyle\frac{x^n}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}$ avec $a < b$, montrer que $f$ est intégrable sur $]a,b[$. On pose $I_n(a,b) = \displaystyle\int_a^b \frac{x^n}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}\,\mathrm{d}x$.

(2) Montrer que :

$$I_n(a,b) = \pi \sum_{p=0}^{[n/2]} \frac{n!}{2^{n+2p}(n-2p)!(p!)^2}(a+b)^{n-2p}(b-a)^{2p}.$$

---

Exercice 2.2.7. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $f\ : [1,+\infty[\to \mathbb{C}$ de carré intégrable.
Montrer que $\displaystyle\frac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.

---

Exercice 2.2.8. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $2T$-périodique ; on pose $a = \displaystyle\frac{1}{2T}\int_0^{2T} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(1) Si $F(t) = \displaystyle\int_0^t (f(u)-a)\,\mathrm{d}u$ alors montrer que $F$ est $2T$-périodique.

(2) En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)-a}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente et que $\displaystyle\int_X^{+\infty} \frac{f(t)-a}{t}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{X}\right)$.

(3) On suppose $f$ paire ; soit $G(t) = \displaystyle\int_0^t F(u)\,\mathrm{d}u$ : montrer que $G$ est $2T$-périodique et que $\displaystyle\int_{nT}^{+\infty} \frac{f(t)-a}{t}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

---

Exercice 2.2.9. **D**

Soit $f\ : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $f^2$ soit intégrable sur $[0,+\infty[$.
On pose, pour $x>0$, $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.
(2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

---

Exercice 2.2.10. **I**

Pour $x\in\mathbb{R}_+^*$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose $F_n(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^n}{1+t^2}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
Donner un équivalent de $F_n(x)$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.

---

Exercice 2.2.11. **I**

À l'aide de séries, étudier l'intégrabilité sur $[0,+\infty[$ ou $]0,+\infty[$ des fonctions :

1. $\dfrac{1}{\sqrt{|\sin x|(1+e^x)}}$ 2. $e^{-x^2|\sin x|}$ 3. $\dfrac{\sin\pi x}{\ln x}$.

---

Exercice 2.2.12. **D**

Étudier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t+t^\alpha\cos t}}\,\mathrm{d}t,\quad \alpha\geqslant 0.$$

---

2.3. **Le théorème de Lebesgue de convergence dominée.**

Exercice 2.3.1. **I**

Soit $f$ une fonction définie sur $[1,e]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, continue .
Étudier la limite de

$$u_n=n\int_1^{1+1/n} f(t^n)\,\mathrm{d}t$$

(faire un changement de variable pour montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\displaystyle\int_1^e\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$).

---

Exercice 2.3.2. **F**

Déterminer les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{Arctan}(nx)e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$,
(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right)(1-\mathrm{th}(x^n))\,\mathrm{d}x$.

---

Exercice 2.3.3. $\boxed{\textbf{F}}$
Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+a}.$$

---

Exercice 2.3.4. $\boxed{\textbf{I}}$
Chercher $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ où $I_n = n^2 \displaystyle\int_0^1 (1-x)^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$.

---

Exercice 2.3.5. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $\varphi$ une fonction bornée de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

(1) On pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^3 t\varphi(t)}{(1+n^2t^2)^2}\,\mathrm{d}t$, montrer que $I_n$ est bien définie.
(2) Étudier la limite de $I_n$.

---

2.4. **Intégrales dépendant d'un paramètre.**

Exercice 2.4.1. $\boxed{\textbf{F}}$
On suppose $a > 0$, $|b| < a$ et on pose $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + b\cos t}$.

(1) Donner la valeur de $I(a,b)$.
(2) Montrer que les fonctions $I(.,b)$ et $I(a,.)$ sont de classe $C^\infty$.
(3) Montrer que l'on peut écrire :

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{(a+b\cos t)^{n+1}} = \frac{\pi}{n!}\frac{P_n(a,b)}{(a^2-b^2)^{n+1/2}} \text{ et } \int_0^{\pi} \frac{\cos^n t\,\mathrm{d}t}{(a+b\cos t)^{n+1}} = \frac{\pi}{n!}\frac{Q_n(a,b)}{(a^2-b^2)^{n+1/2}}.$$

(4) Trouver une relation simple entre $P_n$ et $Q_n$.

---

Exercice 2.4.2. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\,\mathrm{d}\theta$.

(1) Étudier la définition de $f$.
(2) Exprimer $f(-x)$, $f(x^2)$ et $f(1/x)$ en fonction de $f(x)$.
En déduire $f$.

---

Exercice 2.4.3. $\boxed{\textbf{I}}$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - x\cos^2 t}}.$$

(2) Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur son ensemble de définition.

(3) Donner enfin un équivalent de $f(x)$ en $1^-$ (poser $u = \tan t$ et se ramener à une intégrale de 0 à 1 pour trouver : $f(x) \sim -\dfrac{1}{2}\ln(1-x)$). On utilisera le résultat qui peut être fourni par un logiciel de calcul formel et qui dit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-x+u^2}} \sim -\frac{1}{2}\ln(1-x)$

---

Exercice 2.4.4. $\boxed{\mathbf{I}}$

Pour $a > 0$ et $r \geqslant 1$, étudier la continuité et la dérivabilité de $F$ définie sur $]0,+\infty[$ par

$$F(x) = \int_0^a \frac{\mathrm{d}t}{x+t^r}.$$

Trouver l'équivalent de $F$ en 0 à l'aide de $I(r) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^r} = \frac{\pi}{r\sin\frac{\pi}{r}}$ pour $r > 1$ (résultat obtenu par exemple avec un logiciel de calcul formel).

---

Exercice 2.4.5. $\boxed{\mathbf{I}}$

Soit $\alpha > 0$ et $f_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \exp(-x^\alpha \sin t)\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

Étudier l'application $f_\alpha\ :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ (continuité, limites en 0 et en $+\infty$).

Chercher l'équivalent de $f_\alpha$ en $+\infty$.

---

Exercice 2.4.6. $\boxed{\mathbf{I}}$

Montrer que l'intégrale

$$I(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos^2 t + x^2\sin^2 t)\,\mathrm{d}t.$$

est bien définie et la calculer.

---

Exercice 2.4.7. $\boxed{\mathbf{F}}$

Ensemble de définition, continuité et dérivabilité de la fonction $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{tx}-1}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$

---

Exercice 2.4.8. $\boxed{\mathbf{F}}$

Ensemble de définition, continuité et dérivabilité de

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{1+tx}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

---

Exercice 2.4.9. $\boxed{\mathbf{F}}$

Étudier l'ensemble de définition et la continuité des fonctions :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t \text{ et } g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ ; montrer qu'elles ont même limite en $0^+$.

---

EXERCICE 2.4.10. **I**

Soit $\varphi$ une fonction de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{C}$, de classe $C^1$, intégrable sur $[0,+\infty[$.

(1) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{i\lambda_n t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

(2) Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi(t)\sin^2(nt)\,\mathrm{d}t$.

---

EXERCICE 2.4.11. **F**

(1) Soit $F\ : t\in\mathbb{R}\mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$ : étudier l'ensemble de définition de $F$, la continuité et la dérivabilité de $F$ ; calculer $F'(t)$ et en déduire l'expression de $F$.

(2) Application au calcul de $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

---

EXERCICE 2.4.12. **F**

On considère la fonction $f\ : x\mapsto \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t+x}}{t}\,\mathrm{d}t$.

(1) Étudier la continuité et la dérivabilité de $f$ sur son domaine de définition.

(2) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ : $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k} + O\left(\frac{1}{x^{n+2}}\right)$.

---

EXERCICE 2.4.13. **F**

Soit $f(x) = \int_0^1 \frac{\cos tx}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Étudier l'ensemble de définition, la continuité, la dérivabilité de $f$.

---

EXERCICE 2.4.14. **I C**

(1) Montrer que la fonction $f\ : t\mapsto \frac{\ln(1-t^2)\ln t^2}{t^2}$ est intégrable sur $]0,1[$. On pose

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)\ln t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

(2) À l'aide du développement en série entière de $\ln(1-t^2)$ en 0, montrer que

$$I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(2n-1)^2}$$

(calculs à justifier soigneusement).

(3) Sachant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer que $I = \frac{\pi^2}{2} - 4\ln 2$.

---

Exercice 2.4.15. **I**

Soit
$$F\ : x>0 \mapsto F(x)=\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}.$$
Quelles sont les limites de $F$ en $0^+$ et en $+\infty$ ?

---

Exercice 2.4.16. **I**

On considère l'application
$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{x}{t^2}\right)\ln t\,\mathrm{d}t.$$
Montrer que $F$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

---

Exercice 2.4.17. **I**

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(1) Montrer que, pour $x \geqslant 0$, $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose
$$\varphi(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t.$$
(2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\varphi(x)=f(0)$.

---

Exercice 2.4.18. **I C**

On pose $I(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp\left(-t^2-\frac{x^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

(1) Chercher le domaine de définition de $I$, étudier sa continuité et sa dérivabilité.

(2) Exprimer $I'(x)$ en fonction de $I(x)$ et en déduire la valeur de $I(x)$ ($\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

---

Exercice 2.4.19. **I**

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ :
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$
(Vérifier que ces deux fonctions sont solutions de $y''+y=\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.)

---

Exercice 2.4.20. **I T**

Calculer, après avoir montré qu'elles sont définies, les intégrales :
$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(xt)\,\mathrm{d}t,\quad g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(xt)\,\mathrm{d}t.$$

---

Exercice 2.4.21. **I**
On pose $f(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}$.

(1) Étudier le domaine de définition de $f$ et la continuité de $f$.
(2) Donner un équivalent de $f$ en 0.
(3) Montrer que la courbe représentative de $f$ présente un axe de symétrie.
(4) Déterminer la borne inférieure de $f$ sur son domaine de définition.

---

Exercice 2.4.22. **I**
Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-t} t^x \, \mathrm{d}t$.

(1) Étudier l'ensemble de définition, la monotonie de $F$ et trouver une relation entre $F(x+1)$ et $F(x)$.
(2) Trouver un équivalent de $F$ au voisinage de -1.
(3) Évaluer : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ ; trouver un équivalent de $F(x)$ en $+\infty$.
(4) Montrer que $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+x+1}$ pour $x > -1$.

---

Exercice 2.4.23. **D T**
Étude de $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)(t+x)}}$ :

(1) Ensemble de définition, de dérivabilité.
(2) Étude aux bornes (on utilisera le résultat suivant–que l'on demande d'admettre–) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+x)}} \sim -\ln x$ en 0).
(3) Trouver une équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par $f$.
(4) Donner enfin un développement asymptotique de $f$ au voisinage de $+\infty$.

---

## 3. Intégrales doubles

### 3.1. **Intégrales doubles sur un produit d'intervalles.**

Exercice 3.1.1. **I**

(1) Soit $I = \displaystyle\iint_{]0,+\infty[^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x)(1+xy^2)}$. Montrer que $I$ est bien définie et la calculer.
(2) En déduire $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x \, \mathrm{d}x}{x^2-1}$.

---

Exercice 3.1.2. **I**
On pose $f(x,y) = e^{-xy} \sin x$.

(1) $f$ est-elle intégrable sur $[0,+\infty[^2$ ?

(2) Soit $A_n = [0, n\pi] \times [0, +\infty[$, montrer que $I_n = \displaystyle\iint_{A_n} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est définie. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

---

EXERCICE 3.1.3. $\boxed{\textbf{D}}$
Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose $f_z(t) = e^{-zt^2}$.

(1) Si $\mathrm{Re}(z) > 0$ montrer que $f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et prouver que $I(z)^2 = \dfrac{\pi}{4z}$ où $I(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_z(t)\,\mathrm{d}t$.

(2) Si $z \in i\mathbb{R}^*$ montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_z(t)\,\mathrm{d}t$ existe. Que penser du prolongement de la fonction $z \mapsto I(z)$ à $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geqslant 0\}$ que l'on peut ainsi effectuer ?

(3) Calculer alors les intégrales de Fresnel : $S = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x$ et $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x^2\,\mathrm{d}x$.

---

EXERCICE 3.1.4. $\boxed{\textbf{D}}$
Calculer $I(\alpha) = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}_+^2} \exp\left(-(x^2 + 2xy\cos\alpha + y^2)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $\alpha$ est un réel quelconque (utiliser les lignes de niveau i.e. les courbes d'équation $E_a\ :\ x^2 + 2xy\cos\alpha + y^2 = a$ avec $a > 0$ et ramener le calcul de l'intégrale double à une intégrale simple).

---

## 3.2. Intégrales doubles sur une partie élémentaire.

EXERCICE 3.2.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Aire du compact défini par

$$x^2 + y^2 \leqslant 4,\ \ xy \geqslant 1,\ \ x \geqslant 0.$$

---

EXERCICE 3.2.2. $\boxed{\textbf{I}}$
Déterminer l'aire du domaine $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ où

$$\Delta_1\ :\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leqslant 0 \text{ et } \Delta_2\ :\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - 1 \leqslant 0.$$

---

EXERCICE 3.2.3. $\boxed{\textbf{F T}}$
Calculer $I = \displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1 + x^2 + y^2)^2}$ où $D$ est l'intérieur de la parabole $y^2 = 2x$.

---

EXERCICE 3.2.4. $\boxed{\textbf{I}}$
Calculer les intégrales triples:

(1) $I_1 = \displaystyle\iiint_D (x + y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^3, x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant x^2 + y^2\}$

(2) $I_2 = \displaystyle\iiint_D \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^3, x+y+z \leqslant 1\}$ (on remarque qu'au voisinage de (0,0,0): $\dfrac{z^3}{(y+z)(x+y+z)} \leqslant z$).

(3) $I_3 = \displaystyle\iiint_B \cos(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $B = \bar{B}(O,1)$ et $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

---

## 4. Courbes d'un espace vectoriel normé

### 4.1. **Courbes paramétrées.**

Exercice 4.1.1. **F T**

Étudier les courbes en paramétriques :

1 $\begin{cases} x = \sin t \cos 2t \\ y = \cos t \sin 2t \end{cases}$
2 $\begin{cases} x = t^2/(1+t^3) \\ y = (t^2-2t)/(1+t) \end{cases}$
3 $\begin{cases} x = 2t/(t^2-1) \\ y = (t+1)^2/t^2 \end{cases}$
4 $\begin{cases} x = t^3/(t^2+1) \\ y = (t+1)/(t^2+1) \end{cases}$

5 $\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \sin 2t \end{cases}$
6 $\begin{cases} x = e^t/(1+t) \\ y = t^2 x \end{cases}$
7 $\begin{cases} x = (t^2+1)/(t^3-1) \\ y = 2t/(t^3-1) \end{cases}$
8 $\begin{cases} x = 1/\cos^3 t \\ y = 1/\sin^3 t \end{cases}$

9 $\begin{cases} x = a(t - 2\operatorname{ch} t) \\ y = 2a/\operatorname{ch} t \end{cases}$
10 $\begin{cases} x = t^2 \ln t \\ y = t \ln^2 t \end{cases}$
11 $\begin{cases} x = t^2 + 1/(t+1) \\ y = t + 1/(t^2-1) \end{cases}$
12 $\begin{cases} x = e^{1/t}(t^2-t) \\ y = e^{1/t}(t^2-t+1) \end{cases}$

Exercices non corrigés.

---

### 4.2. **Étude locale d'un arc orienté $\Gamma$ de classe $\mathcal{C}^k$.**

Exercice 4.2.1. **F**

Condition sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que l'arc paramétré $t \mapsto M(t)$ ($x = 2t + \dfrac{a}{t^2}$, $y = t^2 + 2\dfrac{b}{t}$) possède un point de rebroussement.
Quel est l'ensemble des points ainsi obtenus ?

---

Exercice 4.2.2. **F T**

Tracer l'arc $M(t)$ donné par $x(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t+1} + \dfrac{1}{t-1}$, $y(t) = \dfrac{2}{t+1} + \dfrac{1}{t-1}$ ; préciser la position par rapport aux asymptotes, les points doubles.
Montrer que la tangente au point d'inflexion est la droite $x - 2y + 1 = 0$.

---

### 4.3. **Étude métrique d'un arc orienté.**

Exercice 4.3.1. **I C**

Soit $\Gamma$ l'arc de $\mathbb{R}^3$ donné dans un repère par la paramétrisation :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) = O + at\vec{i} + bt^2\vec{j} + ct^3\vec{k}$$

où $abc \neq 0$.
Montrer que les plans osculateurs à $\Gamma$ en 3 points $M(t_i)$ ($i \in \{1,2,3\}$) rencontrent le plan $\mathcal{P} = \mathrm{Aff}\{M(t_1), M(t_2), M(t_3)\}$ selon 3 droites concourantes.
On rappelle que les plans osculateurs sont les sous-espaces fondamentaux de dimension

2 et que, si les vecteurs $\overrightarrow{M'(t)}$ et $\overrightarrow{M''(t)}$ sont libres alors leur équation peut s'écrire $\det(\overrightarrow{MM(t)}, \overrightarrow{M'}(t), \overrightarrow{M''}(t) = 0$.

---

EXERCICE 4.3.2. $\boxed{\textbf{I C}}$

Dans $\mathbb{R}^3$ rapporté à un R.O.N. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, montrer que les plans $(\mathcal{P}_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'équations

$$P_t(M) = x\cos t + y\sin t + z\operatorname{ch} t - a\operatorname{sh} t = 0$$

sont des plans osculateurs à un arc $\Gamma$ que l'on précisera (on fera intervenir le vecteur $\vec{n}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \operatorname{ch} t\vec{k}$ orthogonal à $\mathcal{P}_t$). Voir l'exercice 4.3.1 pour la définition du plan osculateur.

---

EXERCICE 4.3.3. $\boxed{\textbf{I T}}$

Déterminer l'abscisse curviligne et la tangente unitaire en un point de la courbe $(C)$ définie par :

1. $\begin{cases} x = \dfrac{z^3}{4} + \dfrac{1}{3z} \\ y = \dfrac{z^3}{4} - \dfrac{1}{3z} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} r = \dfrac{a}{\operatorname{ch} m\theta} \\ z = a\operatorname{th} m\theta \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x = \dfrac{a\sqrt{2}}{\operatorname{ch}(t/a)} \\ y = t - a\operatorname{th}(t/a) \\ z = a\operatorname{th}(t/a) \end{cases}$

4. $x(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\cos u(1+\operatorname{ch}^2 u)}{\operatorname{ch}^2 u}\,du$, $y(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sin u(1+\operatorname{ch}^2 u)}{\operatorname{ch}^2 u}\,du$, $z(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\operatorname{sh} u(1+\operatorname{ch}^2 u)}{\operatorname{ch}^2 u}\,du$.

---

**Indication 1.1.1** Se ramener au cas où $L = 0$ puis, pour $x$ voisin de 0, écrire que $\|f(k^n x) - f(k^{n+1}x)\| \leqslant (1-k)k^n|x|\varepsilon$.

**Indication 1.1.2** Montrer que $\|f(a+h)\| = \|f(a) + hf'_d(a)\| + o(h)$, et que $h \mapsto \|f(a+h)\| = \|f(a) + hf'_d(a)\|$ est convexe. Utiliser enfin une propriété des fonctions convexes.

**Indication 1.2.1** Faire un changement de variable.

**Indication 1.2.2** Soit dériver sous le signe $\int$ ou utiliser la formule de Taylor. Il n'y a pas d'élément propre.

**Indication 1.2.3**

(1) $f \searrow$ évident, poser $u = t + x$ pour en déduire la dérivabilité de $f$. On obtient $f'(x) = -f(x) + \frac{e}{x+1} - \frac{1}{x}$.

(2) Utiliser l'encadrement $\frac{e^t}{x+1} \leqslant \frac{e^t}{t+x} \leqslant \frac{e^t}{x}$ et en déduire que $f(x) \sim_{+\infty} \frac{e-1}{x}$. Montrer ensuite que $f(x) + \ln x = \int_0^1 \frac{e^t-1}{x+t}\,dt + \ln(x+1)$, et majorer $\int_0^1 \left(\frac{e^t-1}{x+t} - \frac{e^t-1}{t}\right) dt$ par $Mx\ln\frac{x+1}{x}$

**Indication 2.1.1** On trouve $\int_1^n \frac{x-[x]}{x}\,dx = \ln n - \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \to 1 - \gamma$.

**Indication 2.1.2** Poser $x = n\tan t$ et utiliser Wallis.

**Indication 2.1.3** Faire un changement de variable, on trouve $I_n = n!t^{n+1}$ puis poser $f(x) = \int_x^{+\infty} e^{-2v}v^n\,dv - n!e^{-x}$ et montrer que $f(x) < 0$ pour $x \geqslant 0$.

**Indication 2.1.4** Poser $g(x) = \sup_{t\geqslant x} f(t)$, et montrer que $g$ admet une limite en $+\infty$ notée $l$. Puis écrire $a\int_0^x e^{-a(x-t)}f(t)\,dt \leqslant g(0)\int_0^{x/2} ae^{-a(x-t)}\,dt + g(x/2)\int_{x/2}^x ae^{-a(x-t)}\,dt$ pour obtenir $f(x) \leqslant \frac{1}{3}g(0)e^{-a(x/2)} + \frac{2}{3}g(x/2) + \frac{1}{3}e^{-ax/2} = h(x)$. Et prendre la limite quand $x \to +\infty$.

**Indication 2.1.5**

(1) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $[\varepsilon, x]$.

(2) Montrer que $z^2 = \frac{g(a)^2}{a} - \frac{g(b)^2}{b} + 2\int_a^b \frac{g(x)f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ puis, à nouveau, utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Poser $\alpha_a = \sqrt{\int_a^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x}$ et utiliser l'inégalité $z^2 - 2\alpha z - \beta \leqslant 0$ pour encadrer $z$.
Prouver ensuite que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)^2}{x} = 0$. Enfin, prendre la limite quand $a \to 0$ pour trouver $I \leqslant 4\int_0^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x$.

**Indication 2.1.6** Montrer que les termes de la série $\sum u_n$ sont bien définis, puis, en intégrant par parties, montrer que $u_n \sim \frac{e^{-\beta n}}{n^{\beta(\alpha-1)}}$ pour en déduire que :$\beta > 0$ : convergence, $\beta < 0$ : divergence, $\beta = 0$ : divergence.

**Indication 2.1.7** (comparer la série $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ à l'intégrale $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \quad (x > 1)$).

**Indication 2.1.8** Utiliser les inégalités $hF((n+1)h) \leqslant \int_{nh}^{(n+1)h} F(t)\,\mathrm{d}t \leqslant hF(nh)$.

**Indication 2.1.9**

(1) Si $\lim_{t\to+\infty} F(t) = l$, utiliser Césaro avec $u_k = \int_k^{k+1} F(t)\,\mathrm{d}t$.
(2) Si $F(t)$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$.
Si $F(t)$ est intégrable alors montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = (\int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t)/(\sum_{p=0}^{+\infty} F(p))$.

**Indication 2.1.10**

(1) En 0 pas de problème de définition. Le calcul de $f'$ est immédiat puis on utilise le théorème du prolongement dérivable.
(2) $f'(x)$ est du signe de $x$. Quand $x \to -\infty$ : B.P., quand $x \to +\infty$ : asymptote d'équation $y = x\sqrt{\pi}$.

**Indication 2.1.11** $f$ est localement intégrable sur $]n, n+1[$ et, en posant $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ on montre que $\sum u_n$ converge donc $f$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

**Indication 2.1.12** On montre que $I_n \sim \frac{6}{n^4}$ (on fait la différence et on la majore par $\int_0^{+\infty} t^7 e^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

**Indication 2.1.13** La fonction $t \mapsto \frac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{t^2+1}}$ est intégrable ssi $\varepsilon > 0$, puis on montre que $I(\varepsilon)$ est équivalent à $J(\varepsilon) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/\varepsilon} \frac{e^{-1/u}}{u}\,\mathrm{d}u$. On utilise enfin l'intégration des relation de comparaison.

**Indication 2.2.1** Il existe $a > 0$ tel que $f$ s'annule pour $x \geqslant a$, on fait une I.P.P. sur $[0, a]$ et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Il suffit d'avoir $tf^2(t)$, $tf'^2(t)$ intégrables sur $[0, +\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} tf^2(t) = 0$ pour pouvoir conclure.

**Indication 2.2.2**

(1) $I_n(\lambda)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, +1\}$.
(2) $I_n(\frac{1}{\lambda}) = \lambda^2 I_n(\lambda)$.
(3) On trouve $I_0(\lambda) = \frac{\pi}{1-\lambda^2}$ et $I_1(\lambda) = \frac{\pi\lambda}{1-\lambda^2}$ pour $|\lambda| < 1$.
(4) Pour $|\lambda| \neq 1$, $\lambda I_{n+1}(\lambda) - (1+\lambda^2)I_n(\lambda) + \lambda I_{n-1}(\lambda) = 0$.
(5) $I_n(\lambda) = \frac{\pi\lambda^n}{1-\lambda^2}$ si $|\lambda| < 1$, $\frac{\pi}{\lambda^n(\lambda^2-1)}$ si $|\lambda| > 1$.

**Indication 2.2.3** (1) intégrable sur $]0, +\infty[$, (2) non intégrable, (3) intégrable sur $]0, +\infty[$ ssi $1 < \alpha < 2$, (4) non intégrable (utiliser le (3)).

**Indication 2.2.4**

(1) On prouve que $I = J$ (chgt de var $u = \pi/2 - t$) et on calcule $I + J$. On trouve $I = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.
(2) On pose $u = \operatorname{Arctan} t$ et on trouve $I = \pi \ln 2$ après 2 intégrations par parties.
(3) Avec $u = \frac{1}{t}$ on trouve $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^{3/2}} = 2$.
(4) On distingue les cas $|a| > 1$ et $|a| \leqslant 1$ puis $I = \frac{a}{|a|}\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

(5) $\int_{-X}^{+X} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-X}^{+X} g(x)\,\mathrm{d}x \to \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ ou poser $x = e^u$.
(6) On pose $x = a\cos u$ puis $t = \sin u$ d'où $I(a) = \frac{\operatorname{Argsh} a}{\sqrt{1+a^2}}$.
(7) On pose $x = \tan\theta$ et $u = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$ d'où $I = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.
(8) On pose $x = \frac{1}{\cos t}$, $u = \tan\frac{t}{2}$ : $I(\alpha) = \frac{\pi-\alpha}{\sin\alpha}$ sur $]0,\pi[$ et $I(\pi) = 1$.

**Indication 2.2.5**

(1) Par l'absurde : si $f \not\to 0$ alors $\forall\varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n > n$, $|f(x_n)| \geqslant \varepsilon$ puis utiliser l'uniforme continuité de $f$.
(2) $\exists x_0 : \forall x \geqslant x_0 : |f(x)| \leqslant 1$ et conclure.

**Indication 2.2.6** L'intégrabilité de $f$ ne pose pas de problème, on pose $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$ alors $I_{2p+1}(-1,1) = 0$, $I_{2p}(-1,1) = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\pi$.

**Indication 2.2.7** Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $[1, X]$.

**Indication 2.2.8**

(1) On montre que $F(t + 2T) - F(t) = 0$.
(2) On intégre par parties et on utilise le fait que $F$ est bornée.
(3) $F$ est impaire donc $G$ est $2T$-périodique et on conclut car $G$ est bornée.

**Indication 2.2.9**

(1) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
(2) Soit $\varepsilon > 0$, grâce à l'intégrabilité de $f^2$, $\exists A > 0 \mid \forall x \geqslant A$, $\int_A^x f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^2$. On majore alors $g$ en coupant l'intégrale en 2 et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**Indication 2.2.10** On a $F_n(x) + F_{n+2}(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}$ on applique le théorème de continuité sous le signe intégral.
En 0 : pour $n = 1$ on pose $u = xt$, donc $F_1(x) \sim -\ln x$, et par récurrence, $F_n \sim \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$.
En $+\infty$, $F_n(x) \sim \frac{n!}{x^{n+1}}$ grâce à une simple majoration.

**Indication 2.2.11**

(1) En $k\pi$, $f$ est intégrable, En $+\infty$ on pose $I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ alors $I_k \sim Ae^{-k\pi/2}$. on majore $\int_{[0,n]} f$.
(2) Poser $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x^2|\sin x|}\,\mathrm{d}x$ et majorer $u_n$ par $\frac{1}{n^2}$.
(3) La fonction n'est pas intégrable en $+\infty$ car $\int_2^n |f(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=2}^{n-1}\frac{2}{\pi\ln(k+1)}$. Cette dernière somme est la somme partielle d'une série divergente.

**Indication 2.2.12** Tout d'abord on doit avoir $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.
$\alpha = 1$ : on étudie la série de terme général $u_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ et on lui applique le théorème des séries alternées.
$0 \leqslant \alpha < 1$ : on écrit $f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}(1 + \frac{\cos t}{t^{1-\alpha}})^{-1/2}$ et on développe la puissance -1/2 jusqu'au terme d'ordre $n$ tel que $n(1-\alpha) > 1/2$. On fait alors une I.P.P. pour prouver que chaque intégrale $I_k(x) = \int_{\pi/2}^x \frac{\cos^k t \sin t}{\sqrt{t}(t^{k(1-\alpha)})}\,\mathrm{d}t$ a une limite en $+\infty$.

**Indication 2.3.1** Poser $x = t^n$ et remarquer que $(1 + \frac{1}{n})^n \leqslant e$, utiliser enfin le théorème de convergence dominée.

**Indication 2.3.2** Pour les 2 limites, penser à majorer les fonctions par une fonction définie sur $]0, 1]$ et sur $]1, +\infty[$.

**Indication 2.3.3** Majorer à partir d'un certain rang la suite de fonctions par $t \mapsto t^{x-1}e^{-t/2}$.

**Indication 2.3.4** Faire un changement de variable et utiliser des majorations classiques.

**Indication 2.3.5** On majore $|\varphi|$, on pose ensuite $u = nt$ d'où $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{nu(\varphi(u/n)-\varphi(0))}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$ et on utilise le théorème de convergence dominée.

**Indication 2.4.1**

(1) $I(a,b)=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$.
(2) $I(a,b)$ est $C^\infty$ grâce au 1 et on peut dériver sous le signe intégral sur son domaine de définition.
(3) On procède par récurrence :
- vrai pour $n=0,1,2$.
- On suppose les propriétés vraies à l'ordre $n$ et on dérive la première relation par rapport à $a$ ce qui donne la relation $P_{n+1}(a,b)=(2n+1)aP_n(a,b)-(a^2-b^2)\frac{\partial P_n}{\partial a}(a,b)$ de même on obtient $Q_{n+1}(a,b)=-(2n+1)bQ_n(a,b)-(a^2-b^2)\frac{\partial Q_n}{\partial b}(a,b)$.

(4) On trouve par récurrence que $Q_n(a,b)=(-1)^nP_n(b,a)$ (mais attention en manipulant les dérivées partielles).

**Indication 2.4.2** $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$, définie sur $\mathbb{R}$. On a les relations $f(-x)=f(x),\ f(1/x)=f(x)-2\pi\ln|x|,\ 2f(x)=f(x)+f(-x)=f(x^2)$.
Si $|x|<1$ : alors $f(x)=\dfrac{1}{2}f(x^2)$.
Si $|x|>1$ alors $f(x)=f(1/x)+2\pi\ln|x|=2\pi\ln|x|$.
Enfin, si $|x|=\pm1$, $f(1)=f(-1)=0$.

**Indication 2.4.3**

(1) On a $D_f=]-\infty,1[$.
(2) Prendre $[a,b]\subset]-\infty,1[$, $F(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-x\cos^2 t}}$ et en déduire que $f$ est $C^1$ sur $[a,b]$.
(3) Faire le changement de variable $u=\tan t$ et écrire $f(x)=\int_0^{+\infty}g_x(u)\,\mathrm{d}u$. Encadrer enfin la différence $\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u+x^2}}-\int_0^1 g_x(u)\,\mathrm{d}u$ pour trouver $f(x)\sim-\frac{1}{2}\ln(1-x)$.

**Indication 2.4.4** $F$ est $C^1$ sur $]0,+\infty[$.
- $r=1$ : $F(x)=\ln\frac{a+x}{x}\sim-\ln x$ ;
- $r>1$ : poser $t=ux^{1/r}$ d'où $F(x)\sim I(r)x^{1/r-1}\sim\frac{\pi}{r\sin\frac{\pi}{r}}x^{1/r-1}$.

**Indication 2.4.5** $f_\alpha$ est continue sur $[0,+\infty[$.
- $\displaystyle\lim_{x\to0}f_\alpha(x)=f_\alpha(0)=\frac{\pi}{2}$.
- En $+\infty$, utiliser l'inégalité $t\leqslant\sin t\geqslant\frac{2}{\pi}t$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f_\alpha(x)=0$.

Poser $g_\alpha(x)=\int_0^{\pi/2}\exp(-x^\alpha\sin t)\cos t\,\mathrm{d}t$ et montrer que $g_\alpha\underset{+\infty}{\sim}x^{-\alpha}$ et obtenir la majoration $0\leqslant f_\alpha(x)-g_\alpha(x)\leqslant\frac{\pi^3}{8}x^{-3\alpha}$.

**Indication 2.4.6** Poser $f(t,x)=\ln(\cos^2 t+x^2\sin^2 t)$ et distinguer les cas $x\neq0$, $x=0$. Montrer alors que $I(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en utilisant le théorème de dérivabilité sous le signe intégral d'où $I'(x)=\frac{\pi}{x+1}$ puis $I(x)=\pi\ln\left(\frac{1+x}{2}\right)$.
*Remarque* : on peut utiliser une équation fonctionnelle satisfaite par $I$.

**Indication 2.4.7** On trouve $F(x)=A\sqrt{-x}$ où $A=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}-1}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

**Indication 2.4.8** $\mathcal{D}_F=[0,+\infty[$, $F$ est continue sur $[0,b]$ pour tout $b>0$, on montre la dérivabilité de $F$ sur $\mathbb{R}_+$.

**Indication 2.4.9** Calculer $f(x)$ puis montrer que $h(x)=f(x)-g(x)$ est continue.

**Indication 2.4.10**

(1) Intégrer par parties $\int_0^a e^{i\lambda_n t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ pour montrer que cette intégrale est un $O(\frac{1}{\lambda_n})$. Montrer aussi que $\int_a^{+\infty}e^{i\lambda_n t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\to0$ quand $a\to+\infty$. Choisir enfin $a$ puis $n$ pour conclure $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{i\lambda_n t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=0$.
(2) On montre que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\varphi(t)\sin^2(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

**Indication 2.4.11**

(1) Remarquer que $F$ est impaire, puis que $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}$. Poser $f(x,t) = \frac{\operatorname{Arctan} xt}{x(1+x^2)}$ et appliquer le théorème de continuité sous le signe intégral. Puis $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^2t^2)}$ montre que $F$ est dérivable et que $F'(t) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+t}$ $(t > 0)$. On obtient finalement $F(t) = \frac{\pi}{2}\ln(1+t)$.

(2) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = 2F(1) = \pi \ln 2$ (après intégration par parties).

**Indication 2.4.12**

(1) $f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ $(f'(x) = f(x) - \frac{1}{x})$.

(2) Poser $u = t - x$ et écrire $f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-u}\left(1 - \frac{u}{x} + \cdots + (-1)^n\frac{u^n}{x^n} + (-1)^{n+1}\frac{(u/x)^{n+1}}{1+u/x}\right)\mathrm{d}u$.

**Indication 2.4.13** Poser $g(t,x) = \frac{\cos tx}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ et utiliser le théorème de continuité sous le signe intégral. Puis $\frac{\partial g}{\partial x}(t,x) = -\frac{t\sin tx}{\sqrt{1-t^2}}$ et utiliser le théorème de dérivabilité sous le signe intégral.

**Indication 2.4.14**

(1) En 1, $f$ se prolonge par continuité, en 0, $f(t)$ est intégrable.

(2) $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$ où $u_n(t) = -\frac{t^{2(n-1)}}{n}\ln t^2$ et montrer la convergence uniforme de la série.

(3) Utiliser $\frac{2}{n(2n-1)^2} = \frac{4}{2n} - \frac{4}{2n-1} + \frac{4}{(2n-1)^2}$ et regrouper les termes.

**Indication 2.4.15** L'intégrabilité sur $[0, x[$ ne pose pas de problème.

- Limite en 0 : utiliser l'encadrement $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}} \leqslant F(x) \leqslant \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}}$.
- Limite en $+\infty$ : poser $t = ux$ et appliquer le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

**Indication 2.4.16** $F$ est impaire et $F(0) = 0$ puis choisir $X \leqslant 1$ tel que $\left|\int_0^X \ln t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, utiliser $|\sin u - \sin v| \leqslant |u - v|$ et montrer que si $|x - y| \leqslant \eta$ où $\eta$ est tel que $|x - y|$ $int_X^{+\infty}\frac{|\ln t|}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ alors $|F(x) - F(y)| \leqslant \varepsilon$.

**Indication 2.4.17**

(1) Immédiat.

(2) Écrire $x\varphi(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} xe^{-xt}(f(t) - f(0))\,\mathrm{d}t$, puis majorer $\left|\int_a^{+\infty} xe^{-xt}f(0)\,\mathrm{d}t\right|$ et $\int_a^{+\infty} xe^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t$.

**Indication 2.4.18** $I$ est définie sur $\mathbb{R}$ puis appliquer les théorèmes de continuité sur $\mathbb{R}$ et de dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ (prendre $0 < a \leqslant x \leqslant A$). On trouve alors $I'(x) = -2I(x)$, on obtient finalement $I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|x|}$

**Indication 2.4.19** $\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$ existe bien (faire une I.P.P.) et $f(x) = \cos x.s(x) - \sin x.c(x)$ avec $s(x) = \int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $c(x) = \int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$. On obtient alors $f''(x) = -\cos x.s(x) + \sin x.c(x) + \frac{\sin^2 x}{x} + \frac{\cos^2 x}{x}$.
$g(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue pour $x \in \mathbb{R}_+$, pour $x \geqslant a > 0$, appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral deux fois pour obtenir $g''(x) = \int_0^{+\infty}\frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $\delta = f - g$ est solution de $\delta + \delta'' = 0$ et prendre la limite en $+\infty$.

**Indication 2.4.20** Majorer le cosinus et le sinus par 1 puis poser $h(x) = f(x) + ig(x)$ et utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral, on trouve : $h(x) = -2(x+i)h'(x)$ que l'on peut résoudre ce qui donne $h(x) = \lambda\frac{\exp(i/2\operatorname{Arctan} x)}{(1+x^2)^{1/4}}$. En exprimant $f$ et $g$ à l'aide de fonctions algébriques, on obtient $f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+1}+1}}{\sqrt{x^2+1}}$, $g(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

**Indication 2.4.21**

(1) $f$ est définie et continue pour $\alpha \in ]0,1[$ (prendre $[a,b] \subset ]0,1[$ et utiliser les majorations $x^b \leqslant x^\alpha \leqslant x^a$ si $x \in ]0,1]$ et $x^a \leqslant x^\alpha x^b$ si $x \in [1, +\infty[$).

(2) $f(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha}$.
(3) $f(\alpha) = f(1-\alpha)$ (par changement de variable).
(4) Avec le même changement de variable on a $f(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{x^{1-\alpha}}\right) \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$ puis $f(\alpha) \geqslant \pi$.

**Indication 2.4.22**

(1) $\mathcal{D}_F = ]-1, +\infty[$, $F \searrow$ et $F(x+1) = (x+1)F(x) - \frac{1}{e}$.
(2) $F$ est continue à droite en 0 (utiliser le théorème de continuité sous le signe intégral) d'où si $x+1 \to 0$, $F(x) \sim \frac{F(0)+1/e}{x+1} = \frac{1}{x+1}$.
(3) Par encadrement, on trouve $F(x) \sim \frac{1}{ex}$.
(4) Écrire $F(x) - \int_0^1 t^x \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right) \mathrm{d}t$ et utiliser la convergence normale.

**Indication 2.4.23**

(1) $f$ est définie pour $x > 0$ et majorer $F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(t+x)}}$ par $|F(x,t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \frac{1}{(t+a)^{3/2}}$ pour $x \geqslant a > 0$. Montrer alors que $f$ est dérivable et que $f'(x) = \frac{-1}{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} \frac{1}{(t+x)^{3/2}}$.
(2) **Étude en 0** : soit $g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+x)}}$, montrer que $0 \leqslant f(x) - g(x) \leqslant 2$ d'où l'équivalent en 0 de $f$ : $-\ln x$.
**Étude en** $+\infty$ : on pose ici $h(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)x}}$, montrer que $0 \leqslant h(x) - f(x) \leqslant \frac{2}{x\sqrt{x}}$ puis $f(x) \sim \frac{\pi}{\sqrt{x}}$.
(3) On a, comme au 1., $f''(x) = \frac{3}{4} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^2\sqrt{t(1-t)(t+x)}}$ puis, à l'aide d'une I.P.P. on trouve $4(x+x^2)f''(x) + 4(2x+1)f'(x) + f(x) = 0$.
(4) Écrire $\frac{1}{\sqrt{t+x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \left(\frac{t}{x}\right)^n$ pour $x > 1$ et utiliser le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions, on se ramène à des intégrales de Wallis d'où $f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2}\right]^2 \frac{1}{x^n}$ pour $x > 1$.

**Indication 3.1.1**

(1) Intégrer par rapport à $y$ puis par rapport à $x$, on trouve $I = \frac{\pi^2}{2}$.
(2) On intègre par rapport à $x$ puis par rapport à $y$, on trouve $J = \frac{\pi^2}{4}$.

**Indication 3.1.2**

(1) $f$ n'est pas intégrable (intégrer $|f|$ par rapport à $y$ sur $[0,1]$).
(2) $I_n$ est définie (on intègre aussi par rapport à $y$). On fait alors le calcul de $I_n$ en intervertissant les intégrations, on prouve l'existence de $I$ et la valeur de $I$ s'obtient par passage à la limite.

**Indication 3.1.3**

(1) Utiliser la même méthode que pour l'intégrale de Gauss.
(2) Poser $I(z,x) = \int_0^x e^{-zt^2} \,\mathrm{d}t$, couper l'intégrale en 2 et faire une intégration par parties dans la seconde intégrale. Prouver ensuite la continuité sur $D$.
(3) Calculer $I(-i)^2$ puis déterminer le signe de $S$.

**Indication 3.1.4** Se ramener au cas où $\alpha \in [0,\pi]$ puis déterminer l'aire du quart d'ellipse délimité par $E_a$, $x=0$, $y=0$. Pour $\alpha \in ]0,\pi[$ on trouve $I(\alpha) = \frac{\alpha}{2\sin\alpha}$, $I(0) = \frac{1}{2}$ et $I(\pi) = +\infty$.

**Indication 3.2.1** Passer en polaires, on trouve $A = \frac{2\pi}{3} - \ln(2+\sqrt{3})$.

**Indication 3.2.2** Supposer que $0 < b \leqslant a$ et faire le changement de variables : $\begin{cases} x = au\cos t \\ y = bu\sin t \end{cases}$, l'aire recherchée s'écrit $\mathcal{A} = ab\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \inf(1, v^2(t)) \,\mathrm{d}t$ puis partager le domaine en 2, finalement $\mathcal{A} = 4ab \operatorname{Arctan} \frac{b}{a}$.

**Indication 3.2.3** Passer en polaires, on trouve $I = \dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

**Indication 3.2.4** $I_1 = \frac{2}{5}$, $I_2 = \frac{1}{4^3}$, avec $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, $I_3 = \frac{4\pi}{\rho^3}(\sin\rho - \rho\cos\rho)$.

**Indication 4.1.1** Se faire le tracé sur ordinateur...

**Indication 4.2.1** La C.N.S. est $a = b$ et l'ensemble cherché est la parabole d'équation $y = \frac{x^2}{3}$.

**Indication 4.2.2** $t \to 1$ : $y - x + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}(t-1) + o(t-1)$, $t \to -1$ : $y - 2x - \frac{5}{2} = \frac{9}{4}(t+1) + o(t+1)$, la tangente au point d'inflexion admet pour équation $x - 2y + 1 = 0$.

**Indication 4.3.1** L'équation du plan osculateur en $M(t)$ est $\Pi(t) \quad 3bct^2X - 3actY + abZ - abct^3 = 0$ écrire ensuite que $\mathcal{P} \quad ux + vy + wz + h = 0$ coupe $\Gamma$ et utiliser les fonctions symétriques élémentaires des racines $(\sigma_i)$. L'intersection des $\Pi(t_i)$ est le point $A(\frac{a\sigma_1}{3}, \frac{b\sigma_2}{3}, c\sigma_3)$ et $A \in \mathcal{P}$ d'équation $bc\sigma_2 x - ca\sigma_1 y + abz - abc\sigma_3 = 0$.

**Indication 4.3.2** Poser $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(t)$ et utiliser $\overrightarrow{f}'(t) \perp \vec{n}(t)$ et $\overrightarrow{f}''(t) \perp \vec{n}(t)$, dériver pour obtenir le système $\overrightarrow{f}(t).\vec{n}(t) = a\,\mathrm{sh}\,t$, $\overrightarrow{f}(t).\vec{n}'(t) = a\,\mathrm{ch}\,t$ $\overrightarrow{f}(t).\vec{n}''(t) = a\,\mathrm{sh}\,t$ et le résoudre.

**Indication 4.3.3**

(1) $\mathrm{d}s = \frac{A(z)}{12z^2}\,\mathrm{d}z$ où $A(z) = \sqrt{2}(9z^4 + 4)$, $\overrightarrow{T} = \frac{1}{A(z)}\left[(9z^4 - 4)\vec{i} + A(z)\vec{j} + 12z^2\vec{k}\right]$,

(2) $\mathrm{d}s = a\frac{\sqrt{m^2+1}}{\mathrm{ch}\,m\theta}\,\mathrm{d}\theta$ ; $\overrightarrow{T} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\left[-m\,\mathrm{th}\,m\theta\vec{u} + \vec{v} + \dfrac{m}{\mathrm{ch}\,m\theta}\vec{k}\right]$,

(3) $\mathrm{d}s = \mathrm{d}t$ d'où $\overrightarrow{T} = c\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(t/a) \\ \mathrm{sh}^2(t/a) \\ 1 \end{pmatrix}$, où $c = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t/a)}$.

(4) $\mathrm{d}s = \frac{1+\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{d}t$, $\overrightarrow{T} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,t}(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \mathrm{sh}\,t\vec{k}) = \frac{1}{\mathrm{ch}\,t}(\vec{u} + \mathrm{sh}\,t\vec{k})$ où $\vec{u}$ est le vecteur qui fait un angle $t$ avec $\vec{i}$ dans le plan $\mathrm{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$.

## 1. Solutions :

**Solution 1.1.1** On remarque que l'on peut se ramener au cas où $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(kx)}{x}=0$ en remplaçant $f(x)$ par $f(x)-\dfrac{L}{1-k}x$.

- $k<1$. Soit $\varepsilon>0$, on choisit $\eta>0$ tel que $|x|<\eta$ entraîne $\left\|\dfrac{f(x)-f(kx)}{x}\right\|\leqslant(1-k)\varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(kx)\| &\leqslant (1-k)|x|\varepsilon\\ \left\|f(kx)-f(k^2x)\right\| &\leqslant (1-k)k|x|\varepsilon\\ &\cdots\cdots\\ \left\|f(k^nx)-f(k^{n+1}x)\right\| &\leqslant (1-k)k^n|x|\varepsilon\end{aligned}$$

et, on additionnant toutes ces inégalités, on a

$$|f(x)-f(k^{n+1}x)|\leqslant(1-k)|x|\varepsilon\sum_{p=0}^{n+1}k^p=|x|\varepsilon(1-k^{n+2})\leqslant|x|\varepsilon$$

et, en passant à la limite sur $n$, $f$ étant continue, on arrive à

$$|f(x)-f(0)|\leqslant|x|\varepsilon$$

ce qui signifie que $f$ est bien dérivable en 0, de dérivée nulle.

- Si $k>1$, on remplace $k$ par $\dfrac{1}{k}$, on a $\lim_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x/k)}{x}=0$ et on est ramené au cas précédent.

---

**Solution 1.1.2** On a $f(a+h)=f(a)+hf'_d(a)+h\varepsilon(h)$ d'où, grâce à l'inégalité triangulaire,

$$\Big|\|f(a+h)\|-\|f(a)+hf'_d(a)\|\Big|\leqslant h|\varepsilon(h)|.$$

ce que l'on peut encore écrire $\|f(a+h)\|=\|f(a)+hf'_d(a)\|+o(h)$.
La fonction $g$ qui à $h$ associe $\|f(a)+hf'_d(a)\|$ est une fonction convexe (c'est là qu'intervient la convexité de la norme, conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire) et on sait qu'une fonction convexe est dérivable à droite en chacun de ses points de continuité i.e. l'intérieur de son ensemble de définition ainsi que la borne inférieure de cet ensemble lorsqu'elle continue en ce point (cf *question (i) page 73*). On a donc $g(h)=g(0)+hg'_d(0)+o(h)$ ce qui nous permet d'écrire :

$$\|f(a+h)\|=\|f(a)+hf'_d(a)\|+o(h)=\underbrace{\|f(a)\|}_{=g(0)}+hg'_d(0)+o(h)$$

ce qui signifie que $x\mapsto\|f(x)\|$ est dérivable à droite en $a$.

---

**Solution 1.2.1** On pose $u=t-x$ dans l'intégrale et donc $g(x)=e^{ix}\displaystyle\int_{a-x}^{b-x}f(u)e^{iu}\,du$, produit de 2 fonctions de classe $C^1$.

---

**Solution 1.2.2** En développant et en dérivant, on vérifie que $g'(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$ ($g$ est la primitive $n+1^{\text{ième}}$ de $f$ qui s'annule en 0 ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqslant n$ cf formule de Taylor *théorème 4.31 page 84*).

Éléments propres : $L(f) = \lambda f$ 2 cas :

- Si $\lambda = 0$ alors $g = 0$ et, en dérivant $n$ fois, $f = 0$ impossible,
- Si $\lambda \neq 0$ alors $f(x) = \dfrac{1}{\lambda} g(x)$ ce qui est équivalent à $f(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$ et $\lambda f^{(n+1)}(x) = f(x)$. Grâce à l'unicité des solutions des équations différentielles linéaires, on en déduit que $f = 0$.

Conclusion : $L$ n'a pas d'élément propre.

---

**Solution 1.2.3**

(1) $f \searrow$ évident (c'est la conséquence directe de la décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^t}{t+x}$).
On pose $u = t + x$ d'où

$$f(x) = e^{-x} \int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}\,\mathrm{d}u$$

donc $f$ est dérivable et $f'(x) = -f(x) + \dfrac{e}{x+1} - \dfrac{1}{x}$.

(2) On a l'encadrement suivant $\dfrac{e^t}{x+1} \leqslant \dfrac{e^t}{t+x} \leqslant \dfrac{e^t}{x}$ d'où

$$\int_0^1 \frac{e^t}{x+1}\,\mathrm{d}t = \frac{e-1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{e-1}{x} = \int_0^1 \frac{e^t}{x}\,\mathrm{d}t$$

donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e-1}{x}$.
Ensuite, comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x+t} = \ln(x+1) - \ln x$ on a :

$$f(x) + \ln x = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{x+t}\,\mathrm{d}t + \ln(x+1),$$

or

$$\int_0^1 \left( \frac{e^t-1}{x+t} - \frac{e^t-1}{t} \right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^t-1}{t} \frac{x}{x+t}\,\mathrm{d}t \leqslant M \int_0^1 \frac{x}{x+t}\,\mathrm{d}t = Mx \ln \frac{x+1}{x} \to 0$$

quand $x \to 0$ (où on a posé $M = \sup\limits_{t \in [0,1]} \dfrac{e^t-1}{t}$) donc $f(x) \underset{0^+}{\sim} -\ln x$ et on a même une information plus précise car on sait que

$$f(x) = -\ln x + \int_0^1 \frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t + o(1).$$

---

**Solution 2.1.1** Comme $0 \leqslant x - [x] \leqslant 1$ la fonction est intégrable ;

$$\int_1^n \frac{x - [x]}{x}\,\mathrm{d}x = \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{[x]}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ln n - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \to 1 - \gamma.$$

---

**Solution 2.1.2** $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ : $f_n(x) \sim \dfrac{n^{2n^2}}{x^{2n^2}}$ C ; en posant $x = n\tan t$ :

$$u_n = n\int_0^{\pi/2} \cos^{2n^2-2} t\,\mathrm{d}t$$

(Wallis à nouveau) on obtient $u_n = nI(2n^2-2)$ et $I(n) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$ (résultat classique obtenu dans le même exercice que précédemment) d'où $u_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

*Remarque* : le théorème de convergence dominée nous montre que $u_n \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

---

**Solution 2.1.3** Par un simple changement de variable, on se ramène à une intégrale eulérienne et $I_n = n!t^{n+1}$ (cf page 271).

Posons maintenant $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-2v}v^n\,\mathrm{d}v - n!e^{-x}$, $f'(x) = n!e^{-2x}[e^x - \dfrac{x^n}{n!}] > 0$ donc $f$ est strictement croissante et comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ on a $f(x) < 0$ pour $x \geqslant 0$.

En posant $u = 2tv$ dans l'intégrale, on obtient le résultat annoncé.

---

**Solution 2.1.4** Posons $g(x) = \displaystyle\sup_{t\geqslant x} f(t)$, $g$ est décroissante minorée et admet ainsi une limite en $+\infty$ que l'on note $l$. On écrit

$$a\int_0^x e^{-a(x-t)}f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant g(0)\int_0^{x/2} ae^{-a(x-t)}\,\mathrm{d}t + g(x/2)\int_{x/2}^x ae^{-a(x-t)}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{x/2} ae^{-a(x-t)}\,\mathrm{d}t = e^{ax}[e^{-ax/2} - 1] \leqslant e^{-a(x/2)}$, $\displaystyle\int_{x/2}^x ae^{-a(x-t)}\,\mathrm{d}t = 1 - e^{-a(x/2)} \leqslant 1$ et que $a\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{a(x-t)}f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant g(x/2)$ on obtient :

$$f(x) \leqslant \frac{1}{3}g(0)e^{-a(x/2)} + \frac{2}{3}g(x/2) + \frac{1}{3}e^{-ax/2} = h(x).$$

Vu que le membre de droite dans l'inégalité précédente est une fonction décroissante, on a la même inégalité en remplaçant $f(x)$ par $g(x)$ (en effet, pour $t \geqslant x$, $f(t) \leqslant h(t) \leqslant h(x)$ et donc $g(x) \leqslant h(x)$)

On prend alors la limite quand $x \to +\infty$ : $0 \leqslant l \leqslant \dfrac{2}{3}l$ donc $l = 0$ c.q.f.d.

---

**Solution 2.1.5**

(1) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_\varepsilon^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_\varepsilon^x f^2(t)\,\mathrm{d}t.(x-\varepsilon) \leqslant \int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t.x$$

donc $f$ est intégrable sur $]0,x[$ et $\dfrac{g(x)^2}{x} \leqslant \displaystyle\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t$.

On peut aussi dire que $f \leqslant \max(1, f^2)$ et donc que $f$ est intégrable.

(2) On a $z^2 = \displaystyle\int_a^b \frac{g(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{g(a)^2}{a} - \frac{g(b)^2}{b} + 2\int_a^b \frac{g(x)f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ en intégrant par parties. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire :

$$0 \leqslant \int_a^b \frac{g(x)f(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b \frac{g(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} = \alpha z.$$

L'inégalité demandée s'en déduit immédiatement.

Soit $\alpha_a = \sqrt{\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x}$. L'inégalité $z^2 - 2\alpha z - \beta \leqslant 0$ peut aussi s'écrire $z^2 \leqslant 2\alpha z + \beta \leqslant \alpha_a z + \beta$ i.e. $z^2 - 2\alpha_a z - \beta \leqslant 0$ et ceci pour tout $b$. $z$ se trouve donc coincé entre les deux racines de l'équation $x^2 - 2\alpha_a x - \beta = 0$. L'intégrale $I$ est donc bien définie car $\displaystyle\int_a^X \left(\frac{g(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$ est bornée et on a

$$\int_a^{+\infty} \frac{g(x)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant (\alpha_a + \sqrt{\alpha_a + \beta})^2. \tag{1}$$

En revenant à la première inégalité, on peut dire que $\dfrac{g(x)^2}{x} \leqslant \displaystyle\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)^2}{x} = 0$.

Enfin, en prenant la limite quand $a \to 0$ dans l'inégalité (1), on a $I \leqslant 4\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)^2\,\mathrm{d}x$.

*Remarque* : 4 est la meilleure constante, prendre la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}1_{[0,n]}(x)$.

---

**Solution 2.1.6** $\dfrac{e^{-t}}{t^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc cette fonction est intégrable sur $[1, +\infty[$ et les termes de la série $\sum u_n$ sont bien définis ; comme

$$\int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-n}}{n^\alpha} - \alpha\int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t$$

(par intégration par parties) et que

$$\int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^{\alpha+1}}\,\mathrm{d}t < \frac{1}{n}\int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

(en majorant $\dfrac{1}{t}$ par $\dfrac{1}{n}$ pour $t \geqslant n$) alors $u_n \sim \dfrac{e^{-\beta n}}{n^{\beta(\alpha-1)}}$ d'où la discussion :

- $\beta > 0$ : convergence,
- $\beta < 0$ : divergence,
- $\beta = 0$ : divergence.

---

**Solution 2.1.7** On utilise le *théorème 5.38 et la remarque 5.3.7 (ii) pages 243* alors :

$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant S(x) = r_0(x) = 1 + r_1(x) \leqslant 1 + F(x)$$

avec $F(x) = \dfrac{1}{x-1}$ d'où $1 \leqslant (x-1)S(x) \leqslant x$ ce qui donne le résultat en passant à la limite quand $x \to 1$.

---

**Solution 2.1.8** Grâce à la décroissance de $F$, on a

$$hF((n+1)h) \leqslant \int_{nh}^{(n+1)h} F(t)\,\mathrm{d}t \leqslant hF(nh)$$

d'où, en additionnant

$$\sum_{n=1}^{N+1} hF(nh) \leqslant \int_0^{(N+1)h} F(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=0}^{N} hF(nh)$$

ce qui permet au passage de dire que la série $\sum hF(nh)$ converge.
En passant à la limite, on en déduit

$$g(h) \leqslant \int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t \leqslant g(h) + hF(0)$$

soit encore $0 \leqslant g(h) - \displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t \leqslant hF(0)$, ce qui permet de conclure

$$\lim_{h\to 0^+} \sum_{n=1}^{+\infty} hF(nh) = \int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t.$$

---

**Solution 2.1.9**

(1) Si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} F(t) = l$ alors $\displaystyle\int_0^n F(t)\,\mathrm{d}t \sim nl$ (utiliser Césaro avec $u_k = \int_k^{k+1} F(t)\,\mathrm{d}t$) et $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} F(p) \sim nl$ (c'est le théorème de Césaro) et en conclusion $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.

(2) • Si $F(t)$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$, comme

$$\sum_{p=1}^{n} F(p) \leqslant \int_0^n F(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{p=0}^{n-1} F(p)$$

alors $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} F(p) \sim \int_0^n F(t)$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$.

• Si $F(t)$ est intégrable alors la série $\sum F(n)$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \left(\int_0^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t\right) \Big/ \left(\sum_{p=0}^{+\infty} F(p)\right).$$

---

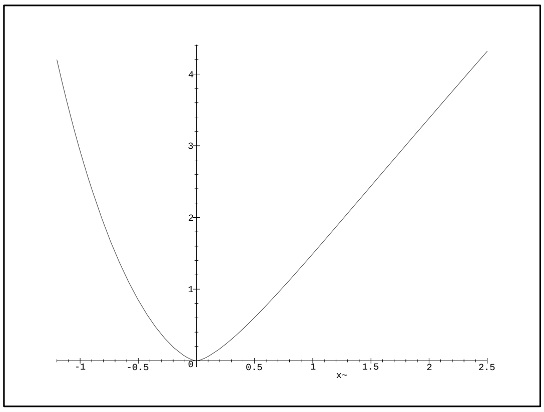
**Solution 2.1.10**

(1) Pas de problème de définition en 0 (la fonction intégrée est équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{|t|}}$ qui est intégrable en 0 grâce à la *règle pratique* $(i)$ *page 262*).
$f'(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{|t|}}\,\mathrm{d}t + \frac{xe^{-x}}{\sqrt{|x|}}$ pour $x \neq 0$. $\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ donc $f$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}$ grâce au théorème du prolongement dérivable (cf, par exemple, le *théorème 4.10 page 72*) Enfin $f'(x)$ est du signe de $x$.

(2) $x \neq 0$ : $f''(x) = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{|x|}}(3/2 - x)$. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{|t|}}\,\mathrm{d}t = -\infty$ : B.P.
Quand $x \to +\infty$ : $f(x) - x\sqrt{\pi} = -2x\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \to 0$ d'où l'asymptote d'équation

$y = x\sqrt{\pi}$.

On obtient la courbe suivante




---

**Solution 2.1.11** $\forall n \in \mathbb{N}$ : $f$ est localement intégrable sur $]n, n+1[$. On pose $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ alors on a :

$$0 > u_n > e^{-n}\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge}$$

donc $f$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

---

**Solution 2.1.12** On vérifie aisément que $I_n$ est définie. On a aussi

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^{+\infty} t^3 e^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{3!}{n^4}.$$

Montrons maintenant que $I_n \sim \dfrac{6}{n^4}$ :

$$\begin{aligned}\left|I_n - \frac{6}{n^4}\right| &= \left|\int_0^{+\infty} t^3 e^{-nt}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\right)\mathrm{d}t\right| \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-nt}(\sqrt{1+t^4}-1)}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^7 e^{-nt}}{(1+\sqrt{1+t^4})\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

d'où $\left|I_n - \dfrac{6}{n^4}\right| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} t^7 e^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{7!}{n^8} = o\left(\frac{1}{n^6}\right)$ donc $I_n \sim \dfrac{6}{n^4}$.

---

**Solution 2.1.13** On prouve facilement que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{t^2+1}}$ est intégrable ssi $\varepsilon > 0$ $\left(t^2 \dfrac{e^{-\varepsilon t}}{\sqrt{t^2+1}} \to 0 \text{ quand } t \to +\infty\right)$.
On a

$$\left|I(\varepsilon) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon t}}{t}\,\mathrm{d}t\right| = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\varepsilon t}}{t\sqrt{1+t^2}(t+\sqrt{1+t^2})}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}(t+\sqrt{1+t^2})} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t^3}$$

or cette dernière intégrale étant finie, on peut dire que $I(\varepsilon)$ est équivalent à $J(\varepsilon)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\varepsilon t}}{t}\,\mathrm{d}t$. En posant $u=\dfrac{1}{\varepsilon t}$ dans cette dernière intégrale, on trouve :

$$J(\varepsilon)=\int_0^{1/\varepsilon}\frac{e^{-1/u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

On utilise alors l'intégration des relation de comparaison et comme $\dfrac{e^{-1/u}}{u}\sim\dfrac{1}{u}$ en 0, on aura

$$I(\varepsilon)\sim J(\varepsilon)\sim -\ln(\varepsilon).$$

---

**Solution 2.2.1** On sait qu'il existe $a>0$ tel que $f$ s'annule pour $x\geqslant a$. On a alors

$$\int_0^{+\infty}f^2(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^a f^2(t)\,\mathrm{d}t=\underbrace{[tf^2(t)]_0^a}_{=0}-2\int_0^a tf(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

on utilise ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec la dernière intégrale appliquée aux fonctions $\sqrt{t}f(t)$ et $\sqrt{t}f'(t)$.

On remarque en fait qu'il suffit d'avoir $tf^2(t)$, $tf'^2(t)$ intégrables sur $[0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}tf^2(t)=0$ pour pouvoir conclure.

---

**Solution 2.2.2**

(1) On remarque que $1-2\lambda\cos t+\lambda^2=(\lambda-e^{it})(\lambda-e^{-it})$, les problèmes d'intégrabilité se posent uniquement en 0 et en $\pi$. Comme $\cos nt$ ne s'annule ni en 0, ni en $\pi$, $I_n(\lambda)$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$.

(2) On remarque immédiatement que $I_n\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)=\lambda^2 I_n(\lambda)$, on peut donc se limiter au cas où $|\lambda|<1$ pour étudier $I_n(\lambda)$.

(3) On utilise ensuite un logiciel de calcul formel pour obtenir les expressions $I_0(\lambda)=\dfrac{\pi}{1-\lambda^2}$ et $I_1(\lambda)=\dfrac{\pi\lambda}{1-\lambda^2}$ pour $|\lambda|<1$.

(4) On se sert de la relation $\cos(n+1)t+\cos(n-1)t=2\cos t\cos nt$ d'où, pour $\lambda\neq 0$

$$I_{n+1}(\lambda)+I_{n-1}(\lambda)=\frac{1}{\lambda}\int_0^\pi\frac{2\lambda\cos t\cos nt}{1+\lambda^2-2\lambda\cos t}\,\mathrm{d}t$$

et, en écrivant que $2\lambda\cos t=-(1+\lambda^2-2\lambda\cos t)+(1+\lambda^2)$, on arrive à

$$I_{n+1}(\lambda)+I_{n-1}(\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\int_0^\pi\cos nt\,\mathrm{d}t+\frac{1+\lambda^2}{\lambda}I_n(\lambda)$$

et donc on obtient la relation valable pour $|\lambda|\neq 1$

$$\lambda I_{n+1}(\lambda)-(1+\lambda^2)I_n(\lambda)+\lambda I_{n-1}(\lambda)=0.$$

(5) En résolvant la récurrence, on arrive immédiatement à

$$I_n(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\pi\lambda^n}{1-\lambda^2} & \text{si } |\lambda|<1\\[2mm] \dfrac{\pi}{\lambda^n(\lambda^2-1)} & \text{si } |\lambda|>1\end{cases}$$

*Remarque* : si on écrit que $\dfrac{1}{(\lambda-z)(\lambda-\bar{z})} = \dfrac{1}{1-\lambda^2}\left(\dfrac{1}{1-\lambda z}+\dfrac{\lambda\bar{z}}{1-\lambda\bar{z}}\right)$ et si on développe ceci en série de Fourier (cf chapitre 7 du programme de deuxième année) alors :

$$\frac{1}{(\lambda-z)(\lambda-\bar{z})} = \frac{1}{1-\lambda^2}\left(1+\sum_{n=1}^{+\infty}2\lambda^n\cos nt\right)$$

(cf noyau de Poisson exemple (*ii*) page 293). On obtient alors directement l'expression de $I_n(\lambda)$.

---

**Solution 2.2.3**

(1) En 0 : $|f(x)| \leqslant \dfrac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ intégrable.
En $+\infty$ : $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{3/2}\ln x}$ intégrable.

(2) $f(x) = -\dfrac{1}{x+1+\sqrt{x^2+2x+2}} \sim -\dfrac{1}{2x}$ non intégrable.

(3) En 0 : $f$ intégrable $\Leftrightarrow \alpha < 2$.
En $+\infty$ : $\alpha \leqslant 1 \Leftrightarrow f$ non intégrable (cf étude de l'intégrabilité de $\dfrac{\sin t}{t}$ question (*i*) page 132) et donc on a intégrabilité ssi $1 < \alpha < 2$.

(4) On pose $t = x^2$ et on est ramené au 3 avec $\alpha = \dfrac{1}{2}$ donc la fonction n'est pas intégrable.

---

**Solution 2.2.4**

(1) En 0 : $\ln(\sin t) \sim \ln t$ intégrable. $I = J$ (chgt de var $u = \pi/2 - t$) et

$$I + J = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin u)\,\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln 2$$

d'où $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$ en posant $v = u/2$.

(2) En $+\infty$ : $f(t) \sim \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2\dfrac{1}{t^2}$ intégrable.
En posant $u = \operatorname{Arctan} t$ :

$$I = \int_0^{\pi/2}\frac{u^2}{\sin^2 u}\,\mathrm{d}u = -2\int_0^{\pi/2}\ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \pi\ln 2$$

(après 2 intégrations par parties).

(3) En 0 : $f(t) \sim \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ intégrable.
En $+\infty$ : $f(t) \sim \dfrac{1}{t^2}$ intégrable ; et avec $u = \dfrac{1}{t}$ :

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^{3/2}} = 2.$$

(4) Si $|a| > 1$ pas de problème ; $|a| \leqslant 1$ : intégrable ;
calcul : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{a-\cos t} + \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{a+\cos t} = \frac{a}{|a|}\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

(5) En $\pm\infty$ : $f(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$ intégrable ; avec la relation $\dfrac{x^2}{1+x^4} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(g(x)+g(-x))$ donc

$$\int_{-X}^{+X} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-X}^{+X} g(x)\,\mathrm{d}x \to \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(on peut s'en tirer rapidement aussi en posant $x = e^u$).

(6) En $a$ : $f(x) \sim \dfrac{a}{\sqrt{a-x}\sqrt{2a(1+a^2)}}$ intégrable ; on pose $x = a\cos u$ :

$$I(a) = a\int_0^{\pi/2} \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{1+a^2\cos^2 u} = \frac{\mathrm{Argsh}a}{\sqrt{1+a^2}}$$

(en posant $t = \sin u$).

(7) En $\pm\infty$ : $f(x) \sim \dfrac{1}{|x|^3}$ intégrable ; on pose $x = \tan\theta$ et $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$ :

$$I = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{4-3\sin^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}/2}^{+\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(8) En $+\infty$ : intégrable, en 1 intégrable $\Leftrightarrow$ $\alpha \neq 2k\pi$ : on pose $x = \dfrac{1}{\cos t}$, $u = \tan\dfrac{t}{2}$ : $I(\alpha) = \dfrac{\pi-\alpha}{\sin\alpha}$ sur $]0,\pi[$ et $I(\pi) = 1$.

---

**Solution 2.2.5**

(1) Par l'absurde : si $f \not\to 0$ alors $\forall\varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n > n,\ |f(x_n)| \geqslant \varepsilon$ et comme $f$ est uniformément continue,

$$\exists\alpha > 0\ :\ \forall x \in [x_n-\alpha, x_n+\alpha]\ :\ |f(x)-f(x_n)| \leqslant \varepsilon/2 \Rightarrow |f(x)| \geqslant \varepsilon/2$$

$f(x)$ du signe de $f(x_n)$ donc $\left|\displaystyle\int_{x_n-\alpha}^{x_n+\alpha} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \geqslant \alpha\varepsilon/2$ ne tend pas vers 0 : contradiction.

*Remarque* : ce résultat est important car il existe des fonctions continues intégrables au voisinage de $+\infty$ qui n'admettent pas de limite en $+\infty$. On peut aussi faire une démonstration directe (sans utiliser l'absurde) en faisant un encadrement. En effet, comme $f$ est uniformément continue alors

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0 \mid |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow f(y)-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(y)+\varepsilon,$$

donc, en intégrant pour $y \in [x, x+\alpha]$, on obtient

$$\int_x^{x+\alpha} f(y)\,\mathrm{d}y - \alpha\varepsilon \leqslant \alpha f(x) \leqslant \int_x^{x+\alpha} f(y)\,\mathrm{d}y + \alpha\varepsilon.$$

On choisit $A$ pour que $x \geqslant A$ entraîne $\left|\displaystyle\int_x^{x+\alpha} f(y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \alpha\varepsilon$ d'où $|f(x)| \leqslant 2\varepsilon$ i.e. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(2) $\exists x_0 : \forall x \geqslant x_0 : |f(x)| \leqslant 1 \Rightarrow f^2(x) \leqslant f(x)$ donc $f^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$.

---

**Solution 2.2.6**

(1) En $a$, $f \sim \dfrac{a^n}{\sqrt{b-a}}\dfrac{1}{\sqrt{a-x}}$ intégrable. De même en $b$ donc $f$ est intégrable sur $]a,b[$.

(2) On pose $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}t$ alors $I_n(a,b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{2^n}(a+b)^{n-k}(b-a)^k I_k(-1,1)$ ;

- $I_{2p+1}(-1,1) = 0$,

- $I_{2p}(-1,1) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p}\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\pi$ (intégrale de Wallis).

---

**Solution 2.2.7** On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_1^X \frac{|f(t)|}{t}\,\mathrm{d}t\right|^2 \leqslant \int_1^X |f(t)|^2\,\mathrm{d}t.\int_1^X \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

d'où : $\left(\displaystyle\int_1^X \frac{|f(t)|}{t}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \times 1$ donc, $\dfrac{f(t)}{t}$ est bien intégrable sur $[1,+\infty[$.

---

**Solution 2.2.8**

(1) $F(t+2T) - F(t) = \displaystyle\int_t^{t+2T} f(u)\,\mathrm{d}u - 2aT = \int_0^{2T} f(t)\,\mathrm{d}t - 2aT = 0$ ($F$ est continue).

(2) En intégrant par parties : $\displaystyle\int_1^x \frac{f(t)-a}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{F(x)}{x} - F(1) + \int_1^x \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ : $F$ est continue et périodique, elle est bornée $\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)-a}{t}\,\mathrm{d}t$ C et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(t)-a}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{F(x)}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{x}\right)$.

(3) $F$ est impaire $\Rightarrow F(-T) = F(T) = -F(T) = 0 \Rightarrow F(nT) = 0 \Rightarrow G$ est $2T$-périodique. Or $\displaystyle\int_{nT}^{+\infty} \frac{f(t)-a}{t}\,\mathrm{d}t = -\frac{F(nT)}{nT} + \int_{nT}^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{G(nT)}{n^2T^2} + 2\int_{nT}^{+\infty} \frac{G(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ car $G$ est bornée.

---

**Solution 2.2.9**

(1) On utilise directement l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$g(x)^2 = \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

(2) C'est un peu plus délicat :

soit $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $A > 0$ tel que, pour $x \geqslant A$ on ait :

$$\int_A^x f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^2$$

(intégrabilité de $f^2$). On écrit alors

$$|g(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^A |f(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\sqrt{x}}\left|\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la deuxième intégrale et, en notant $\alpha = \displaystyle\int_0^A |f(t)|\,\mathrm{d}t$ on obtient :

$$|g(x)| \leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{x-A}{x}}\left(\int_A^x f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \frac{\alpha}{\sqrt{x}} + \varepsilon.$$

On choisit alors $B \geqslant A$ tel que $x \geqslant B \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\sqrt{x}} \leqslant \varepsilon$ et le tour est joué.

---

**Solution 2.2.10** $F_n$ est bien définie pour $x > 0$.
On a

$$F_n(x) + F_{n+2}(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{x^{n+1}}. \tag{1}$$

- Pour $n = 0$, le théorème de continuité sous le signe intégral s'applique en majorant la fonction intégrée par $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ (cf. *théorème 6.24 page 267*. $F_0$ est continue et $F_0(0) = \dfrac{\pi}{2}$.
  Pour $n = 1$ on fait le changement de variable $u = xt$, d'où $F_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$. Si l'on pose $G(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2}$, alors
  $$|F(x) - G(x)| \leqslant \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$
  et donc $F_1(x) \sim -\ln x$.
  En 0, on a $F_2(x) \sim \dfrac{1}{x}$, $F_3(x) \sim \dfrac{1}{x^2}$ et par une récurrence simple, $F_n \sim \dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}$ pour $n \geqslant 2$.
- En $+\infty$, $0 \leqslant F_{n+2}(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n+2}e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{(n+2)!}{x^{n+3}}$.
  La relation (1) nous donne alors $F_n(x) \sim \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

---

**Solution 2.2.11**

(1) En $k\pi$ : $f(x) \sim \dfrac{A_k}{\sqrt{|k\pi - x|}}$ intégrable, c'est le critère de Riemann, cf. *règle (i) page 262* (où $A_k = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{k\pi}}}$).
En $+\infty$ : si on pose $I_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$ alors $I_k \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{k\pi}}}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin t}}$ la série $\sum_{k=0}^{+\infty} I_k$ converge car $I_k \sim Ae^{-k\pi/2}$ (série géométrique).
Si on pose $J_n = [0, n\pi]$, il existe donc $M > 0$ tel que $\displaystyle\int_{J_n} f \leqslant M$ et par conséquent, $f$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. En fait $f$ est intégrable sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}} ]k\pi, (k+1)\pi[$.

(2) On pose $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x^2|\sin x|}\,\mathrm{d}x$ alors :

$$u_n \leqslant \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-n^2\pi^2|\sin x|}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-n^2\pi^2|\sin x|}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\int_0^{\pi/2} e^{-n^2\pi^2\sin x}\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-2n^2\pi x}\,\mathrm{d}x$$

car $\sin x \geqslant \dfrac{2x}{\pi}$ sur $[0, \pi/2]$ (concavité du sinus)

$$\leqslant \frac{1}{n^2\pi}\left(1 - e^{-2n^2\pi}\right) \leqslant \frac{1}{n^2\pi}$$

qui est le terme général d'une série convergente.
Conclusion : $x \mapsto e^{-x^2|\sin x|}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

(3) Pas de problème d'intégrabilité en 0 et en 1 car la fonction intégrée se prolonge par continuité (respectivement par 0 et $-\pi$).
En $+\infty$ :
$$\int_2^n |f(x)|\,\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{|\sin\pi x|}{\ln x}\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=2}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{|\sin\pi x|}{\ln(k+1)}\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=2}^{n-1}\frac{2}{\pi\ln(k+1)}.$$
Cette dernière somme est la somme partielle d'une série divergente et donc la fonction n'est pas intégrable.

---

**Solution 2.2.12** On remarque tout d'abord que l'on doit avoir $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ sinon la quantité $t + t^\alpha \cos t$ peut devenir négative.

- Étude du cas $\alpha = 1$ : $f(t) = \dfrac{\sin t}{\sqrt{t(1+\cos t)}} = \varepsilon\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}}\sin(t/2)$ admet une limite à droite et à gauche en chaque point où $1 + \cos t$ s'annule (i.e. aux points $(2k+1)\pi$).
Comme $f$ garde un signe constant sur les intervalles $]k\pi, (k+1)\pi[$, étudions la série de terme général $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$ et prouvons que l'on peut lui appliquer le théorème des séries alternées :
$$|u_k| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sqrt{2}|\sin(t/2)|}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{k}}$$
et donc $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$.
On a ensuite $|u_k| = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sqrt{2}\sin(t/2)}{\sqrt{t+k\pi}}\,\mathrm{d}t$. La suite $(|u_k|)$ est décroissante vers 0, la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est bien convergente et enfin on a bien l'existence d'une limite. En effet si $n\pi \leqslant x \leqslant (n+1)\pi$ alors
$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k + \int_{n\pi}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right| + \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|f(t)|\,\mathrm{d}t \to 0.$$
- Étude du cas où $0 \leqslant \alpha < 1$ : $f(t) = \dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}\left(1 + \dfrac{\cos t}{t^{1-\alpha}}\right)^{-1/2}$, on développe la puissance -1/2 jusqu'au terme d'ordre $n$ tel que $n(1-\alpha) > 1/2$ (c'est ceci qui va assurer la convergence absolue du reste). On obtient donc
$$f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\left(\sum_{k=0}^n A_k\frac{\cos^k t}{t^{k(1-\alpha)}}\right) + o\left(\frac{1}{t^{n(1-\alpha)+1/2}}\right),$$
une I.P.P. permet de prouver que chaque intégrale $I_k(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^x \frac{\cos^k t\sin t}{\sqrt{t}(t^{k(1-\alpha)})}\,\mathrm{d}t$ a une limite en $+\infty$ (on intégre $\cos^k t\sin t$).
Le reste est intégrable grâce à la *règle (i) page 262* (critère de Riemann).

Conclusion : la limite existe pour tout $\alpha \in [0,1]$.

---

**Solution 2.3.1** Avec $x = t^n$ on a : $u_n = \displaystyle\int_1^{e_n}\frac{f(x)}{x}x^{1/n}\,\mathrm{d}x$ où $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \nearrow e$. En posant $g_n(x) = 1_{[1,e_n]}$, on peut encore écrire $u_n = \displaystyle\int_1^e f_n(x)\,\mathrm{d}x$ où $f_n(x) = \dfrac{f(x)}{x}x^{1/n}g_n(x)$. On utilise alors le théorème de convergence dominée, sur $[1,e]$, $f_n(x) \leqslant \dfrac{f(x)}{x}e$ et $f_n \xrightarrow{C.S.} [[1,e]]\dfrac{f(x)}{x}$.

Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_1^{e_n} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

---

**Solution 2.3.2**

(1) On pose $f_n(x) = \operatorname{Arctan}(nx)e^{-x^n}$. Cette suite converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction $f$ définie par $f(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \pi/(2e) & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Chaque fonction $f_n$ est majorée par la fonction $\varphi(x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \pi e^{-x}/2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

Conclusion : le théorème de convergence dominée s'applique, la limite vaut $\dfrac{\pi}{2}$.

(2) Soit $g_n(x) = \left(1 + \dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}\right)(1 - \operatorname{th}(x^n))$. $g_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $g$ telle que $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 - \operatorname{th} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Les fonctions $g_n$ sont majorées par la fonction $\psi(x) = \begin{cases} 1 + 1/\sqrt{x} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 2(1 - \operatorname{th} x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$ et comme cette fonction est intégrable (en 0 $\psi(x) \sim 1/\sqrt{x}$, en $+\infty$ $\psi(x) \sim 4e^{-2x}$), on peut conclure que la limite vaut 1.

---

**Solution 2.3.3** Soit $f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n+a} & \text{si } 0 < x \leqslant n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$. Si $n \geqslant 2a$ alors $n + a \geqslant n/2$ donc $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n+a} \leqslant e^{-t/2}$ (en utilisant l'inégalité $1 - u \leqslant e^{-u}$).

- La suite $(f_n)$ est dominée par la fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t/2}$ (à partir d'un certain rang) et cette fonction est intégrable sur $]0,+\infty[$.
- En outre $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t) = t^{x-1}e^{-t}$,

donc le théorème de convergence dominée s'applique et on a

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+a}.$$

---

**Solution 2.3.4** En posant $u = nx$ on obtient $I_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n n\sin(\pi u/n)\,\mathrm{d}u$. Si on pose $f_n(u) = \left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n n\sin(\pi u/n)$ alors

- $|f_n(u)| \leqslant e^{-u}\pi u$ en utilisant les majorations $\left(1 - \dfrac{u}{n}\right)^n \leqslant e^{-u}$ et $|\sin(\pi u/n)| \leqslant \pi u/n$,
- $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(u) = \pi e^{-u}u$.

Comme $u \mapsto \pi e^{-u}u$ est intégrable, on a les hypothèses du théorème de convergence dominée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \pi\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u}u\,\mathrm{d}u = \pi$.

---

**Solution 2.3.5**

(1) Soit $M$ un majorant de $|\varphi|$ alors $t \mapsto \dfrac{n^3 t\varphi(t)}{(1+n^2t^2)^2}$ est majoré par $\dfrac{n^3|t|M}{(1+n^2t^2)^2}$ qui est intégrable, donc $I_n$ est bien définie.

(2) Si on pose $u = nt$ alors $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nu\varphi(u/n)}{(1+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$ et comme $t \mapsto \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale nulle, on obtient $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(u)\,\mathrm{d}u$ où $g_n(u) = \dfrac{nu(\varphi(u/n)-\varphi(0))}{(1+u^2)^2}$.

- $(g_n)$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers la fonction $g(u) = \dfrac{u\varphi'(0)}{(1+u^2)^2}$.
- $|\varphi(u/n) - \varphi(0)| \leqslant \psi_n(u)$ où $\psi_n(u) = \begin{cases} \frac{|u|}{n} \sup\limits_{t\in[0,1]} |\varphi'(t)| \leqslant \sup\limits_{t\in[0,1]} |\varphi'(t)| & \text{si } |t| \leqslant n \\ 2M & \text{si } |t| > n \end{cases}$. En posant $\psi(u) = 2M + \sup\limits_{t\in[0,1]} |\varphi'(t)|$ alors $|g_n(u)| \leqslant \dfrac{u^2}{(1+u^2)^2}\psi(u)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On peut alors utiliser le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \varphi'(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\varphi'(0).$$

---

**Solution 2.4.1**

(1) $I(a,b) = \dfrac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ (fourni par un programme de calcul formel ou en posant $u = \tan t/2$).

(2) $I(a,b)$ est $C^\infty$ grâce au 1. (inverse d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui ne s'annule pas), et on peut dériver sous le signe intégral sur son domaine de définition (*théorème 6.26 page 268* que l'on étend au cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ par récurrence car $(a,b,t) \mapsto \dfrac{1}{a+b\cos t}$ est $\mathcal{C}^\infty$ pour $(a,b,t) \in \{|b|<a\}\times[0,\pi]$).

(3) On procède par récurrence :

- vrai pour $n = 0,1,2$ : $P_0(a,b) = 1$, $P_1(a,b) = a$, $P_2(a,b) = 2a^2+b^2$ ; $Q_0(a,b) = 1$, $Q_1(a,b) = -b$, $Q_2(a,b) = a^2+2b^2$.
- On suppose les propriétés vraies à l'ordre $n$.

  On dérive alors la première relation par rapport à $a$, on obtient

$$\int_0^\pi \frac{-(n+1)\,\mathrm{d}t}{(a+b\cos t)^{n+2}} = \frac{\pi}{n!}\,\frac{-(2n+1)aP_n(a,b) + (a^2-b^2)\dfrac{\partial P_n}{\partial a}(a,b)}{(a^2-b^2)^{n+3/2}}$$

  ce qui donne la relation $P_{n+1}(a,b) = (2n+1)aP_n(a,b) - (a^2-b^2)\dfrac{\partial P_n}{\partial a}(a,b)$ et, en faisant de même avec l'autre relation, on obtient $Q_{n+1}(a,b) = -(2n+1)bQ_n(a,b) - (a^2-b^2)\dfrac{\partial Q_n}{\partial b}(a,b)$ ce qui permet d'achever la récurrence.

(4) On trouve par récurrence que $Q_n(a,b) = (-1)^n P_n(b,a)$.

En effet la propriété est vraie pour $n = 0,1,2$. Ensuite la chose essentielle est de comprendre que, si $Q_n(a,b) = (-1)^n P_n(b,a)$ alors $\dfrac{\partial P_n}{\partial a}(b,a) = (-1)^n \dfrac{\partial Q_n}{\partial b}(a,b)$. C'est un problème dû aux notations de Jacobi sur les dérivées partielles. La première dérivée désigne la dérivée par rapport à la première variable (en l'occurrence $b$) et la deuxième dérivée désigne la dérivée par rapport à la deuxième variable (qui est toujours $b$) donc cette relation est bien une conséquence directe de l'hypothèse de récurrence (que l'on dérive par rapport à la deuxième variable). Pour conclure, il suffit d'utiliser les formules caractérisant $P$ et $Q$ obtenues au 3.

---

**Solution 2.4.2**

(1) $1-2x\cos\theta+x^2=(x-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=g(x,\theta)$ donc $g$ est continue et strictement positive sur $(\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\})\times[0,\pi]$. On en déduit que $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1,+1\}$. On vérifie que $f$ est définie en $-1$ et en $+1$, ainsi $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $g(1,\theta)=2-2\cos\theta=4\sin^2\theta/2$ et $\ln g(1,\theta)\underset{0}{\sim}\ln\theta$ qui est une fonction intégrable sur $]0,\pi]$.

(2) Par de simples changements de variables, on déduit les égalités suivantes :

$$f(-x)=f(x),\ f(1/x)=f(x)-2\pi\ln|x|,\ 2f(x)=f(x)+f(-x)=f(x^2)$$

(pour la dernière relation, on utilise le fait que $(1+2x\cos\theta+x^2)(1-2x\cos\theta+x^2)=1-2x^2\cos2\theta+x^4$).

Supposons maintenant que $|x|<1$ : alors $f(x)=\dfrac{1}{2}f(x^2)$ et par récurrence $f(x)=\dfrac{1}{2^n}f\left(x^{2n}\right)$. En passant à la limite ($f$ est continue), on obtient $f(x)=0$.
Si $|x|>1$ alors $f(x)=f(1/x)+2\pi\ln|x|=2\pi\ln|x|$.
Enfin, si $|x|=1$, on se sert de la formule $2f(x)=f(x^2)$ et donc $2f(1)=f(1)$ donc (comme $f$ est paire) $f(1)=f(-1)=0$.

---

**Solution 2.4.3**

(1) On a $D_f=]-\infty,1[$ en effet on doit avoir $x<\dfrac{1}{\cos^2 t}$ pour tout $t$ pour que le numérateur soit $>0$. On ne peut définir $f$ en 1 car la fonction que l'on obtient sous l'intégrale n'est pas intégrable.

(2) Si $[a,b]\subset]-\infty,1[$, $F(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x\cos^2 t}}$ est $C^1$ sur $[a,b]\times[0,\pi/2]$ ($(x,t)\mapsto 1-x\cos^2 t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et la fonction $g\ :u>0\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ est elle aussi $\mathcal{C}^1$ donc $F$, qui est la composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, est elle aussi $\mathcal{C}^1$ cf *remarque 5.2.1 (ii) page 94* ou voir le *théorème 9.2 page 309*).
Grâce au *théorème 6.26 page 268*, $f$ est $C^1$ sur $[a,b]$ pour tout $[a,b]\subset]-\infty,1[$ donc $f$ est $C^1$ sur $]-\infty,1[$ (et même $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$).

(3) En faisant le changement de variable $u=\tan t$ on obtient :

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1+u^2)(1-x+u^2)}}=\int_0^{+\infty}g_x(u)\,\mathrm{d}u.$$

Comme $0\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u+x^2}}-\int_0^1 g_x(u)\,\mathrm{d}u\leqslant\int_0^1\frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{1-x+u^2}}\leqslant\frac{1}{2}$ et que l'on nous dit que $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-x+u^2}}\sim-\frac{1}{2}\ln(1-x)$ on en déduit que $\displaystyle\int_0^1 g_x(u)\,\mathrm{d}u\sim-\frac{1}{2}\ln(1-x)$ et donc $f(x)\sim-\dfrac{1}{2}\ln(1-x)$ car $\displaystyle\int_1^{+\infty}g_x(u)\,\mathrm{d}u\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=1$.

---

**Solution 2.4.4** $f(x,t) = \dfrac{1}{x+t^r}$ est $C^1$ sur $[\alpha,\beta]\times[0,a]$ où $0<\alpha<\beta$ (inverse d'une fonction $C^1$ qui ne s'annule pas) donc $F$ est $C^1$ sur $[\alpha,\beta]$ (cf *théorème 6.26 page 268*). Comme ceci est valable pour tout $[\alpha,\beta]\subset]0,+\infty[$ on peut conclure que $F$ est $C^1$ sur $]0,+\infty[$.

- $r=1$ : $F(x) = \ln\dfrac{a+x}{x} \sim -\ln x$ ;
- $r>1$ : en posant $t = ux^{1/r}$ on obtient $F(x) = x^{1/r-1}\displaystyle\int_0^{ax^{-1/r}}\frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^r}$ et comme $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\int_0^{ax^{-1/r}}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^r} = I(r)$ on en déduit : $F(x)\sim I(r)x^{1/r-1}\sim\dfrac{\pi}{r\sin\frac{\pi}{r}}x^{1/r-1}$.

---

**Solution 2.4.5** Si $x>0$, $t\in[0,\pi/2]$ alors $g(x,t) = \exp(-x^\alpha\sin t)$ est continue (en tant que composée d'applications continues) donc $f_\alpha$ est continue sur $[0,+\infty[$ (on utilise toujours le *théorème 6.24 page 267*).

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} f_\alpha(x) = f_\alpha(0) = \frac{\pi}{2}$ (grâce à la continuité de $f$).
- En $+\infty$, en utilisant l'inégalité $t\leqslant\sin t\geqslant\dfrac{2}{\pi}t$ on arrive à

$$-\frac{1}{x^\alpha}\left[\exp\left(-\frac{\pi x}{2}\right)^\alpha - 1\right] = \int_0^{\pi/2}\exp\left(-x^\alpha t\right)\mathrm{d}t\leqslant f_\alpha(x)\leqslant\int_0^{\pi/2}\exp(-x^\alpha\frac{2}{\pi}t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2x^\alpha}\left[1-e^{-x^\alpha}\right],$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = 0$.

Cherchons maintenant l'équivalent de $f_\alpha$ en $+\infty$.
On pose

$$g_\alpha(x) = \int_0^{\pi/2}\exp(-x^\alpha\sin t)\cos t\,\mathrm{d}t = x^{-\alpha}\left[\exp(-x^\alpha\sin t)\right]_0^{\pi/2} = x^{-\alpha}\left[1-e^{-x^\alpha}\right]$$

donc $g_\alpha \underset{+\infty}{\sim} x^{-\alpha}$ et

$$0\leqslant f_\alpha(x)-g_\alpha(x) = 2\int_0^{\pi/2}\sin^2(t/2)\exp(-x^\alpha\sin t)\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}t^2\exp\left[-\frac{2x^\alpha t}{\pi}\right]\mathrm{d}t$$

et après calculs on trouve (avec un logiciel de calcul formel)

$$-\frac{\pi^3\left(x^{2\alpha}+2x^\alpha+2\right)e^{-x^\alpha}}{16x^{3\alpha}}+\frac{\pi^3}{8x^{3\alpha}}$$

ce qui donne, après majoration

$$0\leqslant f_\alpha(x)-g_\alpha(x)\leqslant\frac{\pi^3}{8}x^{-3\alpha}$$

et donc $f_\alpha(x)\sim x^{-\alpha}$.

---

**Solution 2.4.6** Soit $f(t,x) = \ln(\cos^2 t + x^2\sin^2 t)$. Si $x\neq 0$, $f(t,x)$ est bien définie et continue. Si $x=0$, $f(t,x)$ n'est pas définie pour $t=\dfrac{\pi}{2}$ mais, à l'aide du changement de variables $t\to\dfrac{\pi}{2}-t$, on se ramène à l'intégrale $2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,\mathrm{d}t$ qui existe bien.
Prouvons maintenant que $I(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ :

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \dfrac{2x\sin^2 t}{\cos^2 t + x^2\sin^2 t}$ et comme cette fonction est continue, on en déduit la dérivabilité sur $]0,+\infty[$ de $I(x)$ grâce au théorème de dérivabilité sous le signe intégral (cf *théorème 6.26 page 268*).

$$I'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{2x\sin^2 t}{\cos^2 t + x^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

qui donne, après calculs, $I'(x) = \dfrac{\pi}{x+1}$. En remarquant que $I(1) = 0$, on en arrive à $I(x) = \pi\ln\left(\dfrac{1+x}{2}\right)$, formule encore valable pour $x = 0$ (par un calcul classique) d'où l'expression sur $\mathbb{R}$ :

$$I(x) = \pi\ln\left(\frac{1+|x|}{2}\right).$$

*Remarque* : on pouvait aussi vérifier que $I(x)$ satisfaisait à l'équation fonctionnelle :

$$I(x) = \frac{\pi}{2}\ln\frac{1+x^2}{2} + \frac{1}{2}I\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

---

**Solution 2.4.7** $\mathcal{D}_F = ]-\infty, 0]$ ($\dfrac{e^{tx}-1}{t\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{x}{\sqrt{t}}$ pour $x \neq 0$) et en posant $tx = -u$ on obtient

$$F(x) = A\sqrt{-x}$$

où $A = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}-1}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ donc $F$ est continue et dérivable sur son domaine de définition.

---

**Solution 2.4.8** $\mathcal{D}_F = [0,+\infty[$ car il faut prendre $x \geqslant 0$ pour que la racine carrée soit définie et dans ce cas, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2\sqrt{1+tx}e^{-t^2} = 0$ ;

- Continuité : la fonction $(t,x) \mapsto \sqrt{1+tx}e^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[^2$. Pour tout $b > 0$ $\sqrt{1+tx}e^{-t^2} \leqslant \sqrt{1+tb}e^{-t^2}$ qui est intégrable donc, grâce au *théorème 6.24 page 267* on peut conclure à la continuité de $F$ sur $[0,b]$ pour tout $b > 0$ et par conséquent $F$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Dérivabilité : on a $\dfrac{\partial\sqrt{1+tx}e^{-t^2}}{\partial x} = \dfrac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+tx}}$ continue sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$, or $\dfrac{te^{-t^2}}{\sqrt{1+tx}} \leqslant \dfrac{te^{-t^2}}{2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On peut alors utiliser le *théorème 6.26 page 268* donc $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

---

**Solution 2.4.9** $f(0) = g(0) = 0$ ; en posant $u = xt$ : $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ si $x > 0$, $-\dfrac{\pi}{2}$ si $x < 0$. Puis $g(x) = f(x) - h(x)$ où $h(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. Si $x \in [-a,a]$ avec $a > 0$ alors $\left|\dfrac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}\right| \leqslant \dfrac{a}{1+t^2}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme $(x,t) \in [-a,a]\times]0,+\infty[$ est continue, on peut appliquer le théorème de continuité sous le signe intégral donc $h$ est continue sur $[-a,a]$ pour tout $a$ donc $h$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en 0.

---

**Solution 2.4.10**

(1) Soit $a > 0$, en intégrant par parties, on a :

$$\int_0^a e^{i\lambda_n t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{i\lambda_n t}}{i\lambda_n}\varphi(t)\right]_0^a - \frac{1}{i\lambda_n}\int_0^a e^{i\lambda_n t}\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où, en prenant les valeurs absolues, on obtient

$$\left|\int_0^a e^{i\lambda_n t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda_n}\left[|\varphi(a)| + |\varphi(0)| + \int_0^a |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t\right] \to 0$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^a e^{i\lambda_n t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

On a aussi

$$\left|\int_a^{+\infty} e^{i\lambda_n t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^{+\infty} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$$

quand $a \to +\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit successivement $a$ pour avoir l'inégalité $\displaystyle\int_a^{+\infty} |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et $n$ pour que $\displaystyle\left|\int_a^{+\infty} e^{i\lambda_n t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et en conclusion $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{i\lambda_n t}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

(2) Grâce à la formule $\sin^2(nt) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2nt)$, alors, en utilisant l'égalité suivante $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos 2nt\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{2int}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} e^{-2int}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right)$ on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\varphi(t)\sin^2(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

---

**Solution 2.4.11**

(1) $F(0) = 0$ et on remarque que $F$ est impaire, étudions maintenant ce qui se passe pour $t > 0$.

Intégrabilité

- en $+\infty$ : $\dfrac{\operatorname{Arctan} xt}{x(1+x^2)} \sim \dfrac{\pi/2}{x^3}$ qui est intégrable grâce au critère de Riemann (*règle* ($i$) *page 262*),
- en 0 : $\dfrac{\operatorname{Arctan} xt}{x(1+x^2)} \sim t$ prolongeable par continuité.

Conclusion : $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}$.

Si on pose $f(x,t) = \dfrac{\operatorname{Arctan} xt}{x(1+x^2)}$ alors $f$ est continue sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}_+$.

Comme $|\operatorname{Arctan} xt| \leqslant x|t|$ alors, pour $t \in [0,a]$ où $a > 0$,

$$\frac{\operatorname{Arctan} xt}{x(1+x^2)} \leqslant \frac{t}{1+x^2} \leqslant \frac{a}{1+x^2},$$

et donc on peut appliquer le théorème de continuité sous le signe intégral (*théorème 6.24 page 267*). $F$ est continue sur tout intervalle $[0,a]$ donc sur $\mathbb{R}_+$, finalement sur $\mathbb{R}$.

Pour les mêmes raisons $\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^2t^2)} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}$, $F$ est dérivable (on n'a pas besoin ici de majorer localement la fonction à intégrer) et

$$F'(t) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^2t^2)} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+t}\ (t > 0).$$

Le calcul se fait pour $t \neq 1$ puis, comme $F'$ est continue, l'expression obtenue est encore valable pour $t = 1$. Par intégration, comme $F(0) = 0$, on obtient $F(t) = \dfrac{\pi}{2} \ln(1+t)$.

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = 2F(1) = \pi \ln 2$ (après intégration par parties).

---

**Solution 2.4.12**

(1) En $+\infty$ par de problème de convergence, $f$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme

$$f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t$$

$f$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ($f'(x) = f(x) - \dfrac{1}{x}$).

(2) On pose $u = t - x$ d'où :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{x+u} \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(1 - \frac{u}{x} + \cdots + (-1)^n \frac{u^n}{x^n} + (-1)^{n+1} \frac{(u/x)^{n+1}}{1+u/x}\right) \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u} u^k \, \mathrm{d}u = k!$ et que $\dfrac{1}{1+u/x} \leqslant 1$ on a bien :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{x^k} + R_{n+2}$$

où $R_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{x^{n+2}}(n+1)! = O\left(\dfrac{1}{x^{n+2}}\right)$.

---

**Solution 2.4.13** La fonction $g(t,x) = \dfrac{\cos tx}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t$ est continue sur $[0,1[\times\mathbb{R}$ et comme $|g(t,x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $f$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$ grâce au théorème de continuité sous le signe intégral (*théorème 6.24 page 267*).

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(t,x) = -\dfrac{t \sin tx}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $[0,1[\times\mathbb{R}$ et

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(t,x)\right| = \left|\frac{t \sin tx}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

donc le théorème de dérivabilité sous le signe intégral (*théorème 6.26 page 268*) s'applique donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = -\int_0^1 \frac{t \sin tx}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t.$$

*Remarque* : on aurait pu prouver directement la dérivabilité de $f$ à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange appliquée à $\cos tx$.

---

**Solution 2.4.14**

(1) En 1 : $f(t) = \dfrac{\ln(1-t^2)\ln t^2}{t^2} \sim (t^2-1)\ln(1-t^2) \to 0$ donc $f$ se prolonge par continuité.
En 0 : $f(t) \sim 2 \ln t$ intégrable, $I$ est bien définie.

(2) $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$ où $u_n(t) = -\dfrac{t^{2(n-1)}}{n}\ln t^2$ ; pour $n \geqslant 2$ : $0 \leqslant u_n(t) \leqslant \dfrac{1}{en(n-1)}$, il y a donc convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n(t)$ ; on peut alors intervertir $\sum$ et $\displaystyle\int$ (cf *théorème 5.55 page 253*), d'où

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(2n-1)^2}.$$

(3) On a $\dfrac{2}{n(2n-1)^2} = \dfrac{4}{2n} - \dfrac{4}{2n-1} + \dfrac{4}{(2n-1)^2}$ donc

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{2} - 4\ln 2.$$

(On a regroupé les termes de la série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ deux par deux.)

---

**Solution 2.4.15** En $x$ $\dfrac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}} \underset{x}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)2x}}\dfrac{1}{(x-t)^{1/2}}$ d'où l'intégrabilité sur $[0, x[$.

- Limite en 0 : on utilise l'encadrement

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}} \leqslant F(x) \leqslant \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}}$$

d'où $\lim\limits_{x\to 0} F(x) = \dfrac{\pi}{2}$ car $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2-t^2}} = \frac{\pi}{2}$.
- Limite en $+\infty$ : en posant $t = ux$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-u^2}{1+u^2x^2}}\,\mathrm{d}u + \int_0^1 \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{(1+u^2x^2)(1-u^2)}} \\ &\leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2x^2}} + \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}. \end{aligned}$$

Or $\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2x^2}} \leqslant 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2x^2}} = 0$ donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée (*théorème 6.22 page 266*) pour affirmer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2x^2}} \to 0$ et, en conclusion $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

---

**Solution 2.4.16** On remarque tout d'abord que $t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0, X[$ pour tout $X > 0$ et que $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2}$ est intégrable sur $[X, +\infty[$.

$F$ est impaire et $F(0) = 0$ ; soit $X \leqslant 1$ tel que $\left|\displaystyle\int_0^X \ln t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$ alors

$$\left|\int_0^X \left(\sin\left(\frac{x}{t^2}\right) - \sin\left(\frac{y}{t^2}\right)\right)\ln t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

en majorant le sinus par 1.
Puis comme $|\sin u - \sin v| \leqslant |u-v|$ :

$$\left|\int_X^{+\infty}\left(\sin\left(\frac{x}{t^2}\right)-\sin\left(\frac{y}{t^2}\right)\right)\ln t\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |x-y|\int_X^{+\infty}\frac{|\ln t|}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Si $|x-y| \leqslant \eta$ où $\eta$ est tel que $|x-y|\displaystyle\int_X^{+\infty}\frac{|\ln t|}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ alors $|F(x)-F(y)| \leqslant \varepsilon$ c.q.f.d.

---

**Solution 2.4.17**

(1) Immédiat car $|e^{-xt}f(t)| \leqslant |f(t)|$ qui est intégrable.

(2) On écrit

$$x\varphi(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} xe^{-xt}\left(f(t)-f(0)\right)\mathrm{d}t.$$

Soit $a$ tel que : $|f(t)-f(0)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $t \in [0,a]$.

On a $\left|\displaystyle\int_a^{+\infty} xe^{-xt}f(0)\,\mathrm{d}t\right| = |e^{-xa}f(0)|$ qui tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Il reste à majorer $\displaystyle\int_a^{+\infty} xe^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $g(u) = \displaystyle\int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t$ et $h(u) = \displaystyle\int_0^u |f(t)|\,\mathrm{d}t$ alors, en faisant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} xe^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[xe^{-xt}g(t)\right]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} x^2e^{-xt}g(t)\,\mathrm{d}t\\ &= -xe^{-xa}g(a) + x^2\int_a^{+\infty} e^{-xt}g(t)\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant xe^{-xa}h(a) + x^2\int_a^{+\infty} e^{-xt}h(t)\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant xe^{-xa}h(a) + x^2\int_a^{+\infty} e^{-xt}h(a)\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant 2xe^{-xa}h(a).\end{aligned}$$

On choisit alors $x$ suffisamment grand pour que $e^{-xa}|f(0)| + 2xe^{-xa}h(a) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

On arrive bien à la conclusion attendue (mais c'est laborieux !).

---

**Solution 2.4.18**

(1) On a $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ où $f(x,t) = \exp\left(-t^2 - \dfrac{x^2}{t^2}\right) \leqslant e^{-t^2}$ intégrable en $+\infty$ et $f(x,t)$ est bornée en 0 donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et, par conséquent, $I$ est définie sur $\mathbb{R}$.

$I(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ; $I$ paire, on fait l'étude sur $\mathbb{R}_+^*$.

$(x,t) \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et, avec la majoration $\exp(-t^2-\dfrac{x^2}{t^2}) \leqslant \exp(-t^2)$, on peut appliquer le théorème de continuité sous le signe intégral (*théorème 6.24 page 267*), $I(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour $I'(x)$, on aura la dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ : on prend $0 < a \leqslant x \leqslant A$ alors

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{2x}{t^2}\exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \leqslant \frac{2A}{t^2}\exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right).$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{2A}{t^2}\exp\left(-t^2 - \dfrac{a^2}{t^2}\right)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc on peut conclure avec le théorème de dérivabilité sous le signe intégral (*théorème 6.26 page 268*).

(2) On a donc $I'(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x}{t^2}\exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \mathrm{d}t$ et, pour $x > 0$, en faisant le changement de variable $u = \dfrac{x}{t}$ on vérifie que $I'(x) = -2I(x)$ d'où : $I(x) = Ce^{-2x}$ pour $x > 0$. On obtient finalement $I(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2|x|}$ fonction continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

---

**Solution 2.4.19** $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$ existe bien, il suffit de faire une intégration par partie : on intègre le sinus, on dérive $\dfrac{1}{x+t}$ d'où

$$\int_0^X \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\frac{-\cos t}{x+t}\right]_0^X}_{\text{admet une limite en } +\infty} - \int_0^X \underbrace{\frac{\cos t}{(x+t)^2}}_{\text{intégrable sur } [0,+\infty[} \mathrm{d}t$$

et donc

$$f(x) = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t \text{ pour } x \neq 0. \tag{1}$$

Si on pose $s(x) = \displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_x^X \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $c(x) = \displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_x^X \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$, on vérifie que

$$f(x) = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{\sin t}{t+x}\,\mathrm{d}t = \cos x.s(x) - \sin x.c(x)$$

(par un simple changement de variable $u = t + x$).
$s(x)$ et $c(x)$ sont dérivables (écrire par exemple $s(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t + \lim_{X\to+\infty}\int_1^X \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$) et on vérifie que $f'(x) = -\sin x.s(x) - \cos x.c(x)$ puis que $f''(x) = -\cos x.s(x) + \sin x.c(x) + \dfrac{\sin^2 x}{x} + \dfrac{\cos^2 x}{x}$.
Conclusion : on a $f(x) + f''(x) = \dfrac{1}{x}$ et on vérifie aussi que $f$ se prolonge bien par continuité en 0. En effet $\cos x.s(x)$ a une limite en 0 et $c(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$ (intégration des relations de comparaisons).
On vérifie aisément que $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ et grâce à la majoration $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$ on peut même dire que $g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ grâce au théorème de continuité sous le signe intégral (*théorème 6.24 page 267*).
Pour $x \geqslant a > 0$, on peut appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral (*théorème 6.26 page 268*) à $h(x) = -\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ car $\dfrac{t}{1+t^2}e^{-xt} \leqslant \dfrac{t}{1+t^2}e^{-at}$. Donc $g$ est dérivable et $g'(x) = h(x)$. On montre de même que $g'$ est dérivable sur tout intervalle $[a,+\infty[$ (donc sur

$]0,+\infty[)$ et que $g''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
La conclusion est alors la même que pour $f$.
Maintenant, la fonction $\delta = f - g$ est solution de $\delta + \delta'' = 0$. Comme $f$ et $g$ ont une limite nulle en $+\infty$, on en déduit que $\delta = 0$ et donc $f = g$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x = 0$ : $f$ se prolonge par continuité (en effet $\cos x.s(x)$ a une limite en 0 et $c(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$ (intégration des relations de comparaison). Comme $g$ est continue on a finalement $f = g$ sur $\mathbb{R}_+$.
Pour prouver que $f$ a une limite nulle en $+\infty$, on utilise la formule (1) et la majoration $\dfrac{|\cos t|}{(x+t)^2} \leqslant \dfrac{1}{(1+t)^2}$ pour $x \geqslant 1$ ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée (*théorème 6.22 page 266*). Pour $g$, on majore $\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ par $\dfrac{1}{1+t^2}$ et on utilise le même théorème.

---

**Solution 2.4.20** On utilise les inégalités $\left|\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\cos(xt)\right| \leqslant \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ et $\left|\dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\sin(xt)\right| \leqslant \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$. Comme $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, on peut conclure.
Posons $h(x) = f(x) + ig(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp[(ix-1)t]\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \int_0^{+\infty} F(x,t)\,\mathrm{d}t$.
Comme $\left|\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = |\exp[(ix-1)t]\sqrt{t}| \leqslant e^{-t}\sqrt{t} \in L^1([0,+\infty[$, on peut dériver sous le signe intégral (*théorème 6.26 page 268*).
Après une intégration par parties, on trouve : $h(x) = -2(x+i)h'(x)$. On peut résoudre cette équation différentielle : $\dfrac{h'}{h} = -\dfrac{1}{2(x+i)} = -\dfrac{x-i}{2(x^2+1)}$, ce qui donne

$$h(x) = \lambda \frac{\exp(i/2\operatorname{Arctan} x)}{(1+x^2)^{1/4}}.$$

Avec $\theta = \dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x$, on vérifie que $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^2+1}+1}}{(x^2+1)^{1/4}}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}}{(x^2+1)^{1/4}}$.
Comme $f$ est paire, $g$ impaire et, vu que $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$ on peut dire que

$$f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+1}+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

et

$$g(x) = \operatorname{sgn}(x)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sqrt{x^2+1}-1}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

---

**Solution 2.4.21**

(1) Grâce à la règle de Riemann en 0 et en $+\infty$ (cf *règle (i) page 262*), on vérifie que $f$ est définie pour $\alpha \in ]0,1[$.
$f$ est continue, en effet, soit $[a,b] \subset ]0,1[$, on écrit $f = g + h$ où $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}$ et $h(\alpha) = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}$ et on prouve que $g$ et $h$ sont continues. On utilise pour cela les

majorations suivantes :

$$x^b = e^{b\ln x} \leqslant x^\alpha = e^{\alpha\ln x} \leqslant e^{a\ln x} = x^a \text{ si } x \in ]0,1]$$
$$x^a = e^{a\ln x} \leqslant x^\alpha = e^{\alpha\ln x} \leqslant e^{b\ln x} = x^b \text{ si } x \in [1,+\infty[$$

d'où $\dfrac{1}{x^\alpha(1+x)} \leqslant \dfrac{1}{x^b(1+x)}$ si $x \in ]0,1]$ et $\dfrac{1}{x^\alpha(1+x)} \leqslant \dfrac{1}{x^a(1+x)}$ si $x \in [1,+\infty[$ (toujours pour $\alpha \in [a,b]$). On peut alors appliquer le théorème de continuité sous le signe intégral (*théorème 6.24 page 267*).

(2) On remarque tout d'abord que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}$ est borné pour $\alpha \in [0,1/2]$ par $g(1/2)$.

Étudions $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}$ :

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}} = -\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}(1+x)}$ d'où

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} - \frac{1}{\alpha}\right| \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1.$$

On déduit alors le résultat : $f(\alpha) \sim \dfrac{1}{\alpha}$.

(3) En faisant le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$, on obtient $f(\alpha) = f(1-\alpha)$.

(4) En reprenant le changement de variable ci-dessus, on obtient

$$f(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{1}{x^\alpha} + \frac{1}{x^{1-\alpha}}\right) \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$$

et pour rendre les calculs symétriques, on pose $\alpha = \dfrac{1}{2} + \beta$ ce qui donne

$$f(\alpha) = \int_0^1 \left(\frac{1}{x^\beta} + \frac{1}{x^{-\beta}}\right) \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

Grâce à l'inégalité $x^\beta + x^{-\beta} \geqslant 2$ (développer $(x^{\beta/2} - x^{-\beta/2})^2$) on déduit que $f(\alpha) \geqslant 2\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$ ce qui donne la borne inférieure.

---

**Solution 2.4.22**

(1) $\mathcal{D}_F = ]-1,+\infty[$ en utilisant la *règle pratique* (*i*) *page 262*).
$F \searrow$ car $x \mapsto t^x$ est décroissante.
Après une intégration par parties : $F(x+1) = (x+1)F(x) - \dfrac{1}{e}$.

(2) $F$ est continue à droite en 0. En effet, si $x \to 0^+$ alors, comme
- $f(x,t) = e^{-t}t^x = e^{-t}e^{-x\ln t}$ est continue sur $[0,+\infty[\times]0,1)$
- et $e^{-t}t^x \leqslant e^{-t}$

le théorème de continuité sous le signe intégral (cf *théorème 6.24 page 267*) nous permet de dire que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = F(0) = 1 - 1/e$.
On en déduit que, si $x+1 \to 0$ :

$$F(x) \sim \frac{F(0) + 1/e}{x+1} = \frac{1}{x+1}.$$

(3) $F(x+1) \leqslant F(x)$ d'où $0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{1}{ex}$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$. On a même mieux avec

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xF(x) - \frac{1}{e}\right) = \lim_{x\to+\infty}(F(x+1) - F(x)) = 0$$

d'où $F(x) \sim \dfrac{1}{ex}$.

(4) On a : $F(x) - \displaystyle\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (e^t - 1)t^x\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t$ où $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{n!}t^{n+x}$.

Or : $|u_n(t)| \leqslant \dfrac{1}{n!}$ $(n \geqslant 1)$ on a donc convergence normale (qui entraîne la convergence uniforme) sur $[0,1]$ et on peut permuter $\displaystyle\int$ et $\sum$ (cf. *théorème 5.55 page 253*) d'où $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+x+1}$.

---

**Solution 2.4.23**

(1) $f$ est définie pour $x > 0$. Soit $F(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)(t+x)}}$ en majorant $\dfrac{1}{\sqrt{t+x}}$ par $\dfrac{1}{\sqrt{t+a}}$ et $\dfrac{1}{(t+x)^{3/2}}$ par $\dfrac{1}{(t+a)^{3/2}}$ pour $x \geqslant a > 0$ on obtient

$$|F(x,t)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(t+a)}}$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{-1}{2}\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\frac{1}{(t+x)^{3/2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\frac{1}{(t+a)^{3/2}}$$

On vérifie aussi que $F$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ sont continues sur $]0,1[\times]0,+\infty[$, ceci permet d'affirmer que $f$ est dérivable et que $f'(x) = \dfrac{-1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}\frac{1}{(t+x)^{3/2}}$ grâce au théorème de dérivation sous le signe intégral (on utilise les *théorèmes 6.24 et 6.26 pages 267 et 268*).

(2) **Étude en 0** : soit $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+x)}} = 2\mathrm{Argsh}\,\frac{1}{\sqrt{x}} \sim -\ln x$ (la fonction Argsh permet d'avoir le résultat $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t+x)}} \sim -\ln x$ en 0). On remarque alors que

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(t+x)}} - \frac{1}{\sqrt{t(t+x)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-t}}\sqrt{\frac{t}{t+x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

et en intégrant $0 \leqslant f(x) - g(x) \leqslant 2$ d'où l'équivalent en 0 de $f$ : $-\ln x$.

**Étude en $+\infty$** : on pose ici $h(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)x}} = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$. On remarque que

$$0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{t+x}} \leqslant \frac{t}{x\sqrt{x}}$$

d'où

$$0 \leqslant h(x) - f(x) \leqslant \int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}}\frac{\mathrm{d}t}{x\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = \frac{2}{x\sqrt{x}}.$$

On obtient alors $f(x) \sim \dfrac{\pi}{\sqrt{x}}$.

(3) On a, comme au 1., $f''(x) = \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t+x)^2\sqrt{t(1-t)(t+x)}}$.

On utilise ensuite la relation $1 - \dfrac{2x+1}{x+t} + \dfrac{x+x^2}{(x+t)^2} = \dfrac{t^2-t}{(x+t)^2}$ ce qui donne

$$f(x) + 2(2x+1)f'(x) + \frac{4}{3}(x+x^2)f''(x) = -\int_0^1 \frac{\sqrt{t(1-t)}}{(x+t)^{5/2}}\,\mathrm{d}t.$$

On intégre cette dernière quantité par parties :

$$-\int_0^1 \frac{\sqrt{t(1-t)}}{(x+t)^{5/2}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}\frac{\sqrt{t(1-t)}}{(x+t)^{3/2}}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{2t-1}{(x+t)\sqrt{t(1-t)(x+t)}}\,\mathrm{d}t$$

et en écrivant $2t-1 = 2(t+x)-(2x+1)$ on trouve $f(x)+2(2x+1)f'(x)+\dfrac{4}{3}(x+x^2)f''(x) = \dfrac{2}{3}f(x) + \dfrac{2}{3}(2x+1)f'(x)$ ce qui s'écrit :

$$4(x+x^2)f''(x) + 4(2x+1)f'(x) + f(x) = 0.$$

(4) On a le développement en série suivant

$$\frac{1}{\sqrt{t+x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{1+t/x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\left(\frac{t}{x}\right)^n$$

pour $x > 1$.
On utilise le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions (*théorème 5.55 page 253*) en prenant la série de fonctions $\sum f_n$ où

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{xt(1-t)}}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\left(\frac{t}{x}\right)^n.$$

Montrons que la série $\sum \displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge :
pour calculer les intégrales mises ainsi en évidence, on pose $t = \cos^2 u$ et on se ramène à une intégrale de Wallis. On a donc

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt{x}}\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\right]^2\frac{1}{x^n}$$

avec $x > 1$, ceci correspond au terme général d'une série convergente (utiliser la règle de d'Alembert—*application* ($i$) *page 241*—).
On peut donc intégrer terme à terme et écrire

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\frac{1}{x^n}\int_0^1\frac{t^n}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\right]^2\frac{1}{x^n}\ \text{pour } x > 1. \end{aligned}$$

On obtient ainsi un développement asymptotique pour $f$ convergent (ce qui n'est pas le cas de tous les développements asymptotiques que l'on peut faire).

**Solution 3.1.1**

(1) $y \mapsto \dfrac{1}{(1+x)(1+xy^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour $x > 0$ (c'est un $O(1/y^2)$). En posant $u = y\sqrt{x}$ on obtient
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(1+x)(1+xy^2)} = \frac{\pi}{2\sqrt{x}(1+x)}.$$
$x \mapsto \dfrac{\pi}{2\sqrt{x}(1+x)}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (équivalent à $\dfrac{\pi}{2x^{3/2}}$ en $+\infty$ et à $\dfrac{\pi}{2\sqrt{x}}$ en 0) donc $I$ est bien définie et en posant $v = \sqrt{x}$ on obtient $I = \dfrac{\pi^2}{2}$.

(2) Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2-1}$ qui se prolonge en 1 par $f(1) = \dfrac{1}{2}$. $f \sim -\ln x$ en 0 et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2} f(x) = 0$ donc $f$ est bien intégrable sur $]0,+\infty[$.
Relions maintenant le calcul de $J$ à celui de $I$ : pour $y \neq 1$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)(1+xy^2}$ est donnée par $\dfrac{1}{y^2-1}\ln\dfrac{1+xy^2}{1+x}$ donc
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+xy^2)} = 2\frac{\ln y}{y^2-1} = 2f(y).$$
On obtient ainsi $I = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} f(y)\,\mathrm{d}y$ soit $J = \dfrac{\pi^2}{4}$.
*Remarques* : on a fait le calcul pour $y \neq 1$ mais ce résultat reste vrai pour $y = 1$.
On peut aussi remarquer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln y}{y^2-1}\,\mathrm{d}y = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ (poser $x = 1/y$) donc $J = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln y}{y^2-1}\,\mathrm{d}y$. On développe alors $\dfrac{1}{1-y^2}$ en série et on intègre terme à terme, ce qui donne le résultat.

---

**Solution 3.1.2**

(1) Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^1 |f(x,y)|\,\mathrm{d}y = \frac{|\sin x|}{x}(1-e^{-x})$ alors $\dfrac{|\sin x|}{x}e^{-x}$ est intégrable mais $\dfrac{|\sin x|}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ donc $f$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[^2$.

(2) $g$ est intégrable sur $[0,n]$ donc $f$ est intégrable sur $A_n$, $I_n$ est bien définie et vaut
$$I_n = \int_0^{n\pi}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$
Si on fait le calcul en intervertissant les intégrations alors
$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{n\pi} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+y^2} + \frac{(-1)^{n+1}e^{-ny\pi}}{1+y^2}\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{\pi}{2} + (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ny\pi}}{1+y^2}\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$
car une primitive de $x \mapsto e^{-xy}\sin x$ est donnée par $\dfrac{e^{-xy}}{1+y^2}(\cos x + y\sin x)$.
En intégrant par parties, $\displaystyle\int_0^X \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\cos X}{X} + \int_0^X \frac{1-\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Les 2 termes du

second membre admettent une limite quand $X \to +\infty$ ($x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$) donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ existe. On obtiendra la valeur de cette intégrale en prenant la limite de $I_n$.

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ny\pi}\,\mathrm{d}y}{1+y^2} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-n\pi y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{n\pi} \to 0.$

Conclusion : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$

---

**Solution 3.1.3**

(1) $|f_z(t)| = e^{-\operatorname{Re}(z)t^2}$ est bien intégrable sur $[0,+\infty[$. Pour calculer $I(z)^2$ on procède comme pour le calcul de l'intégrale de Gauss :

$$\begin{aligned} I(z)^2 &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-zx^2}\,\mathrm{d}x\right) \times \left(\int_0^{+\infty} e^{-zy^2}\,\mathrm{d}y\right) = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-zx^2}\,\mathrm{d}x\right) e^{-zy^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_{[0,+\infty[^2} e^{-z(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{+\infty} e^{-zr^2} r\,\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{4z} \end{aligned}$$

(2) Soit $I(z,x) = \int_0^x e^{-zt^2}\,\mathrm{d}t$, on coupe l'intégrale en 2 et on fait une intégration par parties dans la seconde intégrale :

$$I(z,x) = \int_0^1 e^{-zt^2}\,\mathrm{d}t + \frac{e^{-z}}{2z} - \frac{e^{-zx^2}}{2zx} - \frac{1}{2z}\int_1^x \frac{e^{-zt^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On déduit de ceci que $I(z,x)$ a bien une limite quand $x \to +\infty$ et que sa limite, que l'on note encore $I(z)$, vérifie $I(z) = \displaystyle\int_0^1 e^{-zt^2}\,\mathrm{d}t + \frac{e^{-z}}{2z} - \frac{1}{2z}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-zt^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

- $|e^{-zt^2}| \leqslant 1$ et $z \mapsto e^{-zt^2}$, $t \mapsto e^{-zt^2}$ sont continues donc $z \mapsto \displaystyle\int_0^1 e^{-zt^2}\,\mathrm{d}t$ est continue.
- $\left|\dfrac{e^{-zt^2}}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ et on a aussi continuité des applications $z,t \mapsto \dfrac{e^{-zt^2}}{t^2}$ donc $z \mapsto \dfrac{1}{2z}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-zt^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

Conclusion : $I$ s'est donc prolongée de la sorte en une fonction continue sur $D$.

(3) En utilisant la question précédente, on a $I(-i)^2 = i\dfrac{\pi}{4}$ soit $I(-i) = \pm\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = C+iS$. Il reste à déterminer le signe de $S$ (par exemple). Or, par le changement de variable $x = t^2$ on obtient $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ que l'on écrit sous forme d'une série

$$S = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u+n\pi}}\,\mathrm{d}u$$

où on a posé $x = n\pi + u$. $S$ étant la somme d'une série alternée (vérification immédiate), $S$ est du signe du premier terme qui est positif.

Conclusion : $S = C = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$

---

**Solution 3.1.4** On se ramène tout d'abord au cas où $\alpha \in [0, \pi]$.
On réduit la forme quadratique $Q(x, y) = x^2 + 2xy\cos\alpha + y^2$ dans le groupe orthogonal soit $x^2 + 2xy\cos\alpha + y^2 = \left(\cos\frac{\alpha}{2}(x+y)\right)^2 + \left(\sin\frac{\alpha}{2}(x-y)\right)^2$. En posant $X = \dfrac{x-y}{\sqrt{2}}$ et $Y = \dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$ l'équation de $E_a$ devient $2\sin^2\frac{\alpha}{2}X^2 + 2\cos^2\frac{\alpha}{2}Y^2 = a$.

- Si $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[$ alors $E_a$ est un “quart” d'ellipse et on sait qu'une paramétrisation de l'intérieur de l'ellipse $\dfrac{X^2}{A^2} + \dfrac{Y^2}{B^2} = 1$ est donnée par $x = Au\cos\theta$, $y = Bu\sin\theta$, $u \in [0, 1]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Ici, on s'intéresse à l'aire de l'intersection de cette ellipse avec les droites $y = x$, $y = -x$, $y \geqslant 0$ donc $u \in [0, 1]$ et $\theta \in [\theta_1, \pi - \theta_1]$ où $\theta = 1 = \operatorname{Arctan}\frac{A}{B}$ (correspondant à $y = x$). Si on fait le changement de variable $(u, \theta) \mapsto (x, y)$ alors le calcul de l'aire $\iint_{E_a} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}x$ donne $\dfrac{AB}{2}(\pi - 2\theta_1) = AB\operatorname{Arctan}\frac{B}{A} = \dfrac{a\alpha}{2\sin\alpha}$ donc l'aire de $E_a$. L'aire comprise entre $E_a$ et $E_{a+\mathrm{d}a}$ vaut donc $\dfrac{\alpha\,\mathrm{d}a}{2\sin\alpha}$ donc
$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-a}\frac{\alpha\,\mathrm{d}a}{2\sin\alpha} = \frac{\alpha}{2\sin\alpha}.$$
- Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ alors $I(\alpha) = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et, en passant en polaires, on obtient $I(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{4}$.
- Si $\alpha = 0$ alors $E_a$ devient $x + y = \sqrt{a}$ et l'aire délimitée par $E_a$, $x = 0$ et $y = 0$ vaut $\dfrac{a}{2}$ (aire d'un triangle rectangle isocèle) donc $I(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a}\frac{\mathrm{d}a}{2} = \frac{1}{2}$.
- Si $\alpha = \pi$ alors si $I(\pi)$ existe, on peut faire le changement de variable $u = x - y$, $v = x$, $I(\pi) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{v} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v$. Or $f(v) = \displaystyle\int_{-\infty}^{v} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \geqslant \int_{-\infty}^{0} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ donc $f$ ne peut être intégrable. On arrive à une contradiction, $I(\pi) = +\infty$.

*Remarque* : les cas $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$ se déduisent de la formule générale donné plus haut.

---

**Solution 3.2.1** Le domaine est défini en polaires par $\dfrac{1}{\sqrt{\cos\theta\sin\theta}} \leqslant r \leqslant 2$ et $\arctan\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \arctan\theta_2$ où $\theta_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $\theta_2 = 2 + \sqrt{3}$.
On obtient alors
$$A = 2(\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta\sin\theta} = \frac{2\pi}{3} - \ln(2 + \sqrt{3}).$$

---

**Solution 3.2.2** Supposons que $0 < b \leqslant a$, on fait le changement de variables : $\begin{cases} x = au\cos t \\ y = bu\sin t \end{cases}$.

- $\Delta_1$ est transformé en $\Delta_1'$ : $t \in [-\pi/2, +\pi/2]$, $u \in [-1, +1]$,
- $\Delta_2$ est transformé en $\Delta_2'$ : $t \in [-\pi/2, +\pi/2]$, $u \in [-v(t), +v(t)]$ où $v(t) = \dfrac{ab}{\sqrt{a^4\cos^2 t + b^4\sin^2 t}}$

Le jacobien de la transformation vaut $ab|u|$, l'aire recherchée s'écrit donc
$$\mathcal{A} = ab\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\inf(1, v^2(t))\,\mathrm{d}t$$

(en application du *théorème 6.37 page 276*).

En choisissant $\varphi = \operatorname{Arctan}\dfrac{b}{a}$, $\cos 2\varphi = \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$ et (après calculs)

$$1 \leqslant v(t) \Leftrightarrow \cos 2t \leqslant \cos 2\varphi \Leftrightarrow \varphi \leqslant |t|.$$

On a alors $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ où

$$\mathcal{A}_1 = 2\int_0^{\varphi} \frac{a^3b^3}{a^4\cos^2 t + b^4\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 2ab\operatorname{Arctan}\frac{b}{a} \text{ et } \mathcal{A}_2 = 2\int_{\varphi}^{\pi/2} ab\,\mathrm{d}t = ab\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

et donc $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ (par raison de symétrie) ce qui donne finalement

$$\mathcal{A} = 4ab\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}.$$

---

**Solution 3.2.3** $D$ est symétrique par rapport à l'axe $Ox$ donc il suffit d'intégrer sur $D'$ défini par $y^2 \leqslant 2x$ et $y \geqslant 0$. Si on passe en polaires, cela donne $0 \leqslant r \leqslant 2\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On fait donc le changement de coordonnées en passant en polaires d'où

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\cos\theta/\sin^2\theta} \frac{2r\,\mathrm{d}r}{(1+r^2)^2}\right)\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2}\left[1 - \frac{1}{1+4\cos^2\theta/\sin^4\theta}\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

---

**Solution 3.2.4**

(1) En cylindriques: $I_1 = \displaystyle\iiint_{\Delta}(\cos\theta+\sin\theta)r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ où $\Delta = \{(r,\theta,z), 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant r^2\}$ d'où $I_1 = \dfrac{2}{5}$.

(2) On pose $u = x+y+z$, $v = y+z$, $w = z$: $I_2 = \displaystyle\iiint_{\Delta}\frac{w^3}{uv}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$, $\Delta = \{(u,v,w), 0 \leqslant w \leqslant v \leqslant u \leqslant 1\}$. D'où, par Fubini: $I_2 = \dfrac{1}{4^3}$.

(3) Avec $\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$ et $Z = \dfrac{1}{\rho}(\alpha x + \beta y + \gamma z)$ :

$$I_3 = \iiint_B \cos(\rho Z)\,\mathrm{d}X\,\mathrm{d}Y\,\mathrm{d}Z = \pi\int_{-1}^{+1}(1-Z^2)\cos(\rho Z)\,\mathrm{d}Z = \frac{4\pi}{\rho^3}(\sin\rho - \rho\cos\rho).$$

---

**Solution 4.1.1** Se faire le tracé sur ordinateur...

---

**Solution 4.2.1** Il faut et il suffit que $t^3 - a = 0$ et $t^3 - b = 0$ i.e. $a = b$ et dans ce cas, pour $t = a^{1/3}$ on a un point de rebroussement.

L'ensemble des points de rebroussement a pour coordonnées $(3a^{1/3}, 3a^{2/3})$ : parabole d'équation $y = \dfrac{x^2}{3}$.

---

**Solution 4.2.2** Les asymptotes sont données par

- $t \to 1 : y - x + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}(t-1) + o(t-1)$,
- $t \to -1 : y - 2x - \dfrac{5}{2} = \dfrac{9}{4}(t+1) + o(t+1)$.

La droite $ux+vy+w=0$ coupe la courbe au point de paramètre $t$ ssi $wt^3+3(u+v)t^2-(v+w)t-u=0$ (on réduit au même dénominateur). Si on pose $\sigma_1 = t_1+t_2+t_3$, $\sigma_2 = t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1$, $\sigma_3 = t_1t_2t_3$, alors la C.N.S. d'alignement des points de paramètres $t_1$, $t_2$, $t_3$ s'obtient en éliminant $u$, $v$, $w$ entre les relations

$$\sigma_1 = -3\frac{u+v}{w},\ \sigma_2 = -\frac{v+w}{w},\ \sigma_3 = \frac{u}{w}$$

(on remarque que, si $w=0$, la droite $ux+vy=0$ ne coupe la courbe qu'en au plus 2 points). La C.N.S. est alors $-\sigma_1+3\sigma_2-3\sigma_3+3=0$ (on n'a prouvé ici qu'une implication).
La tangente au point d'inflexion coupe la courbe en 3 points confondus (on dit que la droite et la courbe sont osculatrices). En reprenant la C.N.S. ci-dessus, on arrive à $-t^3+3t^2-t+1=0$, équation qui donne la valeur du paramètre au point d'inflexion (ce que l'on peut vérifier directement mais de façon plus laborieuse). En revenant aux équations ci-dessus, on obtient $\sigma_1=3$, $\sigma_2=1$, $\sigma_3=1$ d'où la tangente au point d'inflexion $x-2y+1=0$.

---

**Solution 4.3.1** L'équation du plan osculateur en $M(t)$ est :

$$\Pi(t) \quad 3bct^2X - 3actY + abZ - abct^3 = 0.$$

$\mathcal{P} \quad ux+vy+wz+h=0$ coupe $\Gamma$ aux points de paramètre $t_i$ racines de l'équation $wct^3+vbt^2+uat+h=0$ donc : $v = -\dfrac{c}{b}w\sigma_1$, $u = \dfrac{c}{a}w\sigma_2$ et $h=-cw\sigma_3$ ($w \neq 0$, $\sigma_i$ fonctions symétriques élémentaires des $t_i$). L'intersection des $\Pi(t_i)$ est le point $A(\dfrac{a\sigma_1}{3}, \dfrac{b\sigma_2}{3}, c\sigma_3)$ et $A \in \mathcal{P}$ d'équation

$$bc\sigma_2x - ca\sigma_1y + abz - abc\sigma_3 = 0.$$

---

**Solution 4.3.2** On a pour tout point $M$ de $\Gamma$ de paramètre $t$ : $\overrightarrow{OM}.\vec{n}(t) = a\operatorname{sh}t$ : si on pose $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f}(t)$ alors $\overrightarrow{f}'(t) \perp \vec{n}(t)$ et $\overrightarrow{f}''(t) \perp \vec{n}(t)$ par hypothèse.
En dérivant : $\overrightarrow{f(t)}.\vec{n}'(t) = a\operatorname{ch}t$ et $\overrightarrow{f}(t).\vec{n}''(t) + \overrightarrow{f}'(t).\vec{n}'(t) = a\operatorname{sh}t$. Or, en dérivant la relation $\overrightarrow{f}'(t).\vec{n}(t) = 0$ on obtient

$$\overrightarrow{f}'(t).\vec{n}'(t) + \overrightarrow{f}''(t).\vec{n}(t) = 0$$

d'où $\overrightarrow{f}'(t).\vec{n}'(t) = 0$. On résout alors le système :

$$\overrightarrow{f}(t).\vec{n}(t) = a\operatorname{sh}t,\ \overrightarrow{f}(t).\vec{n}'(t) = a\operatorname{ch}t\ \overrightarrow{f}(t).\vec{n}''(t) = a\operatorname{sh}t$$

d'où $x = -a\dfrac{\sin t}{\operatorname{ch}t}$, $y = a\dfrac{\cos t}{\operatorname{ch}t}$, $z = a\operatorname{th}t$ et on vérifie que $\mathcal{P}_t$ est un plan osculateur à la courbe ainsi obtenue.

---

**Solution 4.3.3**

(1) $\mathrm{d}s = \dfrac{A(z)}{12z^2}\mathrm{d}z$ où $A(z) = \sqrt{2}(9z^4+4)$, $\overrightarrow{T} = \dfrac{1}{A(z)}\left[(9z^4-4)\vec{i} + A(z)\vec{j} + 12z^2\vec{k}\right]$,

(2) $\mathrm{d}s = a\dfrac{\sqrt{m^2+1}}{\operatorname{ch}m\theta}\mathrm{d}\theta$ ; $\overrightarrow{T} = \dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}\left[-m\operatorname{th}m\theta\vec{u} + \vec{v} + \dfrac{m}{\operatorname{ch}m\theta}\vec{k}\right]$,

(3) $\mathrm{d}s = \mathrm{d}t$ d'où $\overrightarrow{T} = c \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(t/a) \\ \mathrm{sh}^2(t/a) \\ 1 \end{pmatrix}$, où $c = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(t/a)}$ ; $R = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\,\mathrm{ch}(t/a) = -T$.

(4) $\mathrm{d}s = \dfrac{1+\mathrm{ch}^2 t}{\mathrm{ch}\, t}\,\mathrm{d}t$, $\overrightarrow{T} = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, t}(\cos t\vec{i} + \sin t\vec{j} + \mathrm{sh}\, t\vec{k}) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\, t}(\vec{u} + \mathrm{sh}\, t\vec{k})$ où $\vec{u}$ est le vecteur qui fait un angle $t$ avec $\vec{i}$ dans le plan $\mathrm{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$.