SÉRIES ENTIÈRES, SÉRIES DE FOURIER

1. Séries entières

1.1. **Rayon de convergence d'une série entière.**

Exercice 1.1.1. **F**

Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de l'entier naturel non nul n. Quel est le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d(n) z^n.$$

Exercice 1.1.2. **F**

Soit (a_n) une suite complexe vérifiant :

$$\exists h \in \mathbb{N}^*,\ \exists l \in \mathbb{R} \text{ tels que } \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+h}}{a_n} = l.$$

Quel est le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$?

Exercice 1.1.3. **F**

Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière telle que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ soit R_1 et le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} z^{2n+1}$ soit R_2.

Quel est le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$?

Exercice 1.1.4. **F**

Soit α un réel tel que $t \mapsto (\operatorname{Arcsin} t)^\alpha \in \mathrm{L}^1(]0,1])$, on pose $I_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{1/n} (\operatorname{Arcsin} t)^\alpha \, \mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Rayon de convergence et étude aux bornes de la série entière d'une variable réelle $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} I_n(\alpha) x^n$.

Exercice 1.1.5. **F T**

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^n t}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Calculer I_n.

(2) En déduire le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$.

Exercice 1.1.6. **F C**

(1) Montrer que, si $R_N = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{N+1}}{1-t} \ln t \, \mathrm{d}t$, $\exists M \geqslant 0$ tel que $|R_N| \leqslant \dfrac{M}{N+1}$.

(2) En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} \, \mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 1.1.7. **I**

Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Étudier le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$ où

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{n + \ln n}{n^2}\right) a_n.$$

Exercice 1.1.8. **I**

Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$1.\ u_n = \frac{\sin n}{n} x^n \qquad 2.\ u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{\ln n}\right)^{n^2} x^n \ (n \geqslant 2).$$

Exercice 1.1.9. **I**

Trouver le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

Étude aux bornes de l'intervalle de convergence.

Exercice 1.1.10. **I**

On donne 2 suites réelles (a_n) et (b_n) telles que $b_n > 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lambda$. La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ ayant un rayon de convergence infini.

Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \Big/ \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n t^n\right) = \lambda$.

Exercice 1.1.11. **I**

(1) (a_n) étant une suite complexe convergente, montrer alors que :

  (i) la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} t^n$ a un rayon de convergence infini,

  (ii) si $F(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} t^n$ alors $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} F(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

(2) Si $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ est convergente ($c_n \in \mathbb{C}$), on pose $g(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{c_n}{n!} t^n$. Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t} g(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

1.2. **Séries entières d'une variable réelle.**

1.2.1. *Résolution d'équations différentielles.*

Exercice 1.2.1. **F T**

On considère l'équation différentielle (E) :

$$x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1+x).$$

(1) Déterminer les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0.
(2) En donner une expression à l'aide des fonctions élémentaires.

Exercice 1.2.2. **F**

Déterminer les solutions développables en série entière de $4xy'' + 2y' - y = 0$.

Exercice 1.2.3. **I C**

Soit f la solution de l'équation différentielle (E) : $y' = 1 + xy^2$ définie sur un voisinage de 0, qui vérifie : $f(0) = 0$

(1) Montrer que si f admet pour développement en série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{3n+1}$ alors

$$(3n+1)a_n = \sum_{q=0}^{n-1} a_q a_{n-q-1}.$$

(2) Montrer que la suite $(3^n a_n)$ est décroissante.
(3) En déduire un minorant de son rayon de convergence R et conclure.

1.2.2. *Recherche de développements en série entière.*

Exercice 1.2.4. **F T**

Développer en série entière les fonctions suivantes :

(1) $F(x) = \ln(x^2 + 2x + 4)$. (2) $F_a(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x\operatorname{ch} a + 1}$. (3) $G(x) = (1+x^2)(3 + 4\operatorname{Arctan} x)$.

(4) $H(x) = (\operatorname{Arcsin} x)^2$. (5) $I(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1 + x\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$. (6) $J(x) = \sin(\alpha \operatorname{Arcsin} x)$.

Exercice 1.2.5. **F**

Soit $z \in \mathbb{C}$

(1) Montrer que la série double $\left(\dfrac{z^{2p}}{q^{2p+2}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ converge si $|z| < 1$.
(2) Montrer que la somme de cette série double vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - z^2}, \quad |z| < 1.$$

(3) On verra dans le cours sur les séries de Fourier (cf *question (i) page 294*) que

$$\pi \operatorname{cotan} \pi x - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

Exprimer alors le développement en série entière de $\pi \operatorname{cotan} \pi x - \dfrac{1}{x}$ à l'aide des valeurs de la fonction ζ (on rappelle que $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ pour $x > 1$).

EXERCICE 1.2.6. **F**

(1) Soit $f(x) = \left(\sin \dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$; montrer par récurrence sur n que :

$$f^{(n)}(x) = [P_n(1/x) \sin 1/x + Q_n(1/x) \cos 1/x]\, e^{-1/x^2}$$

où P_n et Q_n sont des polynômes.

(2) En déduire que f est C^∞ en 0 mais que f n'est pas développable en série entière

---

EXERCICE 1.2.7. **F T**

On pose $f(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(t - x \sin t)}\, \mathrm{d}t$.

(1) Montrer que f est à valeurs réelles.
(2) En déduire le développement en série entière de f.

EXERCICE 1.2.8. **F**

On considère la série entière dont la somme vaut $\sqrt{1-x}$ sur [-1,+1].

(1) Montrer qu'elle converge uniformément sur [-1,+1].
(2) En déduire l'existence d'une suite (P_n) de fonctions polynômes qui converge uniformément vers $|x|$ sur [-1,+1].

EXERCICE 1.2.9. **F**

Soit A la matrice : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Trouver la somme de la série de terme général

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n 2^n} x^n A^n.$$

EXERCICE 1.2.10. **I**

(1) Chercher les fonctions continues en 0 vérifiant l'équation :

$$f(2x) - f(x) = \operatorname{Arctan} x. \tag{1}$$

(2) En écrivant le développement en série entière de $\operatorname{Arctan} x$, en déduire celui de f (raisonnement à bien justifier).

1.2.3. *Sommation des séries entières.*

Exercice 1.2.11. **F T**

Rayon de convergence et somme des séries entières de terme général :

1. $u_n = n\dfrac{x^n}{2^n}$ 2. $u_n = \dfrac{x^n}{(2n)!}$ 3. $u_n = \dfrac{x^n}{n(n+1)}$
4. $u_n = \dfrac{x^{4n-1}}{4n-1}$ $(n \geqslant 1)$ 5. $u_n = \dfrac{n^2+4n-1}{n+4}\dfrac{x^n}{n!}$

Exercice 1.2.12. **F**

Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

On considère la série de terme général $u_n\dfrac{x^n}{n!}$.
Nature et somme de cette série entière.

Exercice 1.2.13. **F**

Étude et calcul de la somme $f(x)$ de la série entière de terme général $u_n = \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$ (on pourra utiliser une équation différentielle ou une autre méthode).

1.2.4. *Dénombrements.*

Exercice 1.2.14. **I C**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\tau_n = \mathrm{Card}\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 | n = 2n_1 + 3n_2\}$.

(1) Montrer que la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \tau_n z^n$ est le produit de deux séries entières simples. En déduire le rayon de convergence.
(2) Calculer τ_n.

Exercice 1.2.15. **F C**

Déterminer la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, par

$$u_{n+1} = \sum_{n=0}^{n} u_p u_{n-p}.$$

Exercice 1.2.16. **I T**

On considère la suite (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$$

pour $n \geqslant 1$.

(1) Encadrer la suite $\dfrac{a_n}{n^2}$. En déduire le rayon de convergence de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
(2) Déterminer la somme $f(x)$, en déduire une expression de a_n.

Exercice 1.2.17. **I**

On définit la suite (a_n) par $a_0 = 1$ et $2a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k a_{n-k}$.(1)

(1) Montrer que le rayon de convergence de la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{n!}$ n'est pas nul.

(2) Calculer $S(x)$. En déduire l'expression de a_n ainsi que le rayon de convergence de $S(x)$.

---

2. Séries de Fourier

2.1. **Coefficients de Fourier.**

Exercice 2.1.1. **F**

Soit f une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(1) Donner la relation entre $c_p(f^{(n)})$ et $c_p(f)$ (on rappelle que $c_p(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-ipt} f(t)\,\mathrm{d}t$).

(2) On suppose que $\exists M > 0$, $\exists k > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f^{(n)}\| \leqslant Mk^n$, que penser des coefficients $c_p(f)$ pour $p > k$?

2.2. **Convergence en moyenne quadratique.**

Exercice 2.2.1. **F C**

Développer en série de Fourier les fonctions suivantes :

(1) $F(x) = \dfrac{16 + 4\cos 2x}{17 + 8\cos 2x}$

(2) f impaire, 2π-périodique définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$, en déduire :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}.$$

(3) $g(x) = |\sin x|$, en déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{4n^2 - 1}$

(4) $h(t) = \dfrac{x \sin t}{x^2 - 2x\cos t + 1}$ $\quad x \neq \pm 1$.

Exercice 2.2.2. **F**

Montrer que, pour tout $x \in [0, 2\pi]$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos nx}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6} - \dfrac{\pi}{2}x + \dfrac{1}{4}x^2$.

Exercice 2.2.3. **F T**

Soit l'application $f\ : t \in \mathbb{R} \mapsto |\sin^3 t|$.

(1) Déterminer la série de Fourier de f ; étudier sa convergence.

(2) En utilisant la formule de Parseval, montrer que :

$$\pi^2 = \frac{256}{45} + \frac{4608}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2(4n^2-9)^2}.$$

Exercice 2.2.4. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 2π-périodique telle que sa restriction à tout intervalle est la différence de deux fonctions g et h croissantes (f est à variation bornée sur tout compact). On pose $\omega(a) = \sup_{|x-y|\leqslant a} |f(x)-f(y)|$.

(1) Montrer qu'il existe A dans $\mathbb{R}$ tel que, pour toute subdivision $x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n}$ de $[0,2\pi]$, on ait $\sum_{k=0}^{2n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant A$.

(2) Trouver un majorant indépendant de x (en fonction de $\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$) de

$$\sum_{k=1}^{2n}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]^2.$$

(3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\left[f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right) - f\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)\right]^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{\pi A}{n}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

(4) Si $\omega(a) \leqslant Ca^{\alpha}$ où $\alpha > 0$, montrer que $\exists B > 0$, $|\widehat{f}(n)|^2 \leqslant \dfrac{B}{n^{1+\alpha}}$.

Exercice 2.2.5. $\boxed{\textbf{I C}}$

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 2π-périodique, telle que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{2\pi} f'^2(t)\,\mathrm{d}t$.

Cas d'égalité ?

2.3. **Convergence ponctuelle.**

Exercice 2.3.1. $\boxed{\textbf{I T}}$

(1) Montrer que, pour tout $t \in [-n,n]$,

$$t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 8n}{\pi^2(2p+1)^2}\sin\left(\frac{\pi}{2n}(2p+1)t\right). \tag{1}$$

(2) On pose $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{ikx}$. En remplaçant t par k, à l'aide de la formule (1), dans l'expression de $P_n'(x)$, montrer que :

$$|P_n'(x)| \leqslant n\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{8}{\pi^2(2p+1)^2}\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k e^{ikx}\sin\left(\frac{\pi}{2n}(2p+1)k\right)\right|.$$

(3) On note $\|P_n\| = \sup_{x\in[0,2\pi]} |P_n(x)|$, en déduire l'inégalité de Bernstein : $\|P_n'\| \leqslant n\|P_n\|$.

Exercice 2.3.2. $\boxed{\textbf{I C}}$

(1) Étudier la convergence de la série

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2t}\right)$$

où $t > 0$. Montrer que f est de classe C^1.

(2) Montrer l'égalité suivante, valable pour tout x réel, pour tout $t > 0$:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2t}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi t}\exp(-2n^2\pi^2 t + 2i\pi n x).$$

Exercice 2.3.3. $\boxed{\textbf{I}\quad}$
Soit $a > 0$.

(1) Chercher le domaine de définition de $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a^2 + (t+n\pi)^2}$.
(2) Montrer que f est de classe C^1, π-périodique.
(3) À l'aide du développement en série de Fourier de f, en donner l'expression à l'aide des fonctions usuelles. On admettra le résultat suivant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ixt}\,\mathrm{d}t}{a^2+t^2} = \frac{\pi}{a}e^{-2|x|a}.$$

Exercice 2.3.4. $\boxed{\textbf{I}\quad}$
Soit B l'ensemble des fonctions X de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ développable en série de Fourier sous la forme : $X(s) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi ns}$ avec $\sum |c_n|$ $n \in \mathbb{Z}$ convergente.

(1) Montrer que $\|.\|$: $X \in B \mapsto \|X\| = \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n| \in \mathbb{R}_+$ est une norme sur B et que $(B, \|.\|)$ est complet.
(2) Montrer que B est stable par produit.

Exercice 2.3.5. $\boxed{\textbf{I C}}$
Soit f : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^2 telle que f, f', f'' soient intégrables sur $\mathbb{R}$. Établir l'égalité :

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(p) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{2i\pi nx}\,\mathrm{d}x\right)$$

où $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(p)$ est, par définition, égal à $\sum_{p=0}^{+\infty} f(p) + \sum_{p=1}^{+\infty} f(-p)$ (ce qui signifie que les deux séries invoquées sont convergentes).
On développera en série de Fourier la fonction $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$.
Cette relation est appelée *formule de Poisson.*

Exercice 2.3.6. $\boxed{\textbf{I}\quad}$
Soit $\gamma \in [0, 2\pi]$ tel que $\frac{\gamma}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, f continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique.
Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Peut-on étendre ce résultat au cas où f est seulement continue par morceaux ?

Exercice 2.3.7. $\boxed{\textbf{I}}$

Étudier l'intégrabilité sur $]0,\pi[$ de la fonction $\theta \mapsto \dfrac{\sin^2\theta}{(1-2x\cos\theta+x^2)(1-2y\cos\theta+y^2)}$.
Calculer

$$F(x,y)=\int_0^\pi \frac{\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{(1-2x\cos\theta+x^2)(1-2y\cos\theta+y^2)}$$

lorsque cette quantité est définie.

Exercice 2.3.8. $\boxed{\textbf{D C}}$

Soit (a_n) une suite décroissante de limite nulle.
Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- (i) la série de fonctions $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \sin nx$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$,
- (ii) la suite (na_n) converge vers 0.

Indication 1.1.1 Penser à encadrer $d(n)$.

Indication 1.1.2 Si $l\neq 0$ alors $R=|l|^{-1/h}$ (reprendre le cours).

Indication 1.1.3 $R=\inf(R_1,R_2)$.

Indication 1.1.4 La fonction est intégrable pour $\alpha>-1$ puis on montre que $I_n(\alpha)=\frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}}+O\left(\frac{1}{n^{\alpha+3}}\right)$. Pour $x=1$: $\sum I_n$ C ssi $\alpha>0$, pour $x=-1$, $\sum(-1)^n I_n$ C ssi $\alpha>-1$

Indication 1.1.5

(1) Poser $\operatorname{ch} t=\frac{1}{\cos\theta}$ et se ramener à des intégrales de Wallis.
(2) $I_{n+2}=\frac{n}{n+1}I_n\leqslant I_{n+1}\leqslant I_n \Rightarrow R=1$.

Indication 1.1.6 Écrire que $R_N=\int_0^1 t^N g(t)\,\mathrm{d}t$ où g est une fonction continue sur [0,1], majorer alors le reste de la série $\sum\int_0^1 t^n \ln t\,\mathrm{d}t$

Indication 1.1.7 Montrer que $b_n=\frac{1}{n}e^{n-1/2}a_n(1+o(1))$ et en déduire que le rayon vaut $\frac{R}{e}$.

Indication 1.1.8

1 $R=1$
2 $R=0$.

Indication 1.1.9 $R=1$, la série diverge pour $x=\pm 1$.

Indication 1.1.10 Poser $f(t)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nt^n\right)\Big/\left(\sum_{n=0}^{+\infty}b_nt^n\right)$, $g(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nt^n$, majorer $|a_n-\lambda b_n|$ à partir d'un certain rang puis partager les sommes en 2.

Indication 1.1.11

(1) (a_n) est bornée d'où $R=+\infty$, si $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, écrire $F(t)=ae^t+G(t)$ où $G(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n-a}{n!}t^n$ et montrer que $G(t)=o(e^t)$.
(2) Poser $s_n=\sum_{k=0}^n c_k$, $s=\sum_{k=0}^{+\infty}c_k$, $F(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{s_n}{n!}t^n$.

Indication 1.2.1

(1) On obtient $a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$.
(2) Pour déterminer f, décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ d'où $f(x)=\frac{(1+x)^2}{2x^2}\left[\ln(1+x)-\frac{1}{2}\right]+\frac{3}{4}-\frac{1}{2x}$

Indication 1.2.2 On obtient $f(x)=a_0\operatorname{ch}\sqrt{x}$ si $x\geqslant 0$, $a_0\cos\sqrt{-x}$ si $x\leqslant 0$.

Indication 1.2.3

(1) Si on écrit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ on montre que $b_{3r-1} = b_{3r} = 0$ et $(3n+1)b_{3n+1} = \sum_{q=0}^{n-1} b_{3q+1} b_{3(n-q-1)+1}$.

(2) Poser $a_n = b_{3n+1}$ et $d_n = 3^n a_n$ et montrer que (d_n) est décroissante.

(3) En déduire que $R \geqslant \sqrt[3]{3}$ et conclure que f est bien développable en série entière.

Indication 1.2.4

(1) $F(x) = 2\ln 2 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n\pi/3)}{2^{n-1}n} x^n$.

(2) • Si $a = 0$ alors $F_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \qquad R = 1$.
• Si $a > 0$ alors : $F_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(n+1)a}{\operatorname{sh} a} x^n, \qquad R = e^{-a}$.

(3) $G(x) = 3(1+x^2) + 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{1-4n^2} \qquad R = 1$.

(4) $H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2} \qquad R = 1$.

(5) $I(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} . \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} 2\pi x^n$.

(6) $J(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((2n-1)^2-\alpha^2)((2n-3)^2-\alpha^2)(\cdots)(1-\alpha^2)}{(2n+1)!} \alpha x^{2n+1}$.

Indication 1.2.5

(1) Si $|z| < 1$ majorer $\left|\frac{z^{2p}}{q^{2p+2}}\right|$ par $|z|^{2p}\frac{1}{q^2}$.

(2) $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{z^{2p}}{q^{2p+2}} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2-z^2}$ grâce au théorème d'interversion de sommations.

(3) $\pi \operatorname{cotan} \pi x - \frac{1}{x} = -\sum_{p=0}^{+\infty} 2\zeta(2p+2)x^{2p+1}$.

Indication 1.2.6 On obtient $P_{n+1} = 2X^3 P_n - X^2 P_n' + X^2 Q_n$ et $Q_{n+1} = 2X^3 Q_n - X^2 Q_n' - X^2 P_n$ puis $f^{(n)}(0) = 0$.

Indication 1.2.7

(1) Partager l'intégrale en 2 pour obtenir $f(x) = 2\int_0^\pi \cos(t - x\sin t)\,\mathrm{d}t$.

(2) Développer $\cos(t - x\sin t)$ et obtenir $f(x) = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2(n+1)}$.

Indication 1.2.8 On a $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!} x^n$ et la série $\sum u_n$ converge. On pose ensuite $P_n(x) = S_n(1-x^2)$.

Indication 1.2.9 Écrire $A = -I + B$ pour calculer A^n, on trouve alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} U_n = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ c & -a & b \\ b & 0 & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a = \ln\left(1 - \tfrac{x}{2}\right),\ b = \tfrac{x}{x-2},\ c = \tfrac{x^2}{2(2-x)^2}.$$

Indication 1.2.10

(1) Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan} x/2^n + f(0)$.

(2) Chercher un D.S.E. comme avec les équations différentielles pour trouver finalement $f(x) = f(0) + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)(2^{2p+1}-1)} x^{2p+1}$.

Indication 1.2.11 (1) $R = 2$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{2x}{(2-x)^2}$.

(2) $R = +\infty$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \begin{cases} \operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ \cos\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

(3) $R = 1$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = 1 + \frac{1-x}{x}\ln(1-x)$.

(4) $R = 1$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} - \operatorname{Arctan} x\right]$.

(5) $R = +\infty$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{(x^5-x^3+3x^2-6x+6)e^x-6}{x^4}$.

Indication 1.2.12

$R = +\infty$ puis on montre que la somme vérifie l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$.

Indication 1.2.13
$R = +\infty$ et la somme vérifie $y''' = y$ d'où la somme $f(x) = \frac{e^x}{3} + \frac{2}{3}e^{-x/2}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

Indication 1.2.14

(1) C'est le produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}$ et de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{3n}$, $R = 1$.

(2) Écrire $(1-z^2)\sum_{n=0}^{+\infty} \tau_n z^n = \frac{1}{1-z^3}$, on trouve alors $\tau_{2n} = 1 + E\left(\frac{n}{3}\right)$, $\tau_{2n+1} = 1 + E\left(\frac{n-1}{3}\right)$.

Indication 1.2.15 Reconnaître un produit de Cauchy, on trouve $u_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

Indication 1.2.16

(1) On montre que $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$, $R = 1$.

(2) Montrer que $(1-x)f'(x) - f(x) = 2xf(x)$, on trouve $f(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$ et enfin, utiliser le produit de Cauchy pour conclure $a_n = \sum_{p=0}^{n}(-2)^p\frac{(n-p+1)(n-p+2)}{2p!}$.

Indication 1.2.17

(1) Réécrire la relation (1) pour faire apparaître un produit de Cauchy. $R \geqslant 1$.

(2) Prouver que $S^2(x) = 2S'(x)$ et conclure que $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$, $R = 2$.

Indication 2.1.1 La première question, c'est du cours, pour la deuxième, on prouve que $|c_p(f)| \leqslant M\left(\frac{k}{p}\right)^n$ donc $c_p(f) = 0$ si $p > k$.

Indication 2.2.1

(1) $F(x) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\cos(2px)$.

(2) $f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin(2p+1)x}{(2p+1)^3}$ puis $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \dfrac{\pi^3}{32}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$.

(3) $g(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}\right]$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

(4) $\frac{x\sin t}{x^2-2x\cos t+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nt}{x^n}\quad (|x| > 1)$.

Indication 2.2.2 Prolonger la fonction en une fonction 2π-périodique paire, continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et calculer $a_n(f)$.

Indication 2.2.3

(1) $b_n = 0$ et $a_{2p+1} = 0$, $a_{2p} = \frac{24}{\pi(4p^2-1)(4p^2-9)}$ et la série converge normalement.

(2) Parseval nous donne $2\pi\times\frac{5}{16} = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{16}{9}\times 2\pi + 576\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\pi}{(4p^2-1)^2(4p^2-9)^2}\right)$.

Indication 2.2.4

(1) On a $\sum_{k=0}^{2n-1}|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant g(2\pi) - g(0) + h(2\pi) - h(0)$.

(2) Utiliser l'inégalité $\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]^2 \leqslant \omega(\frac{\pi}{n})|f(x+\frac{k\pi}{n}) - f(x+\frac{(k-1)\pi}{n})|$ d'où $\sum_{k=1}^{2n}[f(x+\frac{k\pi}{n}) - f(x+\frac{(k-1)\pi}{n})]^2 \leqslant A\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

(3) Utiliser la relation de Chasles, poser $g(x) = [f(x+\frac{\pi}{2n}) - f(x-\frac{\pi}{2n})]^2$ pour obtenir $\int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{A\pi}{n}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

(4) Poser $h(x) = f(x+\frac{\pi}{2n}) - f(x-\frac{\pi}{2n})$ puis $\widehat{h}(p) = 2i\widehat{f}(p)\sin(\frac{p\pi}{2n})$ et appliquer la relation de Parseval à h $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h(x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{AC\pi^\alpha}{2n^{1+\alpha}}$. Avec $B = \frac{AC\pi^\alpha}{8}$, majorer $|\widehat{f}(n)|^2$ par $\sum_{p\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(p)|^2\sin^2(\frac{p\pi}{2n}$.

Indication 2.2.5 Remarquer que $|\widehat{f'}(n)| = |n|.|\widehat{f}(n)| \geqslant |\widehat{f}(n)|$ pour $|n| \geqslant 1$.

Indication 2.3.1

(1) Développer en série de Fourier la fonction impaire définie sur $[0,\pi]$ par
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si } x \geqslant \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ et poser } t = \frac{2nx}{\pi}.$$

(2) Écrire que $P_n'(x) = n\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p 8i}{\pi^2(2p+1)^2}\left(\sum_{k=0}^{n}\lambda_k e^{ikx}\sin\left(\frac{\pi}{2n}(2p+1)k\right)\right)$.

(3) Utiliser la formule $\sin(\frac{\pi}{2n}(2p+1)k) = \frac{1}{2i}\left(e^{ik(2p+1)\pi/(2n)} - e^{-ik(2p+1)\pi/(2n)}\right)$ et la majoration $\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k e^{ikx}\sin(\frac{\pi}{2n}(2p+1)k)\right|$
$\leqslant \frac{1}{2}\left(\left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k \exp\left[ik(x+(2p+1)\frac{\pi}{2n})\right]\right| + \left|\sum_{k=0}^{n}\lambda_k \exp\left[ik(x-(2p+1)\frac{\pi}{2n})\right]\right|\right)$

Indication 2.3.2

(1) Écrire la somme en deux parties et vérifier la convergence normale des séries et des séries dérivées sur tout intervalle $[-a,+a]$ où $a>0$.

(2) f est 1-périodique et $\widehat{f}(n) = \sqrt{2t}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-u^2-2inux)\,\mathrm{d}u$ avec $x=\pi\sqrt{2t}$.
$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-u^2-2inux)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ puis $\varphi'(x) = -2n^2x\varphi(x)$.

Indication 2.3.3

(1) f est définie sur $\mathbb{R}$ et on vérifie que f est π-périodique.

(2) Poser $u_n(t) = \frac{1}{a^2+(t+n\pi)^2}$ et montrer la convergence normale des séries $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n'(t)$ et $\sum_{n=-\infty}^{0}u_n'(t)$.

(3) Montrer que $\widehat{f}(k) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2ikt}\,\mathrm{d}t}{a^2+t^2}$, puis $f(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2ikt}\,\mathrm{d}t}{a^2+t^2}\right)e^{i2kx}$ et finalement $f(x) = \frac{1}{a}\frac{\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}2a-\cos 2x}$.

Indication 2.3.4

(1) $\|.\|$ est une norme : classique, prendre ensuite une suite de Cauchy (X_p) de B : $X_p(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_{n,p}e^{2i\pi ns}$, pour tout n, la suite $c_{n,p}$ converge vers d_n. On montre alors que $Y = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}d_ne^{2i\pi ns}$ est un élément de B et que $\lim\limits_{p\to+\infty}X_p = Y$.

(2) Poser $X=\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\varepsilon_n$ et $Y=\sum_{n\in\mathbb{Z}}d_n\varepsilon_n$ où $\varepsilon_n(s) = e^{i2\pi ns}$ et montrer que $\sum|c_pd_{n-p}|$ $p\in\mathbb{Z}$ converge. Montrer ensuite que, avec $e_n = \sum_{p\in\mathbb{Z}}c_pd_{n-p}$, $\sum|e_n|$ $n\in\mathbb{Z}$ converge. Poser finalement $Z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty}c_pd_{n-p}\right)\varepsilon_n\in B$ et montrer que $\widehat{Z}(n) = \widehat{XY}(n)$.

Indication 2.3.5 On montre que la série $g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(x+n)$ converge uniformément ainsi que la série des dérivées, que g est 1-périodique puis on montre que $\widehat{g}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-2i\pi ku}\,\mathrm{d}u$ ce qui permet de conclure.

Indication 2.3.6 On prouve la validité de ce résultat pour les polynômes trigonométriques et on l'étend par densité au fonctions continues.

Indication 2.3.7 Se limiter au cas où $|x|<1$ et $|y|<1$ puis développer $\frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ en série de Fourier et pour calculer chaque intégrale, on développe à nouveau en série de Fourier d'où $F(x,y) = \frac{\pi}{2(1-xy)}$ pour $|x|<1$, $|y|<1$.

Indication 2.3.8 Pour montrer que $(i)\Rightarrow(ii)$, on pose $\Delta_n(x) = \sum_{k=n}^{2n}a_k\sin kx$ puis on prouve que $\Delta_n\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)\geqslant\frac{na_{2n}}{2}$.
Pour $(ii)\Rightarrow(i)$ on pose $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\sin kx$ que l'on majore, pour $x\in]0,\pi]$ par $|S_n(x)|\leqslant\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ et $|S_n(x)|\leqslant n$. On utilise alors la transformation d'Abel

$$\sum_{k=n}^{n+p}a_k\sin kx = \sum_{k=n}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})S_k(x) - a_nS_{n-1}(x) + a_{n+p}S_{n+p}(x).$$

On a alors la convergence simple de cette série sur $\mathbb{R}$.
Pour la convergence uniforme, on majore $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k\sin kx$ en prenant $\varepsilon>0$ et N tel que $n\geqslant N\Rightarrow na_n\leqslant\varepsilon$, pour $x\in]0,\pi[$, on pose $n_x = E(\pi/x)$ et on distingue les cas $n_x<n$ et $N\leqslant n\leqslant n_x$.

1. Solutions :

Solution 1.1.1 Comme $1 \leqslant d(n) \leqslant n$ alors $R = 1$ (on utilise la *remarque 7.1.3 page 282* en remarquant que les séries $\sum x^n$ et $\sum nx^n$ ont un rayon de convergence égal à 1).

Solution 1.1.2 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est la somme de h séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p+nh} x^{p+nh}$ de rayon de convergence $|l|^{-1/h}$ (c'est la généralisation du résultat de la *remarque 7.1.3* (*vii*) page 282) donc $R \geqslant |l|^{-1/h}$ (*théorème 7.5 page 283*).

- Si $l = 0$: $R = +\infty$,
- si $l \neq 0$ alors $R = |l|^{-1/h}$ (utiliser la démonstration de la *remarque 7.1.3* (*vii*) *page 282*).

Solution 1.1.3 On a : $R = \inf(R_1, R_2)$ car,

- si $|z| < R$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n z^n = 0$ (cf *remarque 7.1.3* (*vi*) *page 282*)
- et si $|z| > R$, l'une des 2 suites $(a_{2n}z^{2n})$ ou $(a_{2n+1}z^{2n+1})$ ne tend pas vers 0 donc la série $\sum a_n z^n$ diverge (et on applique le *théorème 7.2 page 281*).

Solution 1.1.4 $\varphi\ : t \mapsto (\operatorname{Arcsin} t)^\alpha$ est intégrable ssi $\alpha > -1$ car, au voisinage de 0, $\operatorname{Arcsin} t \sim t$, et on applique la *règle pratique d'intégrabilité* (*i*) *page 262*.

Ensuite on écrit $(\operatorname{Arcsin} t)^\alpha = t^\alpha + O\left(t^{\alpha+2}\right)$ d'où $I_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} + O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+3}}\right)$. En effet

$$\left|\int_0^{1/n} O(t^{\alpha+2})\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M\int_0^{1/n} t^{\alpha+2}\,\mathrm{d}t = \frac{M}{\alpha+3}\frac{1}{n^{\alpha+3}}.$$

On a donc $R = 1$.

- Pour $x = 1$: $\sum I_n$ C ssi $\alpha > 0$ (c'est la *règle de Riemann page 240*).
- Pour $x = -1$, $\sum(-1)^n I_n$ C ssi $\alpha > -1$ ($(I_n) \searrow$ de manière évidente) (en appliquant le théorème des séries alternées *théorème 5.33 page 239*).

Solution 1.1.5

(1) On pose $\operatorname{ch} t = \dfrac{1}{\cos\theta}$ ($\theta \in [0, \pi/2[$) et donc : $\operatorname{th}\dfrac{t}{2} = \tan\dfrac{\theta}{2}$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}$:
$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1}\theta\,\mathrm{d}\theta$: $I_{2p+1} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$; $I_{2p+2} = \dfrac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!}$ (intégrales de Wallis).

(2) On sait que $I_{n+2} = \dfrac{n}{n+1} I_n \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1 \Rightarrow R = 1$.

Solution 1.1.6

(1) $R_N = \displaystyle\int_0^1 t^N g(t)\,\mathrm{d}t$, g est une fonction continue sur [0,1] donc bornée d'où $\exists M = \sup\limits_{t\in[0,1]} |g(t)|$ et par conséquent $|R_N| \leqslant M\displaystyle\int_0^1 t^N\,\mathrm{d}t$.

(2) $\dfrac{\ln t}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} t^n \ln t + \dfrac{t^{N+1}}{1-t}\ln t \Rightarrow \int_0^1 \dfrac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{N}\dfrac{1}{(n+1)^2} + R_N$ d'où le résultat.

Remarque : on peut prouver avec cette relation que
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi^2}{6}.$$

Solution 1.1.7 On a :
$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\left(\frac{n+\ln n}{n^2}\right) &= \exp\left[n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\times\left(\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n^2}\right)\\ &= \exp\left[n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right]\times\left(\frac{1}{n}+\frac{\ln n}{n^2}\right)\\ &= \frac{1}{n}e^{n-1/2}(1+o(1))\end{aligned}$$
d'où $b_n \sim \frac{1}{n}e^{n-1/2}a_n$ i.e. $\sum b_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum \frac{1}{n}e^{n-1/2}a_n z^n$ (cf *remarque 7.1.3* (*ii*) *page 282*) donc même rayon que sa dérivée : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{-1/2}a_n(ez)^n$ qui vaut $\frac{R}{e}$.
Remarque : on obtenait ce résultat directement avec la formule d'Hadamard (cf *remarque 7.1.3* (*iii*) *page 282*) et avec quelques connaissances sur les limites supérieures.

Solution 1.1.8

- On a $|u_n| \leqslant \frac{|x|^n}{n}$ donc $R \geqslant 1$ et comme $\{\sin n\}$ est dense dans $[-1,1]$ alors $\frac{\sin n}{n}x^n$ est non bornée pour $x>1$ i.e. $R=1$ (on a utilisé la *remarque 7.1.3* (*i*) *et le théorème 7.2 page 282*) (ou on dit que $R = R\left(\sum \sin nx^n\right)$ et comme $\sin n \not\to 0$ alors $R \leqslant 1$.
- On a $\ln a_n = n^2\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\right)$: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n}=+\infty$ et pour tout $x\neq 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n}x^{2n}=+\infty$ (car $\ln(|a_{2n}|x^{2n}) = 2n\ln|x| + 4n^2\ln(1+\frac{1}{\ln(2n)} \to +\infty)$ donc $R=0$.

Solution 1.1.9 On a
$$a_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{c_n}{2n}$$
où $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1$ donc $|a_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et par conséquent $R=1$ (on utilise la remarque 7.1.3 (*ii*) page 282).

- Si $x=1$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ (converge) $-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n}{2n}$ (diverge).
- Si $x=-1$ $a_n(-1)^n \sim -\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Conclusion : il y a convergence sur]-1,+1[.

Solution 1.1.10 Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est infini. On pose
$$f(t) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right)\Big/\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n\right),\ g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

alors, comme $\forall\varepsilon>0$, $\exists p : n\geqslant p\Rightarrow |a_n-\lambda b_n|\leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}b_n$, en écrivant :

$$|f(t)-\lambda|\leqslant\left|\sum_{n=0}^{p-1}(a_n-\lambda b_n)t^n\right|/g(t)+\left|\sum_{n=p}^{+\infty}(a_n-\lambda b_n)t^n\right|/g(t)$$

et en utilisant le fait que $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|\sum\limits_{n=0}^{p-1}(a_n-\lambda b_n)t^n\right|/t^p=0$ et donc que

$$\exists T\ : t\geqslant T\Rightarrow\left|\sum_{n=0}^{p-1}(a_n-\lambda b_n)t^n\right|/g(t)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

on peut dire que

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists T,\ t\geqslant T\Rightarrow|f(t)-\lambda|\leqslant\varepsilon$$

et en conclusion, on a bien prouvé que $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nt^n\right)\Big/\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nt^n\right)=\lambda$.

Remarque : ceci s'apparente au théorème de Césaro.

Solution 1.1.11

(1) Comme (a_n) est convergente, elle est bornée par A d'où :

$$\left|\frac{a_n}{n!}t^n\right|\leqslant A\frac{|t|^n}{n!}\Rightarrow R=+\infty$$

(on utilise la *remarque 7.1.3 (i) page 282*).

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, en écrivant $F(t)=ae^t+G(t)$ où $G(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a_n-a}{n!}t^n$ et comme $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall n\geqslant N$: $|a_n-a|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$ on a

$$|G(t)|\leqslant\left|\sum_{n=0}^{N-1}\frac{a_n-a}{n!}t^n\right|+\frac{\varepsilon}{2}e^t.$$

Or $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-t}\left|\sum\limits_{n=0}^{N-1}\dfrac{a_n-a}{n!}t^n\right|=0$ d'où $\exists T$, $t\geqslant T\Rightarrow e^{-t}\left|\sum\limits_{n=0}^{N-1}\dfrac{a_n-a}{n!}t^n\right|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Conclusion : en rassemblant ces résultats, on a bien $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-t}F(t)=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$.

Remarque : on pouvait utiliser l'exercice 1.1.10 qui donnait immédiatement la réponse.

(2) On pose $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n}c_k$, $s=\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}c_k$, $F(t)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{s_n}{n!}t^n$ alors :

$$F(t)=F'(t)-g'(t)$$

d'où $\displaystyle\int_0^x e^{-t}g(t)\,\mathrm{d}t=e^{-x}[F(x)-g(x)]$ et par conséquent

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}e^{-x}F(x)-\lim_{x\to+\infty}e^{-x}g(x)=s.$$

Remarque : si $\sum c_n$ est absolument convergente alors on peut utiliser le *théorème 5.55 page 253*. $\sum \int_0^{+\infty} \left| c_n e^{-t} \dfrac{t^n}{n!} \right| \mathrm{d}t$ converge d'où

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} e^{-t} g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.\end{aligned}$$

Solution 1.2.1

(1) On cherche les solutions de (E) sous la forme $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors

$$x^2 f''(x) + 4x f'(x) + 2f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

d'où $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$ grâce à l'unicité du développement en série entière (cf *proposition 7.1.1 page 284*).

(2) Pour déterminer f, on décompose la fraction rationnelle

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}$$

d'où :

$$\begin{aligned}f(x) &= \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} x^n}_{=g(x)} - \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} x^n}_{=h(x)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2(n+2)} x^n}_{=i(x)} \\ &= \frac{(1+x)^2}{2x^2} \left[\ln(1+x) - \frac{1}{2} \right] + \frac{3}{4} - \frac{1}{2x}\end{aligned}$$

car $g(x) = \dfrac{1}{2} \ln(1+x)$, $h(x) = -\dfrac{1}{x}(\ln(1+x) - x)$ et $i(x) = \dfrac{1}{2x^2}(\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2})$.
On pouvait remarquer plus simplement que (E) $\Leftrightarrow$ $(x^2 y)'' = \ln(1+x)$ et le problème se ramenait à trouver une primitive seconde de $\ln(1+x)$ et on trouve ainsi toutes les solutions de cette équation différentielle.

Solution 1.2.2 On cherche donc les solutions développables en série entière

$$\begin{aligned}y &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n & \times(-1) \\ y' &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} & \times 2 \\ y'' &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} & \times 4x\end{aligned}$$

(on a écrit des coefficients pour x^{-1} et pour x^{-2} mais ils sont nuls et cela permet d'éviter de distinguer certains cas).
Le coefficient de x^n pour tout n de $\mathbb{N}$ est donc nul et il vaut

$$\underbrace{-a_n}_{-y}+\underbrace{2(n+1)a_{n+1}}_{2y'}+\underbrace{4(n+1)na_{n+1}}_{4xy''}$$

(on a précisé l'intervention de chaque quantité de l'équation différentielle). On trouve alors $a_n=\dfrac{a_0}{(2n)!}$ ce qui correspond à une série entière de rayon infini.
Finalement, on obtient

$$f(x)=\begin{cases}a_0\operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si } x\geqslant 0\\ a_0\cos\sqrt{-x} & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}.$$

Solution 1.2.3

(1) Écrivons $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_nx^n$ ($|x|<R$) et $c_n=\sum\limits_{p=1}^{n-1}b_pb_{n-p}$ alors $f(x)^2=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}c_nx^n$ en faisant le produit de Cauchy du développement de f par lui-même. On obtient alors

$$\text{(E)}\Leftrightarrow b_1=1,\ b_2=b_3=0,\ (n+2)b_{n+2}=c_n\ ;$$

on montre alors, par une récurrence immédiate sur r, que : $b_{3r-1}=b_{3r}=0$ d'où

$$(3n+1)b_{3n+1}=\sum_{q=0}^{n-1}b_{3q+1}b_{3(n-q-1)+1}.$$

(2) Si on pose $a_n=b_{3n+1}$ et $d_n=3^na_n$ alors : $d_0=1$, $d_1=\dfrac{3}{4}$ et

$$(3n+1)d_n=3\sum_{q=0}^{n-1}d_qd_{n-q-1}=3d_{n-1}+3\sum_{q=1}^{n-1}d_qd_{n-q-1}.$$

Par récurrence :
- On a $d_1\leqslant d_0$,
- puis, si on suppose $d_q\leqslant d_{q-1}$ pour tout $q\leqslant n$ alors

$$(3n+1)d_n\leqslant 3d_{n-1}+(3n-2)d_{n-1}$$

en majorant d_qd_{n-q-1} par $d_{q-1}d_{n-q-1}$.

On a bien prouvé que (d_n) est décroissante.

(3) On en déduit alors $R\geqslant\sqrt[3]{3}$. En effet, la suite (d_n) est décroissante et minorée donc elle admet une limite $l\leqslant 1$. On a donc $a_n\leqslant\dfrac{1}{3^n}$ et la série entière $\sum\dfrac{x^{3n+1}}{3^n}$ admet un rayon de convergence égal à $\sqrt[3]{3}$ (s'inspirer de la *remarque 7.1.3 (vii) page 282*) donc $\sum a_nx^{3n+1}$ a un rayon de convergence $\geqslant\sqrt[3]{3}$ (même *remarque* (*i*).

Conclusion : grâce à l'unicité de la solution d'une équation différentielle (théorème de Cauchy-Lipschitz *théorème 8.8 page 303* alors l'équation (E) n'ayant qu'une solution développable en série entière en 0 vérifiant $y(0)=0$, on en déduit que f est bien développable en série entière.

Solution 1.2.4

(1) $x^2+2x+4=\dfrac{8-x^3}{2-x}=4\dfrac{1-(x/2)^3}{1-x/2}$ d'où

$$F(x)=2\ln 2+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{3n}}{3n2^n}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n2^n}\qquad R=2$$

ce que l'on peut encore écrire sous la forme $F(x)=2\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(2n\pi/3)}{2^{n-1}n}x^n$.

(2) • Si $a=0$ alors : $F_a(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1-x)^{-1}]=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n\qquad R=1.$

• Si $a>0$ alors : $F_a(x)=\dfrac{1}{2\operatorname{sh}a}\left(\dfrac{1}{e^{-a}-x}-\dfrac{1}{e^a-x}\right)$ (en décomposant la fraction rationnelle) d'où

$$F_a(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\operatorname{sh}(n+1)a}{\operatorname{sh}a}x^n,\qquad R=e^{-a}.$$

(3) $x^2\operatorname{Arctan}x=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{2n-1}$; $(1+x^2)\operatorname{Arctan}x=x+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2(-1)^nx^{2n+1}}{1-4n^2}$ d'où

$$G(x)=3(1+x^2)+8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{1-4n^2}\qquad R=1.$$

(4) On a $H'(x)=2g(x)$ où g vérifie l'équation différentielle $g'(x)(1-x^2)-xg(x)=1$. On cherche les solutions de cette équation différentielle développable en série entière (voir *milieu de la page 285*) et on trouve $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ (les calculs ont été faits à la *question (iii) page 87*) d'où

$$H(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2}\qquad R=1.$$

(5) On a, pour $|x|<1$,

$$\ln(1+x\sin^2 t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\sin^{2n+2}t.$$

Or la série mise ainsi en évidence converge normalement pour $t\in[0,2\pi]$ donc, grâce au *théorème 5.55 page 253* on peut intégrer terme à terme d'où

$$\int_0^{2\pi}\ln(1+x\sin^2 t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1}\int_0^{2\pi}\sin^{2n+2}t\,\mathrm{d}t.$$

On utilise alors les intégrales de Wallis pour conclure $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}.\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}2\pi.$

(6) f est l'unique solution de l'équation différentielle : $(x^2-1)y''+xy'-\alpha^2y=0$ vérifiant les conditions initiales $y(0)=0$, $y'(0)=\alpha$.
On trouve alors $a_{2n+1}=\dfrac{((2n-1)^2-\alpha^2)((2n-3)^2-\alpha^2)(\cdots)(1-\alpha^2)}{(2n+1)!}\alpha$ avec un rayon de convergence égal à 1 (faire le rapprochement avec le numéro 4 de cette série d'exercice).

Solution 1.2.5

(1) Si $|z| < 1$, comme $\left|\dfrac{z^{2p}}{q^{2p+2}}\right| \leqslant |z|^{2p}\dfrac{1}{q^2}$ et que chacune des séries $\sum |z|^{2p}$ et $\sum \dfrac{1}{q^2}$ est convergente, la série double $\sum \dfrac{z^{2p}}{q^{2p+2}}$ est bien convergente (cf *corollaire 5.47 page 247*).

(2) On écrit alors, pour $|z| < 1$:

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{z^{2p}}{q^{2p+2}} = \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^{2p}}{q^{2p+2}} = \sum_{q=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{q^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{q}\right)^{2p}\right)$$
$$= \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2}\frac{1}{1-(z/q)^2} = \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2-z^2}$$

grâce au théorème d'interversion de sommations (*théorème 5.47 page 247*).

(3) On obtient alors immédiatement

$$\pi \operatorname{cotan} \pi x - \frac{1}{x} = -\sum_{p=0}^{+\infty} 2\zeta(2p+2)x^{2p+1} \tag{1}$$

avec un rayon de convergence égal à 1.

Remarque : avec la relation $\tan x = \operatorname{cotan} x - 2\operatorname{cotan} 2x$ (pour $x \neq 0$) on déduit de (1) le développement en série entière de $\tan x$:

$$\tan x = 2\sum_{p=0}^{+\infty}\zeta(2p+2)\frac{2^{2p+1}-1}{\pi^{2p+2}}x^{2p+1}, \quad R = \frac{\pi}{2}.$$

Solution 1.2.6

(1) Vrai pour $n = 0$ et après dérivation, on obtient les relations

$$P_{n+1} = 2X^3P_n - X^2P_n' + X^2Q_n \text{ et } Q_{n+1} = 2X^3Q_n - X^2Q_n' - X^2P_n,$$

la propriété est récurrente.

(2) Par continuité : $f^{(n)}(0) = 0$ et donc f n'est pas développable en série entière sinon f serait nulle dans un voisinage de 0, ce qui n'est pas le cas (cf *remarque 7.1.7 (i) page 284*).

Solution 1.2.7

(1) En partageant l'intégrale on a

$$f(x) = \int_{-\pi}^{0} e^{i(t-x\sin t)}\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{\pi} e^{i(t-x\sin t)}\,\mathrm{d}t$$

et après le changement de variable $u = -t$ dans la première intégrale, on obtient :

$$f(x) = 2\int_0^\pi \cos(t - x\sin t)\,\mathrm{d}t$$

et par conséquent f est bien à valeurs réelles.

(2) En développant $\cos(t - x\sin t)$ on a :

$$\frac{f(x)}{2} = \int_0^\pi \cos t\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \sin t\sin(x\sin t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin^{2n+2} t\,\mathrm{d}t$$

car la première intégrale est nulle ($\displaystyle\int_0^\pi \cos t\cos(x\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,[\sin(x\sin t)]_0^\pi = 0$ même si $x=0$).

La série (en t) étant normalement convergente, on en tire (avec les intégrales de Wallis) :

$$f(x) = 2\pi\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2(n+1)}.$$

Solution 1.2.8

(1) On a $\forall x\in]-1,+1[$:

$$\sqrt{1-x} = 1-\frac{x}{2}-\sum_{n=2}^{+\infty}u_nx^n$$

où $u_n = \dfrac{1\times3\times\cdots\times(2n-3)}{2^nn!} = \dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}$ (voir *page 285* le développement en série entière de $(1+t)^\alpha$).

Or $|u_nx^n|\leqslant u_n$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\dfrac{3}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc la série $\sum u_n$ converge (c'est la *règle de Duhamel page 241*).

Conclusion $\sum u_nx^n$ converge normalement sur [-1,+1] donc uniformément.

(2) Si $x\in[-1,+1]$ alors $1-x^2\in[-1,+1]$. Il suffit de prendre $P_n(x) = S_n(1-x^2)$ où $S_n(x) = 1-\dfrac{x}{2}-\sum\limits_{k=2}^{n}u_kx^k$.

Solution 1.2.9 Le premier problème ici est de calculer A^n, or, en écrivant $A=-I+B$, alors, comme $B^3=0$, on a

$$A^n = (-1)^n(I-nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2).$$

On en déduit que $U_n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & 0\\ c_n & a_n & -b_n\\ -b_n & 0 & a_n\end{pmatrix}$ où $a_n = \dfrac{x^n}{n2^n}$, $b_n = \dfrac{x^n}{2^n}$, $c_n = (n-1)\dfrac{x^n}{2^{n+1}}$ et donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}U_n = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0\\ c & -a & b\\ b & 0 & -a\end{pmatrix}$ (pour $|x|<2$ car chacune des séries figurant dans la matrice converge ssi $|x|<2$) avec $a=\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$, $b=\dfrac{x}{x-2}$, $c=\dfrac{x^2}{2(2-x)^2}$ et cette série converge pour $|x|<2$.

Solution 1.2.10

(1) Par une récurrence immédiate on a

$$f(x)-f(x/2^n) = \operatorname{Arctan}x/2+\cdots+\operatorname{Arctan}x/2^n$$

et, à la limite : $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Arctan}x/2^n + f(0)$ car la série $\sum\operatorname{Arctan}x/2^n$ converge ($\operatorname{Arctan}x/2^n\sim x/2^n$) et f est continue en 0.

Comme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Arctan}\dfrac{x}{2^n}$ converge normalement sur $[-1,+1]$ (on sait que $|\operatorname{Arctan}x/2^n|\leqslant 1/2^n$), f est bien définie et continue en 0 et vérifie bien la relation.

Conclusion : l'ensemble des solutions de (1) continues en 0 est $\mathbb{R}+\sum_{n=1}^{+\infty}\operatorname{Arctan}\dfrac{x}{2^n}$ qui est une droite affine.

(2) Si $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n(2^n-1)=\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2p+1}}{2p+1}$ et grâce à l'unicité du développement en série entière (cf *proposition 7.1.1 page 284*)

$$a_{2p}=0,\ a_{2p+1}=\frac{(-1)^p}{(2p+1)(2^{2p+1}-1)},\ a_0=f(0)\text{ et }R=2.$$

Comme l'ensemble des solutions continues en 0 est une droite affine (c'est ce qu'on a prouvé au 1.) et qu'il en est de même pour les solutions développables en série entière, on en déduit le résultat.

Solution 1.2.11 Tous les rayons de convergences sont obtenus en utilisant le *théorème 7.4 page 282*.

(1) $R=2$ puis, comme

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=x\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},$$

alors $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n=f(x/2)=\dfrac{2x}{(2-x)^2}$.

(2) $R=+\infty$, puis $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\begin{cases}\operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si } x\geqslant 0,\\ \cos\sqrt{-x} & \text{si } x<0\end{cases}$.

(3) $R=1$, puis

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}=1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x).$$

(4) $R=1$, puis

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n\right)'=f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{4n-2}=\frac{x^2}{1-x^4}$$

d'où $f(x)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\operatorname{Arctan}x\right]$.

(5) $R=+\infty$, puis, comme $\dfrac{n^2+4n-1}{n+4}=n-\dfrac{1}{n+4}$ on peut écrire

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=xe^x-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+4)n!}=xe^x-\frac{F(x)}{x^4}$$

avec $F'(x)=x^3e^x$ d'où $F(x)=e^x(x^3-3x^2+6x-6)+6$ ($F(0)=0$) et en conclusion

$$f(x)=\frac{(x^5-x^3+3x^2-6x+6)e^x-6}{x^4}.$$

Solution 1.2.12 Si $\alpha=\sup(|u_0|,|u_1|)$, on montre que par une récurrence immédiate que $|u_n|\leqslant 3^{n-1}\alpha$ d'où $R=+\infty$.

On aurait pu aussi résoudre directement la récurrence mais cette méthode n'est pas généralisable au cas de toutes les suites récurrentes.

Si on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{x^n}{n!}$ alors f vérifie l'équation différentielle $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0$ que l'on sait résoudre (cf *proposition 2.2.5 page 40*) ce qui donne finalement

$$f(x) = [(u_1 - u_0)x + u_0]e^x.$$

Solution 1.2.13 On remarque tout d'abord que $R = +\infty$ (on utilise la règle de d'Alembert, *application (i) page 241*, avec u_n). Le calcul des dérivées nous donne $f'''(x) = f(x)$ donc f s'écrit sous la forme

$$f(x) = \lambda e^x + \mu e^{jx} + \nu e^{j^2 x}.$$

Les conditions initiales nous donnent : $\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{3}$ d'où le résultat final

$$f(x) = \frac{e^x}{3} + \frac{2}{3}e^{-x/2}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Une autre méthode est de poser $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$, $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$. On a alors

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) + h(x) &= e^x \\ f(x) + jg(x) + j^2h(x) &= e^{jx} \\ f(x) + j^2g(x) + jh(x) &= e^{j^2x} \end{aligned}$$

d'où $f(x) = \frac{1}{3}(e^x + e^{jx} + e^{j^2x})$ en faisant la somme.

Solution 1.2.14

(1) C'est un résultat classique : $\sum_{n=0}^{+\infty} \tau_n z^n$ est le produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{2n}$ et de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^{3n}$. On a la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \tau_n z^n = \frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)} \tag{1}$$

Son rayon de convergence R est supérieur ou égal à 1 (cf *théorème 7.5 page 283*). Comme τ_n ne tend pas vers 0, on en déduit que $R \leqslant 1$ donc $R = 1$.

(2) Pour calculer τ_n on utilise (1), ce qui donne les égalités :

$$(1-z^2)\sum_{n=0}^{+\infty} \tau_n z^n = \frac{1}{1-z^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

où $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } 3|n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a alors les relations,

$$\tau_0 = 1,\ \tau_1 = 0,\ \tau_n - \tau_{n-2} = a_n$$

et finalement $\tau_{2n} = 1 + E\left(\frac{n}{3}\right)$, $\tau_{2n+1} = 1 + E\left(\frac{n-1}{3}\right)$.

Remarque : les calculs faits ainsi sont plus simples que si l'on avait décomposé la fraction rationnelle $\frac{1}{(1-z^2)(1-z^3)}$.

Solution 1.2.15 On a $u_{n+1} = (u*u)_n$ (produit de Cauchy *définition 5.3.6 page 247*) d'où l'idée de faire intervenir la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ (en supposant que son rayon de convergence R soit > 0).
f vérifie $f(0) = 1$ et $xf^2(x) = f(x) + 1$ d'où, en résolvant l'équation du second degré,

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Vu que f est continue en 0 (et que $f(0) = 1$) on peut affirmer que $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$, $|x| < R$.
En cherchant le développement en série entière de f, on trouve $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!} x^n$.
On vérifie à posteriori que $R = \dfrac{1}{4}$ ce qui justifie les calculs faits. D'où la valeur

$$u_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Solution 1.2.16

(1) Par une récurrence immédiate, on vérifie que $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.
Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à 1 (on utilise la *remarque 7.1.3 (i) page 282* et le fait que les séries entières $\sum x^n$ et $\sum n^2 x^n$ ont un rayon de convergence égal à 1).

(2) On a

$$(1-x)f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1}) x^n = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n} a_{n-2} x^n.$$

En dérivant, on arrive à $(1-x)f'(x) - f(x) = 2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} x^{n-1} = 2xf(x)$.
f est l'unique solution de l'équation différentielle

$$(1-x)y' - (1+2x)y = 0$$

vérifiant $f(0) = 1$ (on utilise le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire *proposition 2.2.3 page 39 ou théorème 8.1 page 297*).
L'intégration est immédiate, on trouve donc $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$.
Enfin, on utilise le produit de Cauchy de deux séries pour conclure :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-2)^n}{n!} x^n \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} (-2)^p \frac{(n-p+1)(n-p+2)}{2p!} \right) x^n \end{aligned}$$

(pour écrire le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^3}$ on a utilisé le résultat de la *question (i) page 248* mais on pouvait aussi dériver deux fois le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-x}$). On obtient finalement

$$a_n = \sum_{p=0}^{n} (-2)^p \frac{(n-p+1)(n-p+2)}{2p!}.$$

Solution 1.2.17

(1) On réécrit la relation (1) sous la forme

$$2\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\frac{a_{n-k}}{(n-k)!}. \tag{2}$$

Si on suppose, par récurrence, que $\dfrac{a_k}{k!}\leqslant 1$ alors $\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)!}\leqslant\dfrac{1}{2}\leqslant 1$ donc la série entière $S(x)$ a un rayon de convergence $\geqslant 1$ (cf *remarque 7.1.3 (i) page 282*).

En fait on peut prouver directement que $\dfrac{a_k}{k!}=\dfrac{1}{2^k}$ mais il ne faut pas gâcher le suspens !

(2) Dans la relation (2), on reconnaît un produit de Cauchy soit

$$S^2(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\frac{a_{n-k}}{(n-k)!}\right)x^n=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}(n+1)x^n=2S'(x).$$

On a donc $S^2(x)=2S'(x)$ d'où, par intégration : $S(x)=\dfrac{1}{1-x/2}$ i.e. $a_n=\dfrac{n!}{2^n}$, le rayon de convergence souhaité est 2.

Solution 2.1.1

(1) Après intégrations par parties et récurrence : $c_p(f^{(n)})=(ip)^n c_p(f)$ (cf *proposition 7.2.4 page 289*).

(2) On a $|(ip)^n c_p(f)|\leqslant Mk^n$ d'où $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ |c_p(f)|\leqslant M\left(\dfrac{k}{p}\right)^n$ et si $\dfrac{k}{p}<1$ alors $c_p(f)=0$ (en prenant la limite quand $n\to+\infty$).

Solution 2.2.1

(1) Après calculs on trouve

$$F(x)=\Re\left(\frac{1}{1+e^{2ix}/4}\right)=\Re\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{2p}}e^{2ipx}\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\cos(2px).$$

(On a utilisé la méthode décrite dans l'*exemple (v) page 293.*)

(2) On utilise la formule $b_n(f)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$ (attention à ne pas intégrer sur $[-\pi,\pi]$). On trouve alors

$$f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{\sin(2p+1)x}{(2p+1)^3}.$$

Avec $x=\dfrac{\pi}{2}$ on a $\sin(2p+1)x=(-1)^p$ d'où

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

Avec Parseval (cf *corollaire 7.13 page 291*) on obtient

$$\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^5}{15}=\frac{64}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^6}\times\frac{\pi}{2}$$

d'où $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} = \frac{\pi^6}{480}$. Or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^6} + \frac{1}{2^6} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$ ce qui donne finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

(3) $g(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}\right]$;

Pour $x = 0$ on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

(4) En utilisant la même technique qu'au 1. on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{x\sin t}{x^2 - 2x\cos t + 1} &= \frac{ix}{2}\left[\frac{1}{x - e^{it}} - \frac{1}{x - e^{-it}}\right]\\ &= \frac{i}{2}\left[\frac{1}{1 - e^{-it}/x} - \frac{1}{1 - e^{it}/x}\right]\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{x^n} \quad (|x| > 1).\end{aligned}$$

Solution 2.2.2 Si on pose $f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}x^2 = \frac{\pi^2}{6} + \frac{x}{4}(x - 2\pi)$ alors $f(2\pi - x) = f(x)$ donc f se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction 2π-périodique paire, continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On a alors $b_n = 0$, $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{1}{n^2}$ ce qui donne la relation attendue (on utilise le théorème de Dirichlet–plus précisément le *théorème 7.15 page 292*–).

Solution 2.2.3

(1) Comme f est paire on a $b_n = 0$ et $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^3 t \cos nt \,\mathrm{d}t$ d'où : $a_{2p+1} = 0$, $a_{2p} = \frac{24}{\pi(4p^2-1)(4p^2-9)}$ et donc :

$$|\sin^3 t| = \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{3} + 24\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos 2pt}{(4p^2-1)(4p^2-9)}\right),$$

la série converge normalement (ce qui était prévisible car les hypothèses du *théorème 7.15 page 292* étaient remplies).

(2) Avec la formule de Parseval (*corollaire 7.13 page 291*) on a :

$$\int_0^{2\pi} \sin^6 t \,\mathrm{d}t = 2\pi \times \frac{5}{16} = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{16}{9} \times 2\pi + 576\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\pi}{(4p^2-1)^2(4p^2-9)^2}\right).$$

Solution 2.2.4

(1) On écrit $f(x_{k+1}) - f(x_k) = g(x_{k+1}) - g(x_k) - [h(x_{k+1}) - h(x_k)]$ d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| &\leqslant \sum_{k=0}^{2n-1} g(x_{k+1}) - g(x_k) + \sum_{k=0}^{2n-1} h(x_{k+1}) - h(x_k)\\ &\leqslant g(2\pi) - g(0) + h(2\pi) - h(0)\end{aligned}$$

ce qui permet de prendre $A = g(2\pi) - g(0) + h(2\pi) - h(0)$ (et qui signifie effectivement que f est à variation bornée).

(2) On utilise l'inégalité immédiate

$$\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]^2 \leqslant \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\left|f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right|$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{2n}\left[f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]^2 \leqslant A\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

En effet, soit k_0 le seul entier tel que $x + \dfrac{k_0\pi}{n} \leqslant 2h\pi < x + \dfrac{(k_0+1)\pi}{n}$. On pose alors $x_0 = 0$, $x_1 = x + \dfrac{(k_0+1)\pi}{n} - 2h\pi, \ldots, x_k = x + \dfrac{(k_0+k)\pi}{n} - 2h\pi$ (et si $x_{2n} < 2\pi$ on rajoute un terme). Ceci permet d'écrire, en utilisant la 2π-périodicité de f,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n}\left|f\left(x+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(x+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right| &= \sum_{k=1}^{2n-1}|f(x_{k+1}) - f(x_k)| + |f(x_{2n-1}) - f(x_1)| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{2n}|f(x_{k+1}) - f(x_k)|\end{aligned}$$

car $|f(x_{2n-1}) - f(x_1)| \leqslant |f(x_{2n-1}) - f(x_{2n})| + |f(x_0) - f(x_1)|$ et $f(x_{2n}) = f(x_0)$.
Remarque : on aurait pu se ramener à $[0, 4\pi]$ (en prenant une autre constante A) ce qui évite le cas gênant

(3) On va utiliser la relation de Chasles : on note $g(x) = \left[f\left(x+\dfrac{\pi}{2n}\right) - f\left(x-\dfrac{\pi}{2n}\right)\right]^2$ on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{2n}\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} g(x)\,\mathrm{d}x$. Dans chaque intégrale, on fait le changement de variable : $t = x + \dfrac{\pi}{2n} - \dfrac{k\pi}{n}$ et on obtient

$$\int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi/2n}^{+\pi/2n}\sum_{k=1}^{2n}\left[f\left(t+\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(t+\frac{(k-1)\pi}{n}\right)\right]^2\mathrm{d}t \leqslant \frac{A\pi}{n}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

(4) Si on pose $h(x) = f\left(x+\dfrac{\pi}{2n}\right) - f\left(x-\dfrac{\pi}{2n}\right)$ alors on peut calculer le coefficient de Fourier de h : $\widehat{h}(p) = 2i\widehat{f}(p)\sin\left(\dfrac{p\pi}{2n}\right)$.
On applique la relation de Parseval à h (cf *corollaire 7.13 page 291*) :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|h(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{p\in\mathbb{Z}}|\widehat{h}(p)|^2 = \sum_{p\in\mathbb{Z}}4|\widehat{f}(p)|^2\sin^2\left(\frac{p\pi}{2n}\right) \leqslant \frac{AC\pi^\alpha}{2n^{1+\alpha}}$$

(en utilisant l'inégalité du 3.).
On pose alors $B = \dfrac{AC\pi^\alpha}{8}$ et on majore $|\widehat{f}(n)|^2$ par $\sum\limits_{p\in\mathbb{Z}}|\widehat{f}(p)|^2\sin^2\left(\dfrac{p\pi}{2n}\right)$ ce qui donne le résultat.

Solution 2.2.5 Il s'agit de l'inégalité isopérimétrique et on applique l'égalité de Parseval (cf. *corollaire 7.13 page 291*) :
on a $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\widehat{f}(n)|^2$ (avec $\widehat{f}(0) = 0$ par hypothèse). De même avec f' :

$\displaystyle\int_0^{2\pi} f'^2(t)\,dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f'}(n)|^2$. On remarque que $|\widehat{f'}(n)| = |n|.|\widehat{f}(n)| \geqslant |\widehat{f}(n)|$ pour $|n| \geqslant 1$ ce qui donne immédiatement l'inégalité souhaitée.

Solution 2.3.1

(1) On a : $x = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^p 4}{\pi(2p+1)^2} \sin(2p+1)x$ où $x \in [-\pi/2, +\pi/2]$ en développant en série de Fourier la fonction impaire définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si } x \geqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$; on pose alors $t = \dfrac{2nx}{\pi}$ ce qui donne la formule.

(2)

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \sum_{k=0}^{n} ik\lambda_k e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} i\lambda_k e^{ikx} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 8n}{\pi^2(2p+1)^2} \sin\left((2p+1)\frac{\pi k}{2n}\right) \\ &= n \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 8i}{\pi^2(2p+1)^2} \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{ikx} \sin\left(\frac{\pi}{2n}(2p+1)k\right)\right) \end{aligned}$$

(on peut permuter les deux sommes car on a une somme finie) d'où l'inégalité demandée en prenant les modules.

(3) On remarque que (en prenant $t = n$ dans (1)) $\sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{8}{\pi^2(2p+1)^2} = 1$ et, en utilisant les formules d'Euler, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2n}(2p+1)k\right) = \dfrac{1}{2i}\left(e^{ik(2p+1)\pi/(2n)} - e^{-ik(2p+1)\pi/(2n)}\right)$ d'où

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{ikx} \sin\left(\frac{\pi}{2n}(2p+1)k\right)\right| &\leqslant \frac{1}{2}\left(\left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \exp\left[ik\left(x + (2p+1)\frac{\pi}{2n}\right)\right]\right| + \right. \\ &\qquad \left. + \left|\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \exp\left[ik\left(x - (2p+1)\frac{\pi}{2n}\right)\right]\right|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left[P(x + (2p+1)\frac{\pi}{2n})\right] + \left[P(x - (2p+1)\frac{\pi}{2n})\right] \\ &\leqslant \frac{1}{2}(\|P_n\| + \|P_n\|) \end{aligned}$$

et, en conclusion

$$|P_n'(x)| \leqslant n \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi^2(2p+1)^2} \|P_n\| = n\|P_n\|$$

en utilisant la remarque du début du 3.

Solution 2.3.2

(1) On écrit la somme en deux parties, les indices positifs d'une part, les indices négatifs d'autre part. On vérifie alors la convergence normale des séries et des séries dérivées sur tout intervalle $[-a, +a]$ où $a > 0$. On peut alors conclure car les fonctions sont toutes continues sur $\mathbb{R}$.

(2) On vérifie ensuite que f est 1-périodique, calculons $\widehat{f}(n)$:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \int_0^1 \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2t} - 2i\pi nx\right) \mathrm{d}x\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^1 \exp\left(-\frac{(x-k)^2}{2t} - 2i\pi nx\right) \mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

car les séries convergent uniformément sur $[0,1]$ et on peut utiliser le *corollaire 5.55 page 253*.
En tenant compte de la périodicité de la fonction $e^{-2i\pi nx}$ on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\int_k^{k+1} \exp\left(-\frac{y^2}{2t} - 2i\pi ny\right) \mathrm{d}y\right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2t} - 2i\pi ny\right) \mathrm{d}y \\ &= \sqrt{2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-u^2 - 2i\pi nu\sqrt{2t}\right) \mathrm{d}u \\ &= \sqrt{2t}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2 - 2inux)\, \mathrm{d}u \text{ avec } x = \pi\sqrt{2t}.\end{aligned}$$

La fonction $\varphi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-u^2 - 2inux\right) \mathrm{d}u$ est de classe C^1 car on peut utiliser le *théorème 6.26 page 268*. En effet

$$\left|-2inu \exp\left(-u^2 - 2inux\right)\right| = 2n|u|e^{u^2}$$

et la fonction $u \mapsto |u|e^{u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Les hypothèses de continuité sont vérifiées (produit et composée de fonctions continues).
On en déduit que $\varphi'(x) = -2n^2 x\varphi(x)$ i.e. $\widehat{f}(n) = \sqrt{2\pi t}e^{-2n^2\pi^2 t}$. La suite $(\widehat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, la propriété 7.3.5 permet alors de conclure.

Solution 2.3.3

(1) $\dfrac{1}{a^2 + (t+n\pi)^2} \sim \dfrac{1}{n^2\pi^2}$, terme général d'une série absolument convergente, donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et on vérifie que f est π-périodique.

(2) Si on pose $u_n(t) = \dfrac{1}{a^2 + (t+n\pi)^2}$ alors $u_n'(t) = -\dfrac{2(t+n\pi)}{(a^2 + (t+n\pi)^2)^2}$ et, à l'aide de l'inégalité $2ax \leqslant a^2 + x^2$ on obtient :

$$|u_n'(t)| \leqslant \frac{1}{a(a^2 + (t+n\pi)^2)} \leqslant \frac{1}{a(a^2 + (n-1)^2\pi^2)}$$

pour $t \in [-\pi, \pi]$. On a bien la convergence normale des séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n'(t)$ et $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} u_n'(t)$, par conséquent, f est de classe C^1 (on utilise le *corollaire 5.59 page 254*).

(3) Calculons $\widehat{f}(k)$:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-2ikt} f(t)\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2ikt} \frac{\mathrm{d}t}{a^2 + (t+n\pi)^2}\end{aligned}$$

et comme on a convergence normale de la série qu'on intégre, le *corollaire 5.55 page 253* s'applique

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{\pi}\frac{e^{-2ikt}\,\mathrm{d}t}{a^2+(t+n\pi)^2}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2ikt}\,\mathrm{d}t}{a^2+t^2}$$

en rassemblant les intégrales et en remarquant que

$$\int_0^{\pi}\frac{e^{-2ikt}\,\mathrm{d}t}{a^2+(t+n\pi)^2}=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{e^{-2ikt}\,\mathrm{d}t}{a^2+t^2}.$$

Le théorème de Dirichlet s'applique (cf *théorème 7.15 page 292*) donc f est égale à la somme de sa série de Fourier, soit

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2ikt}\,\mathrm{d}t}{a^2+t^2}\right)e^{i2kx}$$

les intégrales qui interviennent dans cette somme sont les transformées de Fourier de la fonction $\dfrac{1}{a^2+t^2}$ (résultat admis) d'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-2ikt}\,\mathrm{d}t}{a^2+t^2}=\frac{\pi}{a}e^{-2|k|a}$ et

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\pi}{a}e^{-2|k|a}e^{i2kx}\\
&= \frac{1}{a}\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty}\exp[2k(-a+ix)]}_{=\dfrac{1}{1-e^{-2k}e^{2ix}}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty}\exp[2k(-a-ix)]}_{=\dfrac{e^{-2a-2ix}}{1-e^{-2k}e^{-2ix}}}\Big)\\
&= \frac{1}{a}\frac{\operatorname{sh}2a}{\operatorname{ch}2a-\cos 2x}.
\end{aligned}$$

Solution 2.3.4

(1) $\|.\|$ est une norme : c'est classique (voir l'espace ℓ^1 *théorème 5.42 page 245*).

Soit maintenant une suite de Cauchy (X_p) de B : $X_p(s)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_{n,p}e^{2i\pi ns}$ alors pour tout n, la suite $c_{n,p}$ est une suite de Cauchy qui converge vers d_n. On montre alors que $Y=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}d_ne^{2i\pi ns}$ est un élément de B et que $\lim\limits_{p\to+\infty}X_p=Y$ (c'est la même démonstration que celle du *théorème 5.43 page 245*–voir la *remarque 5.3.8 même page*–).

(2) Soit $X=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}c_n\varepsilon_n$ et $Y=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}d_n\varepsilon_n$ où $\varepsilon_n(s)=e^{i2\pi ns}$. Soit $N\in\mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{p=-N}^{N}|c_pd_{n-p}| &\leqslant \sum_{p=-N}^{N}|c_p|.\sum_{p=-N}^{N}|d_{n-p}|\\
&\leqslant \sum_{p\in\mathbb{Z}}|c_p|.\sum_{p\in\mathbb{Z}}|d_{n-p}|
\end{aligned}$$

donc $\sum |c_p d_{n-p}|$, $p \in \mathbb{Z}$ converge. On pose alors $e_n = \sum\limits_{p\in\mathbb{Z}} c_p d_{n-p}$ et comme

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} |e_n| &\leqslant \sum_{n=-N}^{N} \sum_{p\in\mathbb{Z}} |c_p|.|d_{n-p}| \\ &\leqslant \sum_{p\in\mathbb{Z}} |c_p|. \sum_{n=-N}^{N} |d_{n-p}| \\ &\leqslant \sum_{p\in\mathbb{Z}} |c_p|. \sum_{p\in\mathbb{Z}} |d_{n-p}|\end{aligned}$$

alors $\sum |e_n|$ $n \in \mathbb{Z}$ converge.
On considère ensuite la fonction

$$Z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p d_{n-p} \right) \varepsilon_n \in B$$

alors

$$\begin{aligned}(\varepsilon_n|Z) &= (\varepsilon_n \overline{X}|Y) \text{ et grâce à Parseval} \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{\varepsilon_n X}}(p)\widehat{Y}(p) \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} c_{n-p} d_p\end{aligned}$$

ce qui donne $\widehat{Z}(n) = \widehat{XY}(n)$ et en conclusion $Z = XY$ car Z et XY sont continues (cf *corollaire 7.13 page 291*).

Solution 2.3.5 Montrons que la série $g(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$ converge : En effet

$$\int_0^1 f(x+t+n)\,\mathrm{d}t - f(x+n) = \int_0^1 (1-t) f'(x+t+n)\,\mathrm{d}u$$

(formule intégrale de Taylor). On a alors

$$\begin{aligned}f(x+n) &= \int_0^1 f(x+t+n)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t) f'(x+t+n)\,\mathrm{d}t \\ |f(x+n)| &\leqslant \int_0^1 |f(x+t+n)|\,\mathrm{d}t + \int_0^1 |(1-t) f'(x+t+n)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

en posant $u = x+t+n$ et en majorant $|1-t|$ par 1, on obtient

$$|f(x+n)| \leqslant \int_{x+n}^{x+n+1} |f(u)|\,\mathrm{d}u + \int_{x+n}^{x+n+1} |f'(u)|\,\mathrm{d}u$$

et chaque terme du second membre est le terme d'une série convergente (pour $n \geqslant 0$) grâce à l'intégrabilité de f et f'.
De plus $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} |f(x+n)| \leqslant \int_N^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t + \int_N^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ pour $x \in [0,1]$.
On a bien convergence uniforme de la somme sur $\mathbb{N}$ pour $x \in [0,1]$, on fait de même sur $-\mathbb{N}$.
On prouve aussi que g est 1-périodique.

On montre de même la convergence uniforme de la série des dérivées, donc $g(x)$ est de classe C^1, 1-périodique. Le calcul de $\widehat{g}(k)$ donne (grâce à la convergence uniforme)

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k) &= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+n)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+n)e^{-2i\pi kt}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(u)e^{-2i\pi ku}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

en posant $u = t + n$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi ku}\,\mathrm{d}u,$$

en faisant la "somme" des intégrales (cf exercices 2.3.2 et 2.3.3).
On applique ensuite le théorème de Dirichlet en $x = 0$ (cf *théorème 7.15 page 292*).

Solution 2.3.6 On remarque tout d'abord que $c_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.
On prouve la validité de ce résultat pour les polynômes trigonométriques et on l'étend par densité au fonctions continues.
Si f est un polynôme trigonométrique, on écrit

$$f(x) = \sum_{|p|\leqslant N} c_p e^{ipx},$$

Soit $I_n(f) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x+k\gamma)$ alors

$$I_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{|p|\leqslant N} c_p e^{ip(x+k\gamma)} = c_0 + \frac{1}{n}\sum_{|p|\leqslant N} c_p\sigma_p(x)$$

où

$$\sigma_p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{ip(x+k\gamma)} = e^{ipx}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{ip\gamma}\right)^k = e^{ipx}\frac{1-e^{ip(n-1)\gamma}}{1-e^{ip\gamma}}.$$

On a $|\sigma_p(x)| \leqslant \dfrac{2}{|\sin\frac{p\gamma}{2}|}$ donc

$$|I_n(f) - c_0| \leqslant \frac{2}{n}\sum_{p\in\mathbb{Z}^*}\frac{|c_p|}{|\sin\frac{\gamma}{2}|} \to 0$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si f est continue, on sait que f est limite uniforme d'une suite (f_q) de polynômes trigonométriques, donc on peut appliquer à chaque f_q le résultat ci-dessus, on utilise ensuite les inégalités $|I_n(f) - I_n(f_q)| \leqslant \|f - f_q\|_\infty$ et $|c_0(f) - c_0(f_q)| \leqslant \|f - f_q\|_\infty$ pour conclure.
Enfin, si f est continue par morceaux, il faut reprendre toute la démonstration, prouver que, dans $[0, 2\pi]$ la suite $x_k = x + k\gamma \mod 2\pi$ est équirépartie.

Solution 2.3.7 On remarque que la fonction $\theta \mapsto \dfrac{\sin^2\theta}{(1-2x\cos\theta+x^2)(1-2y\cos\theta+y^2)}$ est intégrable sur $]0,\pi[$ ssi $(x,y)\in D$ où $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(1,1),(-1,-1)\}$.
On remarque que $F(1/x,y)=x^2F(x,y)$ et $F(y,x)=F(x,y)$ donc on se limite au cas $|x|<1$, $|y|<1$.
On développe $\dfrac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$ en série de Fourier $\dfrac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}\sin n\theta$. $|x|<1$ la série est normalement convergente, on peut intégrer terme à terme (cf *corollaire 5.55 page 253*) :

$$F(x,y)=\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta}{1-2y\cos\theta+y^2}\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Pour calculer chaque intégrale, on développe à nouveau en série de Fourier et on trouve $F(x,y)=\dfrac{\pi}{2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(xy)^{n-1}$ d'où $F(x,y)=\dfrac{\pi}{2(1-xy)}$ pour $|x|<1$, $|y|<1$. On a alors

- $|x|<1$ et $|y|>1$, $F(x,y)=\dfrac{\pi}{2(y^2-xy)}$,
- $|x|>1$ et $|y|<1$, $F(x,y)=\dfrac{\pi}{2(x^2-xy)}$,
- $|x|>1$ et $|y|>1$, $F(x,y)=\dfrac{\pi}{2xy(xy-1)}$.

Si $x=1$ alors le calcul direct fournit

$$F(1,y)=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos\theta}{2(1-2y\cos\theta+y^2)}\,\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2(1-y)}$$

ce qui permet de prouver (en étudiant les autres cas, par symétrie) que F est continue sur D.

Solution 2.3.8 Montrons d'abord que $(i)\Rightarrow(ii)$:
Considérons pour cela $\Delta_n(x)=\sum\limits_{k=n}^{2n}a_k\sin kx$. On a

$$\Delta_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\geqslant a_{2n}\sum_{k=n}^{2n}\sin\left(\frac{2n-k}{2n}\pi\right)=a_{2n}\sum_{p=1}^{n}\sin\left(\frac{p}{2n}\pi\right)$$

on utilise alors la célèbre inégalité $\sin x\geqslant\dfrac{2}{\pi}x$ pour $x\in[0,\pi/2]$:

$$\Delta_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)\geqslant\frac{2}{\pi}a_{2n}\sum_{p=1}^{n}\frac{p\pi}{2n}=\frac{n+1}{2}a_{2n}\geqslant\frac{na_{2n}}{2}.$$

On exploite alors la convergence de la suite $\Delta_n\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$ vers 0.
$(ii)\Rightarrow(i)$: soit $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx=\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ pour $x\in]0,\pi]$. On a $|S_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$ et $|S_n(x)|\leqslant n$.
À l'aide de la transformation d'Abel (hors programme), on obtient

$$\sum_{k=n}^{n+p}a_k\sin kx=\sum_{k=n}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})S_k(x)-a_nS_{n-1}(x)+a_{n+p}S_{n+p}(x).$$

Grâce à l'hypothèse (ii), on sait que les deux dernières quantités écrites tendent vers 0 et, pour $x \in]0,\pi[$, $|(a_k - a_{k+1})S_k(x)| \leqslant \dfrac{a_k - a_{k+1}}{\sin \frac{x}{2}}$ qui est le terme général d'une série convergente.
Tout ceci nous assure la convergence simple de cette série sur $\mathbb{R}$.
Pour la convergence uniforme, majorons

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sin kx = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (a_k - a_{k+1})S_k(x) - a_{n+1}S_n(x).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et N tel que $n \geqslant N \Rightarrow na_n \leqslant \varepsilon$, pour $x \in]0,\pi[$, on pose $n_x = E(\pi/x)$.
On a $|a_{n_x+1}|S_{n_x}(x) \leqslant (n_x+1)a_{n_x+1}$. Puis $\sin \dfrac{x}{2} \geqslant \dfrac{x}{\pi} \geqslant \dfrac{1}{n_x+1}$ d'où $|S_k(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leqslant n_x + 1$ (pour $k \geqslant n_x$).
Pour $n_x < n$ on a $|R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}(a_k - a_{k+1})|S_k(x)| + a_{n+1}|S_n(x)| \leqslant (n_x+1)a_{n+1} + na_{n+1} \leqslant 2na_{n+1} \leqslant 3\varepsilon$ (pour $n \geqslant N$).
Si $N \leqslant n \leqslant n_x$ alors $|R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n_x} a_k|\sin kx| + |R_{n_x+1}(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n_x} xka_k + |R_{n_x+1}(x)| \leqslant n_x\varepsilon x + (2n_x+2)a_{n_x+2} \leqslant (\pi+3)\varepsilon$.
Comme $R_n(0) = R_n(\pi) = 0$ on a bien établi la convergence uniforme.