SÉRIES ENTIÈRES, SÉRIES DE FOURIER

1. Séries entières

1.1. Rayon de convergence d'une série entière.

Exercice 1.1.1. **I**

Rayon de convergence des séries entières $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n$ où u_n vaut :

(1) $\ln n$ (2) $n^{\sqrt{n}}$ (3) $n^{(-1)^n}$ (4) $(2-\sqrt{2})(\cdots)(2-\sqrt[n]{2})$ (5) n^n

(6) $\dfrac{(2n)!}{n!n^n}$ (7) $\dfrac{(2n)!n^{2n}}{2^n n!(3n)!}$ (8) $\displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ (9) 0 si $n \neq p^2$, $p!$ si $n = p^2$.

Exercice 1.1.2. **I**

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ 2 séries de rayon de convergence R et R' strictement positifs.

(1) Que dire du rayon de convergence de $\sum a_n b_n z^n$?
(2) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l > 0$, quelle relation a-t-on entre R et R'?
(3) Si $R \leqslant R'$: rayon de convergence de la série entière $\sum c_n z^n$ où $c_{2p} = a_p,\ c_{2p+1} = b_p$?

1.2. Séries entières d'une variable réelle.

Exercice 1.2.1. **F**

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ à 10^{-9} près.

Exercice 1.2.2. **F**

Montrer que

$$I = -\int_0^1 \left(\frac{\ln(1-x)}{x^2} + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p(p+1)}.$$

En déduire I.

Exercice 1.2.3. **I T**

Montrer que

$$I = \int_0^1 \frac{x^2 \ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^2}.$$

Calculer I (attention aux justifications !).

Exercice 1.2.4. **I T**

Par un changement de variable, établir la relation suivante :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Préciser comment calculer I à 10^{-5} près.

Exercice 1.2.5. **I T** Chercher les développements en série entière pour :

(1) $(1+x^2)^{\alpha/2}\cos(\alpha \operatorname{Arctan} x)$ (2) $\operatorname{ch} x \cos x$ (3) $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^k$

(4) $\operatorname{Arctan} \dfrac{2(1-x)}{1+4x}$ (5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1+x\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$ (6) $(\operatorname{Arcsin} x)^2$

(7) $\operatorname{Arctan} \dfrac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$ (8) $\displaystyle e^{-x^2/2}\int_0^x e^{t^2/2}\,\mathrm{d}t$ (9) $\displaystyle x\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{x^2-2x\cos t+1}\,\mathrm{d}t$

(10) $\sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x)$ (11) $\dfrac{1}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2}$ (12) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1-2x\cos t+x^2)\,\mathrm{d}t$

Exercice 1.2.6. **I**

Soit $a \in]0,1[$.

(1) Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $f(x)$ sa somme.
(2) Prouver par analyse et synthèse que f est développable en série entière au voisinage de 0 et donner son développement.
(3) À l'aide d'une suite double sommable, retrouver ce résultat.

Exercice 1.2.7. **F T**

Rayon de convergence et somme des séries (x est un réel) :

(1) $\dfrac{x^{4n}}{4n+1}$ (2) $\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{4n^2-1}$ (3) $\left(1+\dfrac{1}{1!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)x^n$

(4) $\dfrac{x^n}{3n+2}$ (5) $\dfrac{x^n}{n}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+n\dfrac{\pi}{2}\right)$ (6) $a_n x^n$ où $a_{n+3} = 2a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$

Exercice 1.2.8. **F**

Rayon de convergence de $s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u_n}{n!}x^n$ et $t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{v_n}{n!}x^n$ où les suites u_n et v_n sont déterminées par

$$u_{n+1} = u_n + 4v_n,\ \ v_{n+1} = u_n + v_n.$$

Calculer $s(x)$ et $t(x)$.

Exercice 1.2.9. **F CT**

On désigne par a_n le nombre de triplets (x,y,z) de $\mathbb{N}^3$ tels que $x+y+2z=n$.

(1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $a_n u^n$.
(2) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n = \dfrac{1}{(1-u)^2(1-u^2)}$; en déduire la valeur de a_n.

EXERCICE 1.2.10. **I**

Soit (E, T) un magma non associatif (i.e. un ensemble muni d'une loi interne). On désigne par $P(n)$ le nombre de composés distincts que l'on peut former avec n éléments donnés de E pris dans un ordre donné ($n \geqslant 1$).

(1) Vérifier que $P(n+1) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(k)P(n+1-k)$.

(2) Montrer que la série entière $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(n)x^n$ vérifie $S^2(x) = S(x) - x$ (on ne se préoccupera pas ici de rayon de convergence).

(3) En déduire $P(n) = \dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$; justifier a posteriori les calculs.

EXERCICE 1.2.11. **I T**

Considérons la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$: $2na_n = 2na_{n-1} - a_{n-2}$.

(1) Déterminer le rayon de convergence de la série entière : $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

(2) Montrer que S est solution de l'équation différentielle : $(1-x)y' - p(x)y = 0$ où p est un polynôme.

(3) Donner une expression de a_n en fonction de n.

EXERCICE 1.2.12. **I**

Soit P_n le nombre de partitions d'un ensemble fini de cardinal n.

(1) Montrer que :

$$P_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k.$$

(2) À l'aide des séries entières, donner une expression de P_n sous forme d'une série.

EXERCICE 1.2.13. **I**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, on pose : $F_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t \,\mathrm{d}t}{(t^2 + x^2)^n}$.

(1) Étudier la continuité et la dérivabilité de F_n. Montrer que $F_n'(x) = -2nxF_{n+1}(x)$.

(2) Trouver une relation de récurrence entre $F_n,\ F_{n+1},\ F_{n+2}$.

(3) En déduire que F_n vérifie : $xF_n''(x) + 2nF_n'(x) - xF_n(x) = 0$.

(4) Trouver $\lim\limits_{x \to 0} x^{2n-1} F_n(x)$.

EXERCICE 1.2.14. **I C**

(1) Continuité et dérivabilité de $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} \,\mathrm{d}t$ ($x > -1$).

(2) Chercher le développement en série entière de $f(x)$.

(3) Montrer que, pour $x > -1$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x+1}$.

---

2. Séries de Fourier

2.1. Coefficients de Fourier.

Exercice 2.1.1. **F T**

Déterminer la série de Fourier de la fonction f impaire, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]0,\pi[$ par :

a) $f(t)=\sin\frac{t}{2}$ b) $f(t)=\cos\frac{t}{2}$ c) $f(t)=\operatorname{sh} t$ d) $f(t)=t^2$

Quelle est la somme de la série obtenue?

Même question en considérant cette fois f paire.

Exercice 2.1.2. **F T**

(1) Déterminer a,b,c réels tels que la fonction f paire, 2π-périodique définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=ax^2+bx+c$ ait pour série de Fourier : $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}$.

(2) Déterminer la somme de cette série. Qu'obtient-on pour $x=0,\ x=\pi$?

2.2. Convergence en moyenne quadratique.

Exercice 2.2.1. **F T**

Soit f une fonction impaire, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ définie sur $]0,\pi[$ par $f(t)=\pi t-t^2$.

(1) Déterminer la série de Fourier de f ; étudier sa convergence et sa somme.

(2) On définit $g\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par : $g''(t)=f(t)$; $g(0)=g(\pi)=0$. Calculer la série de Fourier de g.

(3) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^6}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^6}$, $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^{10}}$.

Exercice 2.2.2. **F T**

(1) Développement en série de sinus de $f(x)=x(\pi-x)$ définie sur $I=[0,\pi]$.

(2) Trouver les sommes des séries : $\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^6}$.

2.3. Convergence ponctuelle.

Exercice 2.3.1. **F T**

Soit $a>0$, on pose $f(t)=\dfrac{1}{\operatorname{ch} a+\cos t}$. En écrivant $z=e^{it}$, développer f en série de Fourier.

En déduire : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nt}{\operatorname{ch} a+\cos t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2.3.2. **F**

Montrer que, sur un domaine que l'on précisera,

$$|\sin x|=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 kx}{4k^2-1}.$$

EXERCICE 2.3.3. **I**

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 2π-périodique.

(1) Calculer $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x-h)|^2 \,\mathrm{d}x$ en fonction des coefficients de Fourier $c_n(f)$ de f.

(2) On pose $\omega(x) = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}, 0\leqslant y\leqslant x} |f(t) - f(t+y)|$ où $x > 0$. Montrer que :

$$\sum_{2^{k-1}\leqslant |n| < 2^k} |c_n(f)|^2 \leqslant \left[\omega\left(\frac{\pi}{2^k}\right)\right]^2$$

(3) On suppose que $\omega(x) \leqslant Cx^\alpha$ où $\alpha > \dfrac{1}{2}$ et $C > 0$.

a) Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$ converge.

b) En déduire que la série de Fourier de f converge uniformément vers f,

c) Prouver enfin que si $\alpha > 1$ alors f est constante.

EXERCICE 2.3.4. **F**

On définit $P_r(t) = \dfrac{1-r^2}{1 - 2r\cos t + r^2} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1 + re^{it}}{1 - re^{it}}\right)$, $|r| < 1$ (c'est ce qu'on a appelé noyau de Poisson cf. exemple (*ii*) page 293).

(1) Chercher le développement en série de Fourier de $P_r(t)$.

(2) Si $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 1$, prouver que, pour $z = re^{it}$ on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-u) f(e^{iu}) \,\mathrm{d}u.$$

Qu'en penser ?

EXERCICE 2.3.5. **I C** <u>Autour des nombres de Bernoulli</u> :

(1) Montrer que, si $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$, $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$: $\cos(2\pi z x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \dfrac{z\sin \pi z}{\pi(z^2 - n^2)} e^{i2\pi n x}$.

En déduire les développements d'Euler :

$$\pi \,\mathrm{cotan}\, \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2z}{z^2 - n^2}.$$

(2) On pose $\zeta(2k) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{2k}}$ (ζ fonction de Riemann).

Prouver que $\pi\,\mathrm{cotan}\,\pi z - \dfrac{1}{z} = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{2z^{2k-1}}{n^{2k}}\right)$ pour $|z| < 1$.

En déduire que $\pi\,\mathrm{cotan}\,\pi z = \dfrac{1}{z} - 2\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \zeta(2k) z^{2k-1}$ et donner le D.S.E. de $\tan x$.

Démontrer ensuite la relation suivante :

$$\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\zeta(2k) t^{2k}}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \ (|t| < 2\pi).$$

(3) Soient $b_0 = 1$, $b_1 = -\dfrac{1}{2}$, $b_{2k-1} = 0$, $b_{2k} = (-1)^{k+1}\dfrac{(2k)!\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}$ les nombres de Bernoulli ; montrer que $b_0 + \binom{n}{1}b_1 + \cdots + \binom{n}{n-1}b_{n-1} = 0$, en déduire : $b_2 = \dfrac{1}{6}$, $b_4 = -\dfrac{1}{30}$, $b_6 = \dfrac{1}{42}$, $b_8 = -\dfrac{1}{30}$; calculer $\zeta(2k)$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 2.3.6. **I C**

Ici, p désigne un réel strictement positif.

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe C^1, de période p telle que $\displaystyle\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^p f'^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{4\pi^2}{p^2}\int_0^p f^2(t)\,\mathrm{d}t$ avec égalité ssi f s'écrit sous la forme :

$$f(t) = a\cos\frac{2\pi t}{p} + b\sin\frac{2\pi t}{p}.$$

(2) Soit $z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, de classe C^1, de période p, $z(t) = f(t) + ig(t)$; on suppose que $\displaystyle\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f'^2(t) + g'^2(t) = 1$.

Montrer que $\displaystyle\frac{4\pi}{p}\int_0^p f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \leqslant p$ avec égalité ssi $\exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$z(t) = (a + ib)\exp\left(\frac{i2\pi t}{p}\right) + ic \text{ et } a^2 + b^2 = \frac{p^2}{4\pi^2}.$$

(3) Montrer que le résultat du 2. reste valable si $\displaystyle\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t$ n'est pas égal à 0.

(4) Interprétation géométrique ?

Exercice 2.3.7. **I**

(1) À l'aide d'un développement en série de fonctions, prouver que

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2 + n^2}$$

(on utilisera le résultat : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin ax e^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2 + n^2}$.)

(2) Calculer le développement en série de Fourier de $f(t) = \operatorname{ch} at$, $t \in [-\pi, +\pi]$. En déduire la valeur de $I(a)$.

Exercice 2.3.8. **I**

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux suites complexes telles que $\sum |u_n| + |u_{-n}|$ et $\sum |v_n| + |v_{-n}|$ convergent, on dit par la suite qu'elles sont sommables et on note $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$.

(1) Montrer que $(u_p v_{n-p})_{p\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

(2) On note $w_n = \sum\limits_{p\in\mathbb{Z}} u_p v_{n-p}$ prouver que (w_n) est sommable.

(3) On appelle $U(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \bar{u_n} e^{-inx}$, $V(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} v_n e^{inx}$. À l'aide de la formule de Parseval montrer que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} w_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\right).$$

(on pourra établir que $w_n = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \overline{U(x)}V(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x$).

Exercice 2.3.9. $\boxed{\textbf{D}}$

(1) Chercher le développement en série de Fourier de $g(\theta) = \exp(te^{i\theta})$; en déduire la formule :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2t\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

(2) On pose $I(t) = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{2t\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$, $t > 0$.
Pour $\varepsilon > 0$ fixé, montrer qu'il existe $\delta \in]0,\pi[$ tel que :

$$\forall\theta \in [0,\delta] : 1 - \frac{\theta^2}{2} \leqslant \cos\theta \leqslant 1 - \frac{\theta^2}{2}(1-\varepsilon)^2.$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on choisit t_1 pour que $t \geqslant t_1 \Rightarrow \displaystyle\int_0^{\delta\sqrt{t}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-\varepsilon)$.
Prouver alors que :

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}(1-\varepsilon) \leqslant \int_0^{\delta} e^{2t\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}\frac{1}{1-\varepsilon}.$$

En déduire que $I(t) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\dfrac{e^{2t}}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers $+\infty$.
Donner alors l'équivalent quand x tend vers $+\infty$ de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

Exercice 2.3.10. $\boxed{\textbf{D}}$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs non tous nuls telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2$ converge. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ et on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$, on appelle φ sa dérivée.

(1) Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} |\varphi|^2(t)\,\mathrm{d}t$.

(2) Montrer que $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n\right)^4 < \pi^2 \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2\right)\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2\right)$.

(3) Que penser de la validité de cette inégalité si on suppose seulement $\sum n^2 a_n^2$ convergente ?

1. Indications :

Indication 1.1.1 (1) $R=1$, (2) $R=1$ (si $0<x<1$ alors $u_n x^n \to 0$ et $u_n \to +\infty$),
(3) $R=1$ (somme de 2 S.E. de rayon =1 et $u_n \not\to 0$), (4) $R=1$ car $u_{n+1}/u_n \to 1$,
(5) $R=0$ car $u_{n+1}/u_n \to +\infty$, (6) $R=\frac{e}{2}$ car $u_{n+1}/u_n \to \frac{2}{e}$, (7) $R=\frac{27}{e^2}$ car $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{e^2}{27}$,
(8) $R=1$ car $\frac{1}{e(n+1)} \leqslant \int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}$, (9) $R=1$ (prendre $a_p = p!x^{p^2}$ et utiliser la règle de d'Alembert.

Indication 1.1.2

(1) $RR' \leqslant R''$, on n'a pas d'égalité avec, par exemple : $a_n = 1+(-1)^n,\ b_n = a_{n+1}$.
(2) $R = R'$.
(3) $R'' = \sqrt{R}$.

Indication 1.2.1 Développer $\frac{1-\cos x}{x}$ en série entière et intégrer.

Indication 1.2.2 Développer $f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x^2} - \frac{1}{x}$ en série entière et intégrer sur $[0,t]$, $t<1$, $I=1$ à la limite.

Indication 1.2.3 Écrire $\frac{x^2\ln x}{1-x} = \sum_{n=1}^{N} x^{n+1}\ln x + x^{N+1}h(x)$ où $h(x) = \frac{x\ln x}{1-x}$ est continue sur $[0,1]$ et intégrer, on trouve $I = \frac{5}{4} - \frac{\pi^2}{6}$.

Indication 1.2.4 On pose $t=\frac{1}{u}$ et on procède comme à l'exercice précédent.

Indication 1.2.5 (1) $a_{2p} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\cdots)(\alpha-2p+1)}{(2p)!}(-1)^p x^{2p}$ (équa.diff.).
(2) $a_{4n} = (-1)^n \frac{4^n}{(4n)!}$.
(3) $a_{2n} = \frac{k^2(k^2-2)(\cdots)(k^2-(2n-2)^2)}{(2n)!}$, $a_{2n+1} = \frac{(k^2-1)(\cdots)(k^2-(2n-1)^2)}{(2n+1)!}$ (équa.diff.).
(4) Écrire $f(x) = \operatorname{Arctan} 2 - \operatorname{Arctan} 2x$.
(5) Intégrer terme à terme le D.S.E. de $\ln(1+x\sin^2 t)$ et utiliser les intégrales de Wallis, $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}.\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}2\pi$.
(6) Intégrer le D.S.E. de la dérivée de $(\operatorname{Arcsin} x)^2$ (obtenu par équa.diff.), on trouve $a_{2n} = \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{n(2n-1)!}$.
(7) Intégrer le D.S.E. de f', on trouve $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n}x^n$.
(8) On obtient $a_n = (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n+1)!}$ avec une équa.diff.
(9) Utiliser le D.S.E. du 7, intégrer terme à terme puis faire une I.P.P., on trouve $a_n = \pi\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
(10) $a_{2n+1} = \frac{((2n-1)^2-\alpha^2)(\cdots)(1-\alpha^2)}{(2n+1)!}\alpha$ (équa.diff. comme au 3).
(11) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2}$, on trouve $a_n = \frac{\operatorname{sh}(n+1)\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}$.
(12) Montrer que $\int_0^{2\pi} \ln(1-2x\cos t+x^2)\,\mathrm{d}t = 2\pi\ln(1-x) - 4x\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{x^2-2x\cos t+1}\,\mathrm{d}t$ et utiliser le (9).

Indication 1.2.6

(1) Montrer que la série $\sum \sin(a^n x)$ converge normalement sur tout intervalle $[-M,M]$.
(2) Montrer que $g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!(1-a^{2p+1})}x^{2p+1}$ est l'unique fonction vérifiant $g(x) - g(ax) = \sin x$, $g(0)=0$, g continue en 0 et que $g=f$.
(3) Développer $\sin(a^n x)$ en série entière et appliquer le théorème d'interversion des sommations.

Indication 1.2.7

(1) $R=1$, poser $x^4=y$, la somme vaut $\frac{1}{4x}\left(2\operatorname{Arctan} x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)$.
(2) $R=1$, poser $x^2=y$, la somme vaut $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{Arctan} x + \frac{x}{2}$.
(3) $R=1$ et la somme vaut $\frac{e^x}{1-x}$ (produit de Cauchy).

(4) $R=1$, poser $x=y^3$ et intégrer avec un logiciel de calcul formel pour trouver $\frac{1}{6x^{2/3}}\left[\ln\frac{1-x}{(1-x^{1/3})^3}-2\sqrt{3}(\operatorname{Arctan}\frac{2x^{1/3}+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6})\right]$.

(5) $R=1$, pour le calcul de la somme, calculer séparément la partie paire et impaire, on obtient $S(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{Arctan}x+\ln(1+x^2))$.

(6) $R=1$ en général (résoudre la récurrence), pour le calcul de la somme, faire intervenir le polynôme $1-2x+2x^2-x^3$. On trouve $S(x)=\frac{a_0+(a_1-2a_0)x+(a_2-2a_1+2a_0)x^2}{1-2x+2x^2-x^3}$.

Indication 1.2.8 $R=+\infty$, montrer que s et t vérifient $s'(x)=s(x)+4t(x)$, $t'(x)=s(x)+t(x)$. En déduire que $s(x)=\frac{1}{2}[\lambda e^{3x}+\mu e^{-x}]$, $t(x)=\frac{1}{4}[\lambda e^{3x}-\mu e^{-x}]$.

Indication 1.2.9

(1) $1\leqslant a_n\leqslant (n+1)^3\Rightarrow R=1$.

(2) Faire le produit de Cauchy de $\frac{1}{1-u}$ par $\frac{1}{1-u}$ et par $\frac{1}{1-u^2}$, pour calculer a_n montrer que $a_n=a_{n-2}+n+1$ d'où $a_{2p}=(p+1)^2$ et $a_{2p+1}=(p+1)(p+2)$.

Indication 1.2.10

(1) Écrire un composé sous la forme $(a_1\dots a_k)(a_{k+1}\dots a_{n+1})$ et montrer que l'on a $P(k)\times P(n+1-k)$ choix possibles.

(2) Faire le produit de Cauchy de S par elle même.

(3) Montrer que $S(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$ et en déduire que $P_n=\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$, penser a justifier les calculs.

Indication 1.2.11

(1) On trouve $R=1$ (poser $u_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}$, $u_n=g_n(u_{n-1})$ et étudier g).

(2) On trouve $p(x)=1-\frac{x}{2}$ d'où $S=\frac{e^{x/2}}{\sqrt{1-x}}$.

(3) $a_n=\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\frac{(2p)!}{2^p(n-p)!(p!)^2}$.

Indication 1.2.12

(1) Soit $x\in E$ et $\mathcal{A}$ une partition de E, raisonner sur le nombre d'éléments de A_x où A_x est le seul ensemble de la partition $\mathcal{A}$ qui contient x.

(2) Montrer que la série entière $R(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{P_n}{n!}x^n$ a un rayon de convergence est >0 (prouver par récurrence que $P_n\leqslant n^n$). Traduire alors la relation par un produit de Cauchy de 2 séries entières et en déduire que $P_n=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$.

Indication 1.2.13

(1) Avec $\left|\frac{\cos t}{(t^2+x^2)^n}\right|\leqslant\frac{1}{(t^2+a^2)^n}$ pour $x\in[a,b]\subset]0,+\infty[$ montrer la continuité de F_n sur $[a,b]$. Procéder de même pour la dérivabilité.

(2) Intégrer par parties 2 fois pour trouver
$F_n(x)+2n(2n+1)F_{n+1}(x)-4n(n+1)x^2F_{n+2}(x)=0$.

(3) Montrer que F_n' est dérivable puis utiliser $F_n'(x)=-2nxF_{n+1}(x)$ et le 2.

(4) Remarquer que $x^{2n-1}F_n(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ux\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^n}$ pour $x>0$ et utiliser le théorème de convergence dominée pour trouver $\lim_{x\to 0}x^{2n-1}F_n(x)=\frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2}\frac{\pi}{2}$ en utilisant les intégrales de Wallis.

Indication 1.2.14

(1) Montrer que f est continue pour tout $a>-1$ avec le théorème de continuité sous le signe intégral. Pour la dérivabilité, utiliser la majoration $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\frac{t^a|\ln t|}{1+t}$ (où $g(x,t)=\frac{t^x}{1+t}$).

(2) Écrire que $g(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k(\ln t)^k}{k!(1+t)}$ et montrer que $I_k=\frac{x^k}{k!}\int_0^1\frac{(\ln t)^k}{1+t}\,\mathrm{d}t$ vérifie $|I_k|\leqslant|x|^k$. Utiliser alors le théorème d'intégration terme à terme d'une série qui nous donne, pour $|x|<1$, $f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\int_0^1\frac{(\ln t)^k}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

(3) Écrire que $\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{n+x}\,\mathrm{d}t + r_N$ où $|r_N| = \int_0^1 \frac{t^{N+1+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et montrer que $r_N \to 0$. tend vers 0. Par passage à la limite, on obtient le résultat.

Indication 2.1.1 Cas f impaire.

a) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2-1/4}\sin nt$.
b) $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin nt$.
c) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}\operatorname{sh}\pi\sin nt$.
d) $-2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nt - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^3}\sin(2p+1)t$.

Cas f paire

a') $\frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1/4}\cos nt$.
b') $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos nt + \frac{2}{\pi}$.
c') $\frac{1+\operatorname{ch}\pi}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n\operatorname{ch}\pi}{n^2+1}\cos nt$.
d') $4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt + \frac{\pi^2}{3}$.

Indication 2.1.2

(1) On trouve : $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{\pi}{2}$, $c = \frac{\pi^2}{6}$.
(2) f est égale à la somme de sa série de Fourier, on a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Indication 2.2.1

(1) $S_f = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin(2p+1)t}{(2p+1)^3} = f$ et la convergence est normale.
(2) On intègre 2 fois, d'où $S_g = \frac{\pi}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^4 - \frac{\pi^3}{12}t$.
(3) Appliquer Parseval à f , $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$ puis $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$ et à g, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^{10}} = \frac{31\pi^{10}}{2903040}$.

Indication 2.2.2

(1) cf. le n$^\circ$ 2.2.1
(2) Avec $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$, la deuxième somme s'obtient avec Parseval.

Indication 2.3.1 Utiliser l'*exemple (v) page 293*, on obtient
$f(t) = \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-na}\cos nt\right]$, l'intégrale demandée correspond à un coefficient près au coefficient de Fourier.

Indication 2.3.2 Chercher le D.S.F. de $|\sin x|$ et calculer $|\sin x| - |\sin 0|$.

Indication 2.3.3

(1) Appliquer la formule de Parseval à la fonction $x \mapsto f(x+h) - f(x-h)$, on trouve $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x+h) - f(x-h)|^2\,\mathrm{d}x = 4\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sin^2 nh.|\widehat{f}(n)|^2$.
(2) Prendre $|h| = \frac{\pi}{2^{k+1}}$ et utiliser l'égalité ci-dessus.
(3) a) Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec pour avoir $\left(\sum_{2^{k-1}<|n|\leqslant 2^k}|\widehat{f}(n)|\right)^2 \leqslant 2^k\left(\sum_{2^{k-1}<|n|\leqslant 2^k}|\widehat{f}(n)|^2\right)$, en déduire qu'il existe une constante K telle que $\sum_{2^{k-1}\leqslant|n|\leqslant 2^k}|\widehat{f}(n)| \leqslant \frac{K}{2^{(2\alpha-1)k/2}}$ et conclure.
b) Poser $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)e^{inx} = g(x)$ et montrer que $f = g$.
c) Montrer que $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout n différent de 0.

Indication 2.3.4

(1) Cf. cours.
(2) Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{in(t-u)}f(e^{iu})\,\mathrm{d}u = a_n e^{int}$ si $n \geqslant 0$, 0 si $n < 0$. Développer de la même manière $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_r(t-u)f(e^{iu})\,\mathrm{d}u$.

Indication 2.3.5

(1) Cf. cours

(2) Écrire $\frac{2z}{z^2-n^2} = -2z\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{z^{2h}}{n^{2h+2}}$ et utiliser le théorème d'interversion des sommations. Poser ensuite $z = \frac{t}{2\pi}i$.

(3) Faire le produit de Cauchy des séries $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k\frac{t^k}{k!}$ par $e^t - 1$. On obtient les résultats $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$, $\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$, $\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}$.

Indication 2.3.6

(1) Écrire la formule de Parseval pour f et f' et remarquer que $\widehat{f'}(n) = \frac{i2\pi n}{p}\widehat{f}(n)$.

(2) Montrer que $p \geqslant \int_0^p \left(\dfrac{2\pi}{p}f(t) - g'(t)\right)^2 \mathrm{d}t + \int_0^p \dfrac{4\pi}{p}f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. On a égalité ssi $\frac{2\pi}{p}f - g' = 0$ et $f(t) = a\cos\frac{2\pi t}{p} - b\sin\frac{2\pi t}{p}$ et on intégre.

(3) Prendre $f_0(t) = f(t) - \widehat{f}(0)$ et remarquer que $\int_0^p f_0(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^p f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

(4) On vient de prouver l'inégalité isopérimétrique ainsi que le cas d'égalité.

Indication 2.3.7

(1) Poser $f(x) = \frac{\sin ax}{e^x-1}$, $f_N(x) = \sin ax\sum_{n=1}^{N} e^{-nx}$, $r_N(x) = f(x) - f_N(x)$ et $I_N(a) = \int_0^{+\infty} f_N(x)\,\mathrm{d}x$, montrer que $|r_N(x)| \leqslant \left|\frac{\sin ax}{1-e^{-x}}\right| e^{-(N+1)x}$ et en déduire que $\lim_{N\to+\infty} I_N(a) = I(a)$. Conclure.

(2) Montrer que $\operatorname{ch} at = \operatorname{sh}(a\pi)\left(\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}(-1)^n\cos nt + \frac{1}{a\pi}\right)$ et en déduire que $I(a) = \frac{\pi}{2}\left[\coth a\pi - \frac{1}{a\pi}\right]$.

Indication 2.3.8

(1) Si V est un majorant de $|v_{n-p}|$ montrer que $\sum_{p=-n}^{n}|u_pv_{n-p}| \leqslant V\sum\limits_{p=-n}^{n}|u_p|$ et conclure.

(2) Se ramener au cas où u_p et v_p sont positifs et montrer que $\sum_{n=-N}^{N} w_n \leqslant V\sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p$.

(3) Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{U}(x)V(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \sum_{p\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{U}(p)}\widehat{Ve_{-n}}(p)$ en notant $e_{-n}(x) = e^{-inx}$ et conclure à la première égalité. Poser ensuite $W(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} w_ne^{inx}$ et montrer que $W(x) = \overline{U(x)}V(x)$.

Indication 2.3.9

(1) On a immédiatement $e^{te^{i\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n!}e^{in\theta}$ et on applique la formule de Parseval.

(2) Utiliser $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + o(\theta^4)$ pour obtenir l'inégalité puis l'intégrer et majorer l'intégrale $\int_0^{\delta\sqrt{t}(1-\varepsilon)} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ par $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. On obtient alors $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}(1-\varepsilon) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}\frac{1}{1-\varepsilon}$.

Écrire ensuite que $I(t) = \int_0^{\delta} e^{2t\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_{\delta}^{\pi} e^{2t\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$, majorer la deuxième intégrale par $\pi e^{2t\cos\delta}$ et en déduire que $I(t) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}$.

Pour terminer, remarquer que $f(x) = \frac{1}{\pi}I(\sqrt{x})$.

Indication 2.3.10

(1) Il suffit d'écrire Parseval avec la dérivée φ de f.

(2) Montrer que $\pi^2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2a_n^2\right) = 4\int_0^{\pi}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t.\int_0^{\pi}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t$ puis remarquer que $f^2(x) = f^2(0) + 2\int_0^x f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ et qu'il existe $x_0 \in]0,\pi[$ tel que $f(x_0) = 0$. On a alors $f(0)^4 < \pi^2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2a_n^2\right)$.

(3) Appliquer le résultat précédent au polynôme trigonométrique $f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n\cos nx$ et passer à la limite.

1. Solutions

Solution 1.1.1

(1) $R = 1$ en utilisant le *théorème 7.4 page 282.*

(2) $R = 1$ car si $0 < x < 1$ alors, en écrivant $u_n x^n = \exp(n \ln x + \sqrt{n} \ln n)$, on a $n \ln x + \sqrt{n} \ln n = n[\ln x + \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}] \to -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n x^n = 0$ soit $R \geqslant 1$ (*remarque 7.1.3 (vi) page 282*). Puis, comme $u_n \to +\infty$, $\sum u_n$ diverge donc $R \leqslant 1$.

(3) $R = 1$. On a en fait la somme de deux séries, pour n pair et n impair. $\sum 2px^{2p}$ et $\sum \dfrac{x^{2p+1}}{2p+1}$ convergent pour $|x| < 1$ donc leur somme converge pour $|x| < 1$ d'où $R \geqslant 1$ (définition du rayon de convergence, cf. *théorème 7.2 page 281*). $\sum u_n$ diverge (u_n ne tend pas vers 0) donc $R \leqslant 1$.

(4) $R = 1$ car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 2 - \sqrt[n+1]{2} \to 1$ et on applique le *théorème 7.4 page 282.*

(5) $R = 0$ car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \times (n+1) \to +\infty$ vu que $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \to e$ (prendre le logarithme–ou appliquer le résultat de l'exemple d'*application page 250*).

(6) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (2 + \dfrac{1}{n})\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} \to \dfrac{2}{e}$ d'où $R = \dfrac{e}{2}$ en appliquant le *théorème 7.4 page 282.*

(7) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \sim \dfrac{2}{27}\dfrac{(n+1)^{2n}}{n^{2n}} \sim \dfrac{e^2}{27}$ d'où $R = \dfrac{27}{e^2}$ en appliquant le *théorème 7.4 page 282.*

(8) $R = 1$ car

$$\frac{1}{e(n+1)} = \frac{1}{e}\int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n e^{-t} \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

et la série entière $\sum \dfrac{z^n}{n+1}$ a un rayon de convergence égal à 1. On a donc $R \leqslant 1$ avec la première inégalité et $R \geqslant 1$ avec la deuxième (cf. *remarque 7.1.3 (i) page 282*).

(9) On se ramène à l'étude de la série : $\sum\limits_{p=0}^{+\infty} p! x^{p^2}$ or $\dfrac{a_{p+1}}{a_p} = (p+1)x^{2p+1}$ si on prend $a_p = p! x^{p^2}$. On utilise ensuite la règle de d'Alembert (*application (i) page 241*) pour conclure que $R = 1$.

Solution 1.1.2

(1) $RR' \leqslant R''$ en effet si $|z| < RR'$ alors, en écrivant $|z| = xx'$ où $x < R$ et $x' < R'$, on a $a_n b_n |z|^n = a_n x^n . b_n x'^n \to 0$ car $a_n x^n$ et $b_n x'^n$ tendent vers 0. On utilise la remarque 7.2.3 (*vi*) page 283. $R'' \geqslant |z|$ pour tout z de module $< RR'$ ce qui permet de conclure. On n'a pas d'égalité avec, par exemple : $a_n = 1 + (-1)^n$, $b_n = a_{n+1}$, $R = R' = 1$, $a_n b_n = 0$ donc $R'' = +\infty$.

(2) $R = R'$, c'est la *remarque 7.1.3 (ii) page 282.*

(3) $R'' = \sqrt{R}$ en effet si $|z| < \sqrt{R}$ alors les deux séries $\sum a_p z^{2p}$ et $\sum b_n z^{2p+1}$ convergent et si $|z| > \sqrt{R}$, $a_p z^{2p}$ ne tend pas vers 0 (sinon le rayon de convergence de $\sum a_p z^p$ serait supérieur à R, cf. *remarque 7.1.3 (vi) page 282*).

Solution 1.2.1 On développe en série entière : $I = \sum\limits_{p=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{p-1}}{2p(2p)!}$; la valeur approchée sera obtenue en calculant 5 termes.

Solution 1.2.2 $f(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x^2} - \dfrac{1}{x} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n+2}$ d'où $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n(n+1)}$ pour $t \in [0,1[$. f est positive et $\displaystyle\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$ admet une limite quand $t \to 1$ donc f est intégrable sur $[0,1[$ et $I = 1$.

Solution 1.2.3 $\dfrac{x^2 \ln x}{1-x} = \sum\limits_{n=1}^{N} x^{n+1} \ln x + x^{N+1} h(x)$ où $h(x) = \dfrac{x \ln x}{1-x}$ est continue sur $[0,1]$ d'où

$$\left| I + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+2)^2} \right| \leqslant \sup_{x \in [0,1]} |h(x)| \frac{1}{N+2}.$$

On trouve alors $I = \dfrac{5}{4} - \dfrac{\pi^2}{6}$ en utilisant la relation $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Solution 1.2.4 $t = \dfrac{1}{u}$; $I = -\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et on procède comme au n$^\circ$ précédent. Pour avoir la précision demandée, il faut aller jusqu'à $n = 158$.

Solution 1.2.5

(1) $a_{2p} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\cdots)(\alpha-2p+1)}{(2p)!}(-1)^p x^{2p}$ obtenu à partir d'une équation différentielle portant sur $f(x) = (1+x^2)^{\alpha/2} \cos(\alpha \operatorname{Arctan} x)$ ou en remarquant que si on pose $g(x) = (1+x^2)^{\alpha/2} \sin(\alpha \operatorname{Arctan} x)$ et $F(x) = f(x) + ig(x)$ alors $(1+ix)F'(x) = i\alpha F(x)$ et donc $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{2n} (ix)^{2n}$.

(2) $a_{4n} = (-1)^n \dfrac{4^n}{(4n)!}$ En effet, si on écrit que

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x \cos x &= \frac{(e^x + e^{-x})(e^{ix} + e^{-ix})}{4} = \frac{1}{4}[(e^{(1+i)x} + e^{-(1+i)x}) + (e^{(1-i)x} + e^{-(1-i)x})] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^{2n}}{(2n)!} x^{2n} \end{aligned}$$

et comme $(1+i)^2 = 2i$ et $(1-i)^2 = -2i$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2i)^n + (-2i)^n}{(2n)!} x^{2n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 4^p}{(4p)!}$$

car les termes correspondant à n impair se simplifient.

(3) On vérifie que f est la solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' + xy' - k^2 y = 0$$

satisfaisant les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = k$. On trouve alors

$$a_{2n} = \frac{k^2(k^2-2)(\cdots)(k^2-(2n-2)^2)}{(2n)!} \ ; \ a_{2n+1} = \frac{(k^2-1)(\cdots)(k^2-(2n-1)^2)}{(2n+1)!}.$$

(4) Écrire $f(x) = \operatorname{Arctan} 2 - \operatorname{Arctan} 2x$ en utilisant la formule d'addition des Arctangentes (cf. *question (i) page 37*). On a alors $f(x) = \operatorname{Arctan} 2 - \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$, $R = \frac{1}{2}$ mais la formule n'est valable que pour $x > -1/4$.

(5) On a, pour $|x| < 1$,

$$\ln(1 + x\sin^2 t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \sin^{2n+2} t.$$

Or la série mise ainsi en évidence converge normalement pour $t \in [0, 2\pi]$ donc, grâce au *théorème 5.55 page 253* on peut intégrer terme à terme d'où

$$\int_0^{2\pi} \ln(1 + x\sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \int_0^{2\pi} \sin^{2n+2} t\,\mathrm{d}t.$$

On utilise alors les intégrales de Wallis pour conclure $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} . \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} 2\pi$.

(6) La dérivée de $(\operatorname{Arcsin} x)^2$ vaut $2\frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}$. On reprend alors les calculs faits à l'occasion de la *question (iii) page 87* et en intégrant la série entière obtenue (de rayon de convergence 1) on trouve

$$a_{2n} = \frac{2^{2n-2}[(n-1)!]^2}{n(2n-1)!}.$$

(7) On a $f'(x) = \frac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{i\alpha}}{1 - xe^{i\alpha}} - \frac{e^{-i\alpha}}{1 - xe^{-i\alpha}}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin(n+1)\alpha$ dont le rayon de convergence est 1 en général. En intégrant le développement obtenu, on obtient :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} x^n.$$

(8) $f(x) = e^{-x^2/2} \int_0^x e^{t^2/2}\,\mathrm{d}t$ est l'unique solution de l'équation différentielle $y' + xy = 1$ vérifiant $y(0) = 0$. En pratiquant la méthode décrite au ***c)** page 285* on obtient $a_n = (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n+1)!}$.

(9) On utilise le développement du 7, on écrit

$$\frac{t\sin t}{1 - 2x\cos t + x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n t \sin(n+1)t$$

et comme, pour $|x| < 1$, la série obtenue converge normalement pour $t \in [0, \pi]$ donc grâce au *théorème 5.55 page 253* on peut intégrer terme à terme d'où

$$x \int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{x^2 - 2x\cos t + 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_0^{\pi} t\sin(n+1)t\,\mathrm{d}t.$$

et, en intégrant par partie on trouve finalement $a_n = \pi\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Le rayon de convergence vaut 1.

(10) f est l'unique solution de l'équation différentielle : $(x^2 - 1)y'' + xy' - \alpha^2 y = 0$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = \alpha$.

On trouve alors $a_{2n+1} = \dfrac{((2n-1)^2-\alpha^2)(\cdots)(1-\alpha^2)}{(2n+1)!}\alpha$ avec un rayon de convergence égal à 1 (faire le rapprochement avec le numéro 3).

(11) $\dfrac{1}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2} = \dfrac{1}{2\operatorname{sh}\alpha}\left[\dfrac{e^{\alpha}}{1-xe^{\alpha}} - \dfrac{e^{-\alpha}}{1-xe^{-\alpha}}\right] = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n \dfrac{\operatorname{sh}(n+1)\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}$ et le rayon de convergence vaut 1.

(12) On remarque tout d'abord que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1-2x\cos t+x^2)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos t+x^2)\,\mathrm{d}t$.
Puis, comme $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln(1-2x\cos t+x^2) = \dfrac{2x\sin t}{1-2x\cos t+x^2}$ alors, en intégrant par parties on obtient

$$2\int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos t+x^2)\,\mathrm{d}t = 2\pi\ln(1-x) - 4x\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{x^2-2x\cos t+1}\,\mathrm{d}t.$$

et on conclut avec le 9 (on a la fonction nulle...). On connaît en fait ce résultat qui est classique.

Solution 1.2.6

(1) Comme $|\sin(a^n x)| \leqslant a^n.|x|$ la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sin(a^n x)$ converge normalement sur tout intervalle $[-M, M]$ de $\mathbb{R}$. Sa somme est en particulier continue sur $\mathbb{R}$ (cf. *théorème 5.48 page 249* et le *théorème 5.51 page 250*).

(2) On a

$$(C) \qquad f(x) - f(ax) = \sin x,\ f(0) = 0,\ f \text{ continue en } 0.$$

f est caractérisé par (C) (en effet, on prouve par récurrence que $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{N}\sin(a^n x) + f(a^N x)$, la continuité en 0 permet de conclure).

Analyse : si g est la somme d'une série entière au voisinage de 0 vérifiant les conditions (C) alors en écrivant

$$g(x) - g(ax) = \sum_{n=0}^{+\infty}(1-a^n)a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{1}{(2p+1)!}x^{2p+1}$$

on obtient, par unicité du D.S.E. (*proposition 7.1.1 page 284*), $a_{2p} = 0$, $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p}{(2p+1)!(1-a^{2p+1})}$, ce qui fournit une série entière de rayon de convergence infini.

Synthèse : si on pose $g(x) = \sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^p}{(2p+1)!(1-a^{2p+1})}x^{2p+1}$, fonction définie sur $\mathbb{R}$, alors g vérifie les conditions (C) donc $g = f$ c.q.f.d.

(3) On a $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\dfrac{a^{n(2p+1)}}{(2p+1)!}x^{2p+1}\right)$. Si on pose $u_{n,p} = (-1)^p\dfrac{a^{n(2p+1)}}{(2p+1)!}x^{2p+1}$, alors $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}|u_{n,p}| = \operatorname{sh}(a^n|x|)$ et la série $\sum\operatorname{sh}(a^n|x|)$ converge donc on peut appliquer le théorème d'interversion des sommations (*théorème 5.47 page 247*) d'où

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{1}{(2p+1)!} x^{2p+1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(a^{2p+1}\right)^n\right) \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)!(1-a^{2p+1})}
\end{aligned}
$$

Solution 1.2.7

(1) $R = 1$: on pose $x^4 = y$ et on utilise le *théorème 7.4 page 282*. La somme $S(x)$ vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n}}{4n+1} = \frac{1}{4x}\left(2\operatorname{Arctan} x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)$$

car $(xS(x))' = \dfrac{1}{1-x^4} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{1}{1+x^2}\right)$.

(2) $R = 1$: on pose $x^2 = y$ et on utilise le *théorème 7.4 page 282*. La somme $S(x)$ vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{4n^2-1} = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{Arctan} x + \frac{x}{2}$$

car, en écrivant $\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$ alors $S(x) = \dfrac{1}{2}(S_1(x) + S_2(x))$ où $S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{2n-1}$ et $S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. On a alors $S_1(x) = x + x^2 S_2(x)$ et $S_2(x) = \operatorname{Arctan} x$ (voir les *exemples de D.S.E. page 285* ou dériver S_2) d'où le résultat annoncé.

(3) $R = 1$ et la somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)x^n = \dfrac{e^x}{1-x}$ car on a reconnu un produit de Cauchy d'une série de somme $\dfrac{1}{1-x}$ et de rayon de convergence égal à 1 et de la série exponentielle, ce qui entraîne dans un premier temps que $R \geqslant 1$ (cf. *théorème 7.5 page 283*) et comme $1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} \to e$, la série $\sum 1 + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ diverge donc $R \leqslant 1$.

(4) $R = 1$ (on utilise le *théorème 7.4 page 282*). Pour le calcul de la somme, on pose $x = y^3$ alors $\left(\dfrac{1}{y^2}S(y^3)\right)' = \dfrac{1}{1-y^3}$ et on intègre avec un logiciel de calcul formel d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{3n+2} = \frac{1}{6x^{2/3}}\left[\ln\frac{1-x}{(1-x^{1/3})^3} - 2\sqrt{3}(\operatorname{Arctan}\frac{2x^{1/3}+1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6})\right].$$

MAPLE donne directement pour la somme $1/2$ *hypergeom*$([1, 2/3], [5/3], x)$...

(5) $R = 1$ car $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ est la somme de deux séries, partie paire et impaire de rayon 1 et on utilise la *remarque 7.1.5 (iii) page 283*.

Pour le calcul de la somme, on écrit donc $S(x) = S_1(x) + S_2(x)$ où

$$S_1(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1} \cos\left(\frac{\pi}{4} + p\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$$

$$S_2(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{2p} \cos\left(\frac{\pi}{4} + p\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p-1} \frac{x^{2p}}{2p}$$

d'où, en utilisant le *tableau des D.S.E. page 285*, $S(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{Arctan} x + \ln(1+x^2))$.

(6) $R = 1$ en général car la résolution de la récurrence donne $a_n = \alpha + \beta j^n + \overline{\beta} j^{2n}$ et donc la série est la somme de trois séries entières de rayon égal à 1, son rayon est $\geqslant 1$ (*théorème 7.5 page 283*) et comme (a_n) ne tend pas vers 0, son rayon est $\leqslant 1$.

Pour le calcul de la somme, l'astuce est de multiplier $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ par le polynôme $1 - 2x + 2x^2 - x^3$, tous les termes de degré $\geqslant 3$ s'annulent et on trouve finalement

$$S(x) = \frac{a_0 + (a_1 - 2a_0)x + (a_2 - 2a_1 + 2a_0)x^2}{1 - 2x + 2x^2 - x^3}.$$

On pouvait aussi utiliser la formule donnant a_n en fonction de n mais les calculs sont plus pénibles.

Solution 1.2.8 On vérifie par récurrence que, si $M = \max(|u_0|, |v_0|)$, alors $|u_n| \leqslant 5^n M_0$ et $|v_n| \leqslant 5^n M$ donc $R = +\infty$.

On dérive s et t et on arrive au système différentiel

$$\begin{aligned} s'(x) &= s(x) + 4t(x) \\ t'(x) &= s(x) + t(x). \end{aligned}$$

On peut utiliser les résultats du chapitre 8 sur les équations différentielles mais un petit bricolage permet d'en faire l'économie. En effet le système précédent est équivalent à

$$\begin{gathered} s'(x) + 2t'(x) = 3(s(x) + 2t(x)) \\ s'(x) - 2t'(x) = -(s(x) - 2t(x)) \end{gathered}$$

d'où $s(x) + 2t(x) = \lambda e^{3x}$ et $s(x) - 2t(x) = \mu e^{-x}$ soit

$$s(x) = \frac{1}{2}[\lambda e^{3x} + \mu e^{-x}] \text{ et } t(x) = \frac{1}{4}[\lambda e^{3x} - \mu e^{-x}].$$

Solution 1.2.9

(1) On a : $1 \leqslant a_n \leqslant (n+1)^3$ d'où $R = 1$ car $\sum x^n$ et $\sum (n+1)^3 x^n$ ont un rayon de convergence égal à 1 (on utilise le *théorème 7.4* et la *remarque 7.1.3 (i) page 282*).

(2) Faire le produit de Cauchy de $\dfrac{1}{1-u}$ par $\dfrac{1}{1-u}$ et par $\dfrac{1}{1-u^2}$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{x+y+2z=n} u^x u^y u^{2z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n \\ &= \frac{1}{1-u^2} \frac{1}{(1-u)^2} \end{aligned}$$

Pour calculer a_n, on remarque que $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ puis en multipliant les deux membres de l'égalité ci-dessus par $1 - u^2$ et en identifiant les coefficients de u^n pour $n \geqslant 2$ on a $a_n = a_{n-2} + n + 1$ d'où $a_{2p} = (p+1)^2$ et $a_{2p+1} = (p+1)(p+2)$.

Solution 1.2.10

(1) Lorsqu'on forme un composé : $(a_1 \dots a_n)$ on place la parenthèse fermant la première après un élément : soit a_k cet élément, le composé s'écrit $(a_1 \dots a_k)(a_{k+1} \dots a_{n+1})$ ce qui donne $P(k) \times P(n+1-k)$ choix ; en choisissant les n emplacements pour k, on obtiendra ainsi tous les composés possible de $n+1$ éléments. La relation est alors immédiate.

(2) En faisant le produit de Cauchy de S par elle même, la série $S^2(x)$ admet le développement

$$S^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} P(k)P(n-k) \right) x^n$$

(où l'on a posé pour plus de commodité $P(0) = 0$). Il suffit maintenant d'utiliser la remarque précédente et la relation du 1. pour conclure.

(3) Pour $|x| < \dfrac{1}{4}$ on sait que $S(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$ (on a résolu l'équation !). Comme $P(0) = 0$, nécessairement, on aura $S(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$. Il suffit maintenant d'écrire le D.S.E. de S :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-4x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} (-4x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1/2(-1/2)[\dots](1/2-n+1)}{n!} (-1)^n 4^n x^n \\
&= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2(2n-2)!}{4^n n!(n-1)!} x^n
\end{aligned}$$

d'où $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n$ et la relation $P_n = \dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$ grâce à l'unicité du développement en série entière (*proposition 7.1.1 page 284*).

La justification a posteriori peut se faire de la façon suivante : on considère la série entière $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} x^n$ qui a un rayon de convergence égal à $\dfrac{1}{4}$. Elle vérifie $S^2(x) - S(x) + x = 0$ (car on connaît sa somme) et donc le coefficient de x^n (que l'on peut appeler $Q(n)$) va vérifier $Q(n+1) = \sum\limits_{k=1}^{n} Q(k)Q(n+1-k)$. Comme (avec $Q(1) = P(1) = 1$), on a unicité des nombres qui interviennent, on aura donc $P(n) = Q(n)$ et surtout, le rayon de convergence de la série du 1. est strictement positif, ce qui justifie bien les calculs.

Solution 1.2.11

(1) On trouve $R = 1$: en effet, si $u_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ alors $u_n = g_n(u_{n-1})$ où g_n est définie par $g_n(x) = 1 - \dfrac{1}{2nx}$. g_n est croissante et pour $n \geqslant 3$, on a $g_n([3/4, 1]) \subset [3/4, 1]$. Vu que $u_2 = \dfrac{3}{4}$ alors, on en déduit que pour tout n, $u_n \in [3/4, 1]$ puis, pour $n \geqslant 3$:

$$1 - \frac{2}{3n} \leqslant u_n \leqslant 1$$

car $\dfrac{1}{2nu_{n-1}} \leqslant \dfrac{2}{3n}$. On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1$ et on utilise le *théorème 7.4 page 282*.

(2) On trouve $p(x) = 1 - \dfrac{x}{2}$, ce qui permet de déterminer S unique solution de l'équation différentielle $(1-x)y' - (1-\dfrac{x}{2})y = 0$ vérifiant $y(0) = 1$: $S = \dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{1-x}}$.

(3) Connaissant S, on en déduit $a_n = \dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{(2p)!}{2^p(n-p)!(p!)^2}$ en faisant le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{2^n n!}$ par $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$.

Solution 1.2.12

(1) Soit $x \in E$ et $\mathcal{A}$ une partition de E, on peut raisonner sur le nombre d'éléments de A_x où A_x est le seul ensemble de la partition $\mathcal{A}$ qui contient x :

si $\mathrm{Card}(A_x) = n-k+1$ le nombre de partitions correspondantes sera :

$$\binom{n}{n-k} P_k = \binom{n}{k} P_k$$

car on a $\binom{n}{n-k}$ possibilités pour choisir $n-k$ éléments de E complétant A_x et P_k partitions des k éléments restant (les cardinaux se multiplient).

D'où la relation en additionnant les cas rencontrés.

(2) On peut réécrire la relation de récurrence sous la forme

$$\frac{P_{n+1}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k}{k!}\frac{1}{(n-k)!}.$$

Soit $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P_n}{n!} x^n$, montrons que son rayon de convergence est > 0. Pour cela, on va prouver par récurrence que $P_n \leqslant n^n$. On a $P_0 = 1$, $P_1 = 1$ donc l'inégalité est bien satisfaite aux premiers rangs. À l'ordre $n+1$, on a

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^k \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^k = (n+1)^n \leqslant (n+1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Si on pose $a_n = \dfrac{P_n}{n!}$ et $b_n = \dfrac{n^n}{n!}$ alors $a_n \leqslant b_n$ donc $R(\sum a_n x^n) \geqslant R(\sum b_n x^n) =\geqslant \dfrac{1}{e}$ (cf. *remarque 7.1.3 (i) page 282*).

La relation se traduit alors par un produit de Cauchy de 2 séries entières d'où

$$R(x)e^x = R'(x) \Rightarrow R(x) = \frac{e^{e^x}}{e}$$

car $R(0) = 1$.

On développe alors $R(x)$:

$$\begin{aligned} R(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(kx)^n}{n!} \\ &= \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}\right) x^n \end{aligned}$$

d'où le résultat $P_n = \dfrac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{k^n}{k!}$.

Solution 1.2.13

(1) Comme $\left|\dfrac{\cos t}{(t^2+x^2)^n}\right| \leqslant \dfrac{1}{(t^2+a^2)^n}$ pour $x \in [a,b] \subset]0,+\infty[$, alors on a l'hypothèse de domination du *théorème 6.24 page 267*. $f_n : (t,x) \mapsto \dfrac{\cos t}{(t^2+x^2)^n}$ est une fonction continue pour $(t,x) \in [0,+\infty[\times[a,b]$ ce qui permet de conclure à la continuité de F_n sur tout intervalle $[a,b] \subset]0,+\infty[$.
Conclusion : on a la continuité de F_n sur $]0,+\infty[$.
De même, comme $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,t) = -2nx\dfrac{\cos t}{(t^2+x^2)^{n+1}}$, la démonstration précédente s'applique (on borne $\dfrac{\partial f_n}{\partial x}(x,t)$ par $\dfrac{2nb}{(t^2+a^2)^{n+1}}$) ce qui, grâce au *théorème 6.26 page 268*, nous assure de la dérivabilité de F_n sur tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$ donc sur $]0,+\infty[$. De plus on a

$$F_n'(x) = \int_0^{+\infty} -2nx\frac{\cos t}{(t^2+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = -2nxF_{n+1}(x).$$

(2) On intégre par parties 2 fois et on trouve :

$$F_n(x) + 2n(2n+1)F_{n+1}(x) - 4n(n+1)x^2F_{n+2}(x) = 0.$$

En effet, $F_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^n}$ donc

$$\begin{array}{ll} \mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t & u = \sin t \\ v = \dfrac{1}{(t^2+x^2)^n} & \mathrm{d}v = \dfrac{-2nt\,\mathrm{d}t}{(t^2+x)^{n+1}} \end{array}$$

d'où $F_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} v\,\mathrm{d}u = \underbrace{\left[\frac{\sin t}{(t^2+x^2)^n}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + 2n\int_0^{+\infty}\frac{t\sin t}{(t^2+x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$ et on recommence

$$\begin{array}{ll} \mathrm{d}u = \sin t\,\mathrm{d}t & u = -\cos t \\ v = \dfrac{t}{(t^2+x^2)^{n+1}} & \mathrm{d}v = \dfrac{-2(n+1)t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2+x)^{n+2}} + \dfrac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^{n+1}} \end{array}$$

ce qui donne finalement le résultat annoncé (la partie toute intégrée $[uv]$ s'annule là aussi).

(3) Comme $F_n'(x) = -2nxF_{n+1}(x)$ alors F_n' est dérivable et

$$F_n''(x) = -2nF_{n+1}(x) - 2n(2n+2)x^2F_{n+2}(x)$$

d'où $xF_n''(x) = F_n'(x) + x(F_n(x) + 2n(2n+1)F_{n+1}(x)) = -2nF_n'(x) + xF_n(x)$.

(4) On remarque alors que : $x^{2n-1}F_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ux\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^n}$ pour $x > 0$ (on a posé $u = \dfrac{t}{x}$).
Or $\left|\dfrac{\cos ux}{(1+u^2)^n}\right| \leqslant \dfrac{1}{(1+u^2)^n}$ fonction intégrable sur $[0,+\infty[$. On peut utiliser le théorème de convergence dominée (*théorème 6.22 page 266*) d'où :

$$\lim_{x\to 0} x^{2n-1}F_n(x) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^n} = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n-2}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2}\frac{\pi}{2} = a_0$$

en utilisant les intégrales de Wallis.

Solution 1.2.14

(1) • Continuité : soit $g(x,t) = \dfrac{t^x}{1+t}$ alors, par les théorèmes généraux, g est continue pour $(x,t) \in]-1,+\infty[\times]0,1]$.
Soit $a > -1$ alors, pour $x \geqslant a$ on a $g(x,t) \leqslant \dfrac{t^a}{1+t}$ qui est intégrable donc le théorème de continuité sous le signe intégral (*théorème 6.24 page 267*) s'applique. f est donc continue sur $[a,+\infty[$ et ceci pour tout $a > -1$ donc f est continue sur $]-1,+\infty[$.

• Pour la dérivabilité, on a $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t^x \ln t}{1+t}$ qui, avec les mêmes arguments que pour g, est continue sur $]0,1]\times]-1,+\infty[$. On utilise ici la majoration $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{t^a|\ln t|}{1+t}$ et on utilise alors le théorème de Leibniz pour dériver (*théorème 6.26 page 268*).

(2) On développe en série :

$$g(x,t) = \frac{e^{x\ln t}}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k(\ln t)^k}{k!(1+t)}$$

or si on pose $I_k = \dfrac{x^k}{k!}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{1+t}\,\mathrm{d}t$ on a

$$\begin{aligned} |I_k| &\leqslant \frac{|x|^k}{k!}\int_0^1 \frac{|\ln t|^k}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{|x|^k}{k!}\int_0^1 |\ln t|^k\,\mathrm{d}t \leqslant |x|^k \end{aligned}$$

car, en intégrant par parties $\displaystyle\int_0^1 |\ln t|^k\,\mathrm{d}t$, on peut majorer cette intégrale par $k!$. On peut alors utiliser le théorème d'intégration terme à terme d'une série (*théorème 5.55 page 253*) qui nous donne, pour $|x| < 1$

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{x\ln t}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(3) Pour le dernier développement, on écrit

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^n + \frac{(-1)^{N+1}t^{N+1}}{1+t}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n t^{n+x}\,\mathrm{d}t + r_N$$

où $|r_N| = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{N+1+x}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{N+2+x}$ tend vers 0. Par passage à la limite, on obtient immédiatement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1}.$$

Ce résultat permet aussi de prouver la dérivabilité de f : on écrit $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ où $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x+1}$. Or $|f_n'(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$ et $x > -1$ donc, comme la série des dérivées converge normalement et que la série converge simplement, on peut dire que f est dérivable (cf. *corollaire 5.59 page 254*). Il en est de même pour les dérivées successives de f pour $x > -1$.

On pouvait aussi utiliser le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions (*théorème 6.23 page 267*) en écrivant le développement suivant :

$$\frac{t^x}{1+t} = \sum_{p=0}^{+\infty} t^{2p+x}(1-t)$$

et en remarquant que la série $\sum I_p$ où $I_p = \displaystyle\int_0^1 t^{2p+x}(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2p+1+x} - \frac{1}{2p+2+x}$ convergeait (série aux différences).

Remarque : la dernière formule permet de prolonger f à $\mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N}^*)$.

Solution 2.1.1

- Lorsque que la fonction f est impaire on sait que les $a_n(f)$ sont tous nuls (*remarque 7.2.4 (ii) page 288*) et les $b_n(f)$ se calculent par la formule

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

(cf. *définition 7.2.1 page 287* et utiliser la parité des fonctions intégrées). Les calculs donnent alors

a) $\displaystyle\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2-1/4}\sin nt$.

b) $\displaystyle\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin nt$.

c) $\displaystyle\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}\operatorname{sh}\pi\sin nt$.

d) $\displaystyle -2\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nt - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^3}\sin(2p+1)t$.

Les séries ne convergent pas normalement car les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux mais ne sont pas continues (en π pour les exemples a,b,d et en 0 pour c). Le *théorème 7.16 page 292* s'applique et les sommes sont égales à $f(t)$ sauf en $t_0 = \pi$ (a,b,d) ou en $t_0 = 0$ (c) où elles valent $\frac{1}{2}[f(t_0^+) + f(t_0^-)] = 0$.

- Lorsque que la fonction f est paire on sait que les $b_n(f)$ sont tous nuls (*remarque 7.2.4 (i) page 288*) et les $a_n(f)$ se calculent par les formules

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

(cf. *définition 7.2.1 page 287* et utiliser la parité des fonctions intégrées). Les calculs donnent alors

a') $\displaystyle\frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1/4}\cos nt$.

b') $\displaystyle\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos nt + \frac{2}{\pi}$.

c') $\displaystyle\frac{1+\operatorname{ch}\pi}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^n\operatorname{ch}\pi}{n^2+1}\cos nt$.

d') $\displaystyle 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt + \frac{\pi^2}{3}$.

Les séries convergent normalement car les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et elles sont continues. Le *théorème 7.15 page 292* s'applique et les sommes sont toutes égales à $f(t)$ pour t réel.

Solution 2.1.2

(1) Lorsque que la fonction f est paire on sait que les $b_n(f)$ sont tous nuls (*remarque 7.2.4 (i) page 288*) et les $a_n(f)$ se calculent par les formules
$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et } a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$
cf. exercice 2.1.1. On trouve : $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{\pi}{2}$, $c = \frac{\pi^2}{6}$.

(2) f étant continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le *théorème 7.15 page 292* s'applique et on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Solution 2.2.1

(1) En utilisant les mêmes arguments que pour l'exercice 2.1.1, on a la convergence normale de la série
$$S_f = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(2p+1)t}{(2p+1)^3}$$
donc $S_f = f$.

(2) g est 2π-périodique, on obtient alors sa série de Fourier en intégrant 2 fois :
$$S_g = -\frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin(2p+1)t}{(2p+1)^5} = \frac{\pi}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^4 - \frac{\pi^3}{12}t.$$
En effet, à chaque fois on a convergence normale de la série à intégrer donc le *théorème 5.55 page 253* s'applique. Cette méthode est préférable à celle qui consisterait à déterminer explicitement g et à calculer les coefficients de Fourier de g.

(3) En appliquant la formule de Parseval (*corollaire 7.13 page 291*) on obtient
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$
et, comme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} + \frac{1}{2^6}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$ on obtient
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$
On procède de même avec g pour trouver : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^{10}} = \frac{31\pi^{10}}{2903040}$.

Solution 2.2.2

(1) cf. le n$^\circ$ 2.2.1

(2) Avec $x = \frac{\pi}{2}$, on trouve $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$, la deuxième somme s'obtient avec Parseval, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

Solution 2.3.1 On utilise l'*exemple (v) page 293* donc, en posant $z = e^{it}$ on obtient $f(t) = \dfrac{2z}{z^2 + 2z \operatorname{ch} a + 1} = \dfrac{1}{\operatorname{sh} a}\left[\dfrac{e^a}{z+e^a} - \dfrac{e^{-a}}{z+e^{-a}}\right]$, on écrit alors :

$$\frac{e^a}{z+e^a} = \frac{1}{1+ze^{-a}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^n e^{-na}$$

et

$$\frac{e^{-a}}{z+e^{-a}} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} e^{-na}\overline{z}^n$$

d'où

$$f(t) = \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-na}(z^n + \overline{z}^n)\right] = \frac{1}{\operatorname{sh} a}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n e^{-na}\cos nt\right].$$

L'intégrale demandée correspond à un coefficient près au coefficient de Fourier de f et vaut $\dfrac{2}{\operatorname{sh} a}(-1)^n e^{-na}\pi$.

Solution 2.3.2 On cherche le développement en série de Fourier de $|\sin x|$ qui est une fonction paire, de période π. Comme cette fonction est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le *théorème 7.15 page 292* s'applique et on a

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

On a alors pour tout x réel :

$$\begin{aligned}|\sin x| - |\sin 0| &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1} - \left(\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}\right)\\ &= \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin^2 kx}{4k^2-1}.\end{aligned}$$

Solution 2.3.3

(1) On applique la formule de Parseval (*corollaire 7.13 page 291*) à la fonction $x \mapsto f(x+h) - f(x-h)$ et, en posant $f_h(x) = f(x+h)$, on a :

$$I(h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x+h) - f(x-h)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f_h}(n) - \widehat{f_{-h}}(n)|^2$$

où $|\widehat{f_h}(n)|^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-int}f(t+h)\,\mathrm{d}t = e^{inh}\widehat{f}(n)$. D'où

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x+h) - f(x-h)|^2\,\mathrm{d}x = 4\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sin^2 nh.|\widehat{f}(n)|^2.$$

(2) Choisissons $|h| = \dfrac{\pi}{2^{k+1}}$ alors $\sin^2\dfrac{nh}{2^{k+1}} \geqslant \dfrac{1}{2}$ pour $|n| \in [2^{k-1}, 2^k]$ donc, en revenant à l'égalité ci-dessus, la somme est minorée par $2\displaystyle\sum_{2^{k-1}\leqslant|n|\leqslant 2^k}|\widehat{f}(n)|^2$ et comme $|f(x+h) - f(x-h)| \leqslant \omega(2h)$, l'intégrale est majorée par $\omega\left(\dfrac{\pi}{2^k}\right)$ d'où l'inégalité demandée.

(3) a) On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec

$$\left(\sum_{2^{k-1}<|n|\leqslant 2^k} |\widehat{f}(n)|\right)^2 \leqslant 2^k \left(\sum_{2^{k-1}<|n|\leqslant 2^k} |\widehat{f}(n)|^2\right)$$

(en écrivant $|\widehat{f}(n)| = |\widehat{f}(n)|\times 1$).

Donc il existe une constante K telle que $\sum\limits_{2^{k-1}\leqslant|n|\leqslant 2^k} |\widehat{f}(n)| \leqslant \dfrac{K}{2^{(2\alpha-1)k/2}}$.

Si on pose $J_p = \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leqslant |n| < 2^p\}$ alors

$$\sum_{n\in J_p} |\widehat{f}(n)| \leqslant \sum_{k=1}^{p} \underbrace{\frac{C\pi^\alpha}{2^{k(\alpha-1/2)}}}_{=a_k} + |c_0(f)|.$$

Comme la série $\sum a_k$ converge (a_k est une suite géométrique de raison < 1) alors la série $\sum \widehat{f}(n)$ converge.

b) Considérons la somme $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{inx} = g(x)$. g est continue et grâce à l'égalité de Parseval, on sait que $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0$ donc $f = g$ c.q.f.d.

c) On réécrit l'égalité obtenue au a), on majore toujours l'intégrale par $(\omega(h))^2 \leqslant C^2h^{2\alpha}$ et on écrit que l'on a $\sin^2 nh.|\widehat{f}(n)|^2 \leqslant C^2h^{2\alpha}$. En divisant par h^2 de chaque coté et en prenant la limite quand $h \to 0$, on trouve $\widehat{f}(n) = 0$ pour tout n différent de 0 c.q.f.d.

Remarque : ce dernier résultat est immédiat avec les dérivées. En effet, si $\alpha > 1$ alors $f' = 0$ donc f est constante !

Solution 2.3.4

(1) Comme $\dfrac{1+z}{1-z} = 1 + 2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} z^n$ alors, en posant $z = re^{it}$ et en prenant la partie réelle, on a :

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos nt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int}.$$

(2) La série de somme $f(e^{iu})$ convergeant normalement, on peut intervertir intégrale et sommation (cf. *théorème 5.55 page 253*) d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in(t-u)}f(e^{iu})\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} e^{in(t-u)}a_pe^{ipu}\right)\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty} a_pe^{int}\int_0^{2\pi} e^{i(p-n)u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

grâce à la convergence normale

$$= \begin{cases} a_ne^{int} & \text{si } n \geqslant 0\\ 0 & \text{si } n < 0\end{cases}$$

On développe ensuite de la même manière (toujours grâce à la convergence normale) $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-u)f(e^{iu})\,\mathrm{d}u$ pour trouver

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t-u)f(e^{iu})\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{int} = f(z)$$

où $z = re^{it}$.

On peut alors dire qu'il suffit de connaître la fonction f sur le cercle unité pour la connaître sur le disque unité.

Solution 2.3.5

(1) On pose $t = 2\pi x$ et on calcule les coefficients de Fourier de la fonction définie sur $]-\pi,+\pi[$ par $f(t) = \cos zt$; cette fonction étant continue, le théorème de Dirichlet nous donne la première égalité. En fait, comme la fonction cos est paire, on peut prolonger f à une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$, en prenant $x = \frac{1}{2}$, en rassemblant les coefficients de $e^{i2\pi nx}$ et ceux de $e^{-i2\pi nx}$ et en divisant par $\sin\pi z$, on trouve la deuxième relation. La dernière s'obtient en prenant $x = 0$ (cf. *question (i) page 294*). Il est à noter que chacune de ces séries converge absolument.

(2) On écrit $\frac{2z}{z^2-n^2} = -\frac{2z}{n^2}\frac{1}{1-z^2/n^2} = -2z\sum\limits_{h=0}^{+\infty}\frac{z^{2h}}{n^{2h+2}}$ qui converge absolument. Le théorème d'interversion des sommations (*théorème 5.47 page 247*) s'applique :

$$\begin{aligned}\pi\,\mathrm{cotan}\,\pi z - \frac{1}{z} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\sum_{h=0}^{+\infty}\frac{2z^{2h+1}}{n^{2h+2}}\right)\\ &= -2\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2k}}\right)z^{2k-1} \text{ en posant } k = h+1\\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty}2z^{2k-1}\zeta(2k).\end{aligned}$$

On écrit ensuite : $\pi z\,\mathrm{cotan}\,\pi z = 1 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty}2z^{2k}\zeta(2k)$ et on pose $z = \frac{t}{2\pi}i$ d'où

$$\frac{t}{2}\left[1+\frac{2}{e^t-1}\right] = 1 - 2\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}\zeta(2k)}{2^{2k}\pi^{2k}}.$$

(3) $\frac{t}{e^t-1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_{2k}\frac{t^{2k}}{(2k)!} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k\frac{t^k}{k!}$. On écrit alors que $t = \left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k\frac{t^k}{k!}\right).\left(\sum\limits_{h=1}^{+\infty}\frac{t^h}{h!}\right)$ ce qui fournit la relation.

On obtient enfin :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90},\ \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945},\ \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450},\ \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}.$$

Remarque : en utilisant la relation $\tan x = \mathrm{cotan}\,x - 2\,\mathrm{cotan}\,2x$ on peut obtenir le développement en série entière de $\tan x$:

$$\tan x = 2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}}[2^{2k}-1]x^{2k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}b_{2k}x^{2k-1}.$$

Solution 2.3.6

(1) On écrit la formule de Parseval pour f et f' (*corollaire 7.13 page 291*) :

$$\frac{1}{p}\int_0^p f^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 \text{ et } \frac{1}{p}\int_0^p f'^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f'}(n)|^2.$$

On remarque ensuite que $\widehat{f'}(n) = \dfrac{i2\pi n}{p}\widehat{f}(n)$ (*proposition 7.2.4 page 289*). On a donc immédiatement l'inégalité demandée car $\widehat{f}(0) = 0$. L'égalité nous oblige à prendre $\widehat{f}(n) = 0$ pour $|n| \neq 1$, la réciproque est évidente c.q.f.d.

(2) On peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales.
Mais ici, il est préférable d'utiliser la méthode (équivalente) suivante :

$$\begin{aligned} p = \int_0^p (f'^2(t) + g'^2(t))\,\mathrm{d}t &\geqslant \int_0^p \left(\frac{4\pi^2}{p^2}f^2(t) + g'^2(t)\right)\mathrm{d}t \\ &\geqslant \int_0^p \left(\frac{2\pi}{p}f(t) - g'(t)\right)^2 \mathrm{d}t + \int_0^p \frac{4\pi}{p}f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

d'où l'inégalité.
On a égalité ssi $\dfrac{2\pi}{p}f - g' = 0$ et $f(t) = a\cos\dfrac{2\pi t}{p} - b\sin\dfrac{2\pi t}{p}$ on intégre et on trouve la relation demandée $z = (a+ib)e^{i2\pi t/p} + ic$ puis $|z'| = f'^2 + g'^2 = (a^2+b^2)\dfrac{4\pi^2}{p^2}$ i.e. $a^2 + b^2 = \dfrac{p^2}{4\pi^2}$.

(3) On fait ici intervenir $f_0(t) = f(t) - \widehat{f}(0)$, le 2. est valable en remplaçant f par f_0 et $f' = f_0'$. Il suffit ensuite de remarquer que $\displaystyle\int_0^p f_0(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^p f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

(4) On vient de prouver l'inégalité isopérimétrique ainsi que le cas d'égalité. En effet, si on suppose que $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ est l'équation d'une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ fermée et sans point double alors, $\int_0^p f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ donne l'aire (au signe près) de la partie bornée du plan délimitée par la courbe et $\int_0^p (f'^2(t) + g'^2(t))\,\mathrm{d}t = p$ donne le périmètre et on a $\mathcal{A} \leqslant \dfrac{p^2}{4\pi}$ avec égalité ssi on a un cercle.

Solution 2.3.7

(1) On a

$$f(x) = \frac{\sin ax}{e^x - 1} = \sin ax \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sin ax \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}.$$

Posons $f_N(x) = \sin ax \sum\limits_{n=1}^{N} e^{-nx}$, $r_N(x) = f(x) - f_N(x)$ et $I_N(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_N(x)\,\mathrm{d}x$.

On a $|r_N(x)| \leqslant \left|\dfrac{\sin ax}{1 - e^{-x}}\right| e^{-(N+1)x}$. Comme $\dfrac{\sin ax}{1 - e^{-x}}$ est bornée sur $[1, +\infty]$ et que cette fonction continue admet une limite en 0, elle est bornée sur $\mathbb{R}$. Soit M sa borne supérieure.

$$|I(a) - I_N(a)| = \left|\int_0^{+\infty} r_N(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^{+\infty} Me^{-(N+1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{M}{N+1}.$$

Donc $\lim_{N\to+\infty} I_N(a) = I(a)$.

Si on calcule maintenant $I_N(a)$, on trouve $I_N(a) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{a^2+n^2}$ et $\lim_{N\to+\infty} I_N(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}$ ce qui prouve la première égalité.

(2) Comme $\operatorname{ch} at$ est paire, on cherche son développement en série de cosinus.

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos nt \operatorname{ch} at \,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\Re\left(\int_0^\pi \cos[(n+ia)t\,\mathrm{d}t\right) = \frac{2}{\pi}\Re\left(\frac{n-ia}{n^2+a^2}\sin(n\pi+ia\pi)\right)$$
$$= \frac{2}{\pi}\operatorname{sh}(a\pi)(-1)^n\frac{a}{a^2+n^2}.$$

D'où, grâce à Dirichlet (*théorème 7.16 page 292*),

$$\operatorname{ch} at = \operatorname{sh}(a\pi)\left(\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}(-1)^n\cos nt + \frac{1}{a\pi}\right).$$

On prend alors la valeur en π et l'on trouve :

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\left[\coth a\pi - \frac{1}{a\pi}\right].$$

Solution 2.3.8

(1) On sait que v_{n-p} est borné, soit V un majorant de $|v_{n-p}|$, on a alors :

$$\sum_{p=-n}^{n}|u_pv_{n-p}| \leqslant V\sum_{p=-n}^{n}|u_p| \leqslant V\sum_{p\in\mathbb{Z}}|u_p| \text{ donc } (u_pv_{n-p})_{p\in\mathbb{Z}} \text{ est sommable.}$$

(2) On va montrer que $(|w_n|)$ est sommable et on se ramène au cas où u_p et v_p sont positifs.

$$\sum_{n=-N}^{N} w_n = \sum_{n=-N}^{N}\left(\sum_{p\in\mathbb{Z}}u_pv_{n-p}\right)$$
$$= \sum_{p\in\mathbb{Z}}u_p\sum_{n=-N}^{N}v_{n-p}$$
$$\leqslant V\sum_{p\in\mathbb{Z}}u_p$$

ce qui permet de conclure.

(3) On a $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\overline{U}(x)V(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \sum_{p\in\mathbb{Z}}\overline{\widehat{U}(p)}\widehat{Ve_{-n}}(p)$ grâce à la formule de Parseval (*corollaire 7.13 page 291*) et en notant $e_{-n}(x) = e^{-inx}$. Or $\overline{\widehat{U}(p)} = u_{-p}$ et $\widehat{Ve_{-n}}(p) = v_{n+p}$ d'où l'égalité en changeant p en $-p$.

Enfin, comme (w_n) est sommable, si on pose $W(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} w_ne^{inx}$ alors $\widehat{W}(n) = w_n = \widehat{UV}(n)$ et donc

$$W(x) = \overline{U(x)}V(x)$$

et le résultat attendu est obtenu pour $x = 0$ (ce qui donne le produit de Cauchy généralisé).

Solution 2.3.9

(1) Avec le D.S.E. de e^x on trouve immédiatement : $e^{te^{i\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} e^{in\theta}$ (il n'est pas nécessaire ici d'utiliser les théorèmes de Dirichlet, cf. *théorème 7.15 page 292* et *théorème 7.16 page 293*).
On applique alors la formule de Parseval (*corollaire 7.13 page 291*) et on trouve

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2t\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

(2) Comme $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + o(\theta^4)$ on a la réponse immédiatement.
On intégre alors l'inégalité ci dessus et, en choisissant t_1 comme indiqué dans l'énoncé et en majorant l'intégrale $\int_0^{\delta\sqrt{t}(1-\varepsilon)} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ par $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}(1-\varepsilon) \leqslant \frac{e^{2t}}{\sqrt{t}} \int_0^{\delta\sqrt{t}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_0^{\delta} e^{2t\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta & \\ \leqslant \frac{e^{2t}}{\sqrt{t}} \int_0^{\delta\sqrt{t}(1-\varepsilon)} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \frac{1}{1-\varepsilon} \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}\frac{1}{1-\varepsilon}.\end{aligned}$$

D'où l'inégalité demandée.
On écrit ensuite que $I(t) = \int_0^{\delta} e^{2t\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta + \int_{\delta}^{\pi} e^{2t\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$. On majore la deuxième intégrale par $\pi e^{2t\cos\delta}$ qui est un o de $\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}$ donc on pourra choisir t_2 pour que $\int_{\delta}^{\pi} e^{2t\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \leqslant \varepsilon \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}$ donc

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}(1-2\varepsilon) \leqslant I(t) \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{1-\varepsilon} + \varepsilon\right).$$

On peut alors en déduire que $I(t) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{2t}}{\sqrt{t}}$.

Remarque : on vient de prouver la méthode de Laplace dans un cas particulier.
Pour terminer, on remarque que $f(x) = \frac{1}{\pi} I(\sqrt{x})$ et en conclusion $f(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{e^{2\sqrt{x}}}{x^{1/4}}$.

Solution 2.3.10

(1) Il suffit d'écrire Parseval (*corollaire 7.13 page 291*) avec la dérivée φ de f, $\widehat{\varphi}(n) = in\widehat{f}(n)$, soit :

$$\int_0^{\pi} |\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2.$$

(2) On applique Parseval à f, on obtient

$$\int_0^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

donc

$$\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2\right) = 4\int_0^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t.\int_0^{\pi} |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t.$$

On remarque alors que $f^2(x) = f^2(0) + 2\displaystyle\int_0^x f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ et qu'il existe $x_0 \in]0,\pi[$ tel que $f(x_0) = 0$. En effet, $a_0(f) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et donc f qui est continue ne peut être strictement positive sur $]0,\pi[$ (cf. *théorème 4.19 page 78*). Or $f(0) > 0$ donc il existe $x \in]0,\pi[$ tel que $f(x) < 0$ ce qui assure l'existence de x_0 par le théorème des valeurs intermédiaires. Comme $f^2(0) = -2\displaystyle\int_0^{x_0} f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t$, on a

$$\begin{aligned}
f(0)^4 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)^4 &= 4\left(\int_0^{x_0} f(t)f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \\
&\leqslant 4\int_0^{x_0} f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_0^{x_0} f'(t)^2\,\mathrm{d}t \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\
&< 4\int_0^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_0^{\pi} f'(t)^2\,\mathrm{d}t \\
&< \pi^2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2\right)
\end{aligned}$$

(3) Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que $\sum n^2 a_n^2$ converge. On sait alors que $\sum a_n^2$ converge ($a_n^2 \leqslant n^2 a_n^2$ pour $n \geqslant 1$). On applique le résultat précédent au polynôme trigonométrique $f_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n \cos nx$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right)^2 &\leqslant \pi\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^2\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{N} n^2 a_n^2\right) \\
&\leqslant \pi\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_n^2\right)
\end{aligned}$$

et on obtient le résultat valable pour toute suite (a_n). On généralise alors sans peine cette inégalité au cas des suites complexes en prenant les modules et on aura

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right|^4 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|\right)^4 \leqslant \pi^2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2|a_n|^2\right).$$