ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. Équations différentielles linéaires

1.1. Équations linéaires d'ordre 1.

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{I C}}$ Résolvante d'un système.

Soit $A(x) = (a_{ij}(x)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $a_{ij} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle :

$$Y' = A(x)Y \qquad (Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})). \tag{1}$$

(Remarquer ici que la fonction recherchée est une fonction à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{C}$.)

(1) Montrer que, pour tout $x_0 \in J$, (1) admet une solution unique Y vérifiant $Y(x_0) = I_n$ (que l'on note dans la suite : $x \mapsto R(x, x_0)$).
(2) Montrer que la solution de (1) qui vérifie $Y(x_0) = C$ ($C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) est donnée par
$$Y(x) = R(x, x_0).C.$$
En déduire que $\forall (u, v, w) \in J^3,\ R(u, w) = R(u, v).R(v, w)$ et que $R(v, u) = [R(u, v)]^{-1}$.
(3) Soit
$$X' = A(x)X \tag{2}$$
l'équation différentielle où $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $X_1, X_2, \dots, X_n$ un système fondamental. On note $Y(x)$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont donnés par $X_1(x), \dots, X_n(x)$. Montrer que $R(x_1, x_2) = Y(x_1).Y(x_2)^{-1}$.
(4) On pose $\Delta(x) = \det(R(x, x_0))$, montrer que $\Delta(x + h) = \Delta(x) \det\left[Y(x + h).Y(x)^{-1}\right]$. Puis, en utilisant la relation $\det(Y(x + h).Y(x)^{-1}) = 1 + h \operatorname{Tr}(A(x)) + o(h)$ (que l'on demande de démontrer), en déduire que
$$\Delta(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \operatorname{Tr}(A(t))\,\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{D}}$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée $A = [a_{ij}]$ et $y \in \mathbb{R}^n$ noté $y = (y_i)$. On dit que

- $A \geqslant 0$ si $a_{ij} \geqslant 0$ pour tout $(i, j) \in [1, n]^2$,
- $y \geqslant 0$ si $y_i \geqslant 0$ pour tout $i \in [1, n]$.

De même, on note $A > 0$ si tous les coefficients de A sont strictement positifs.

(1) Soit
$$y' = A(t)y + B(t)$$
une équation différentielle où $A \in C([0, +\infty[, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in C([0, +\infty[, \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$, $t_0 \in I$ et $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$ de limite x. On note y_p la solution de cette équation satisfaisant la condition initiale $y_p(t_0) = x_p$ et y celle vérifiant $y(t_0) = x$.
Montrer que, pour tout $t \in I$, $\lim\limits_{p\to+\infty} y_p(t) = y(t)$.
(2) On reprend l'équation du 1. avec $B = 0$ et $A(t) \geqslant 0$.
Montrer que si y est une solution vérifiant $y(t_0) > 0$ alors, $\forall t \geqslant t_0$, $y(t) > 0$.

(3) Soit $A \in C([0,+\infty[,\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ telle que $\forall t \in [0,+\infty[,\ A(t) \geqslant 0$.
Montrer qu'il existe une solution non nulle y de $y' + A(t)y = 0$ telle que $\forall t \in [0,+\infty[$: $y(t) \geqslant 0$ et $y'(t) \leqslant 0$.

1.2. Équations linéaires à coefficients constants.

Exercice 1.2.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Résoudre les systèmes différentiels : (t est la variable).

1. $\begin{cases} x' = x + y + \cos t \\ y' = 4x + 2y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y + \cos t \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -x + 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = -x + 2y + e^{3t}\operatorname{Arctan} t \\ y' = 2x + 2y + 2e^{3t}\operatorname{Arctan} t \end{cases}$

5. $\begin{cases} x' = 7x + 2y - 2z + t \\ y' = 2x + 4y - z + 2t \\ z' = -2x - y + 4z - t \end{cases}$

6. $\begin{cases} x' + x + y = t^2 \\ y' + y + z = t \\ z' + z \qquad = 1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' + 2y' + z' &= x - t \\ \qquad y' + 3z' &= y - 4 \\ \qquad\qquad z' &= z + t - 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x' = -4x + y + z + te^{-t} \\ y' = x - y - 2z \\ z' = -2x + y - z \end{cases}$

9. $\begin{cases} x' = 3x - 3y + z + t \\ y' = x + t + 1 \\ z' = y + t - 1 \end{cases}$

Exercice 1.2.2. $\boxed{\textbf{F T}}$

Résoudre $\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = x - y + z \\ z' = x + y - z \end{cases}$ avec les conditions initiales : $x(0) = 3$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

Dessiner la projection de la courbe solution sur xOy.

Exercice 1.2.3. $\boxed{\textbf{I}}$

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Quelle est la trajectoire du point M de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = A(\overrightarrow{OM})$?

Exercice 1.2.4. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ dont les valeurs propres ont des parties réelles strictement négatives et $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$, $P = \{f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^n), T\text{-périodiques}\}$ muni de la norme infinie sur $\mathbb{R}$.

(1) Soit $f \in P$, f non constante de plus petite période T, montrer que

$$(\mathrm{E}_f) \qquad g' = Ag + f(t)$$

possède une unique solution $\varphi_f \in P$.

(2) Montrer que φ_f est l'unique solution périodique de (E_f).

(3) Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $(\forall f \in P)$, $\|\varphi_f\| \leqslant K\|f\|$.

1.3. Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2.

EXERCICE 1.3.1. **F**

Résoudre l'équation $y(0) = 2$, $y' + 5\displaystyle\int_0^x y(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = 10$.

EXERCICE 1.3.2. **I**

Soit l'équation différentielle

(E) $$x'' + (1+\varphi(t))x = 0$$

où φ est une fonction continue intégrable sur $[0,+\infty[$. Soit f une solution de (E) sur $[0,+\infty[$. On pose $g(t) = f(t) + \displaystyle\int_0^t \sin(t-u)\varphi(u)f(u)\,\mathrm{d}u$.

(1) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $g''(t) + g(t) = 0$.
(2) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que
$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |f(t)| \leqslant a + \int_0^t |\varphi(u)|.|f(u)|\,\mathrm{d}u.$$
(3) Montrer que toute solution de (E) est bornée sur $[0,+\infty[$.

EXERCICE 1.3.3. **I**

Soient $(a,b) \in C(]c,d[,\mathbb{R})$ et $f \neq 0$ une solution de

(E) $$y'' + ay' + by = 0.$$

Montrer que f admet un nombre fini de 0 sur tout intervalle $[\alpha,\beta] \subset]c,d[$.
Que penser de l'exemple suivant ; $y'' + \dfrac{2}{x}y' + \dfrac{1}{x^4}y = 0$ qui admet la solution $\sin\dfrac{1}{x}$?

EXERCICE 1.3.4. **F T**

Chercher les solutions développables en série entière pour :

(1) $x(x+2)y' - (x+1)y - 1 = 0$ (2) $(x^2-1)y'' - 12y = 0$ (3) $(x^2+x)y'' + y' + y = 0$
(4) $x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$ (5) $y'' + x^2y = 0$ (6) $x^2y'' + x(x+1)y' - y = 0$

On cherchera les solutions de (6) sous la forme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r}$, $a_0 \neq 0$.

EXERCICE 1.3.5. **I T**

Intégrer les équations différentielles suivantes (on ne cherchera dans un premier temps que les solutions développables en série entière) :

1. $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$
2. $4xy'' + 2y' - y = 0$
3. $x(x+1)y'' + (3x+1)y' + y = 0$
4. $xy'' + y' - 3x^2y = 0$.

EXERCICE 1.3.6. **I T**

Résoudre les équations différentielles (on cherchera une solution particulière simple) :

1. $(x^2-1)y'' + xy' - y = 0$
2. $\dfrac{1}{2}(1-x^2)y'' + xy' - y = 0$
3. $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = 0$
4. $(1-3x+2x^2)y'' + 2(4x-3)y' + 4y = 0$.

Exercice 1.3.7. $\boxed{\textbf{I}}$

Résoudre l'équation

$$4xy'' + 2y' + y = 0 \tag{E}$$

sachant qu'il existe deux solutions f et g, définies sur un intervalle I, telles que $fg = 1$ sur I.

Exercice 1.3.8. $\boxed{\textbf{I}}$

Résoudre l'équation

$$2y'' + 5y' + 3|y| = 0. \tag{E}$$

Exercice 1.3.9. $\boxed{\textbf{D}}$

Résoudre l'équation différentielle (E) en factorisant le déterminant :

$$\begin{vmatrix} y'' & y' & y \\ y & y'' & y' \\ y' & y & y'' \end{vmatrix} = 0. \tag{E}$$

Exercice 1.3.10. $\boxed{\textbf{D}}$

Soit $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ et y une solution non nulle de l'équation différentielle $y'' = fy$, qui vérifie $y(0) = y(1) = 0$. Montrer que

$$\int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x \geqslant 4.$$

Exercice 1.3.11. $\boxed{\textbf{D}}$

Soient f et g dans $C([a,b], \mathbb{R})$ telles que $f \leqslant g$ et deux fonctions y et z de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$y'' + f(x)y = 0, \;\; z'' + g(x)z = 0, \;\; y(a) = y(b) = 0, \;\; y'(a) > 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a,b]$ tel que $z(c) = 0$.

Exercice 1.3.12. $\boxed{\textbf{D}}$

Soit $A = \{u \in C^1([a,b], \mathbb{R}) \mid \displaystyle\int_a^b u^2(t) \, \mathrm{d}t = 1\}$, $\alpha \leqslant 0$ et $f \in C([a,b], \mathbb{R})$. On définit

$$\varphi \; : u \in C^1([a,b], \mathbb{R}) \mapsto \int_a^b \Big(u'^2(t) + f(t)u^2(t) \Big) \, \mathrm{d}t - \alpha u^2(b).$$

(1) Montrer que φ admet une borne inférieure λ_0 sur A.
(2) Pour $\lambda < \lambda_0$ et y solution sur $[a,b]$ de l'équation

$$y'' + (\lambda - f)y = 0 \text{ avec } y'(a) = 0, \;\; y'(b) = \alpha y(b),$$

montrer que $y = 0$ sur $[a,b]$.

Exercice 1.3.13. **D**

Soit l'équation différentielle

(E) $$|y'| + 3x^2y = 0.$$

(1) Montrer qu'une solution de (E) sur I intervalle qui s'annule en un point s'annule partout. Résoudre (E) localement.
(2) Chercher les solutions maximales de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Préciser les courbes intégrales et chercher le nombre de courbes passant par un point de $\mathbb{R}^2$.

---

2. Équations différentielles non linéaires

2.1. Équations non linéaires.

Exercice 2.1.1. **F**

Chercher les courbes intégrales de

$$(ax + by + e)x' + (bx + dy + f)y' = 0$$

où x' et y' désignent les dérivées de x et y par rapport à t.
Nature des courbes intégrales.

Exercice 2.1.2. **I T**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' = e^x + e^{x+y}$
2. $x^2 - y^4 - xy\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 0$
3. $(e^y - 1)y'x = e^y - 2$
4. $xy' - x\sqrt{y} - y = 0$
5. $y' = y^2 + y + 1$, que dire de l'intervalle de définition d'une solution maximale ?

2.2. Systèmes différentiels autonomes.

Exercice 2.2.1. **I**

Soit l'équation

(E) $$y' = (1 + i)y - |y|^2y$$

(où $y\ : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et y' désigne la dérivée par rapport au paramètre t).

(1) Montrer qu'une solution qui s'annule en un point s'annule partout. On écarte ce cas là par la suite.
(2) Trouver l'équation différentielle (e) vérifiée par $u = |y|^2$.
(3) Écrire l'équation vérifié par $v = \dfrac{1}{u}$, en déduire les solutions maximales de (e).
(4) Chercher les solutions maximales de (E).

Exercice 2.2.2. **I**

Chercher les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ du système

$$\begin{cases} yz = x \\ y'z' = 1 \end{cases}$$

(où x est le paramètre de dérivation).

EXERCICE 2.2.3. $\boxed{\textbf{I C}}$
Soit $a \in \mathbb{R}_+$, étudier les courbes intégrales du système

$$\begin{cases} x' = y + x\sqrt{x^2+y^2-a^2} \\ y' = -x + y\sqrt{x^2+y^2-a^2} \end{cases}$$

(i.e. préciser les courbes $t \mapsto (x(t), y(t))$).

EXERCICE 2.2.4. $\boxed{\textbf{I T}}$
Soit l'équation différentielle

(E) $$(xy' - y)y'' + 4y'^2 = 0.$$

Trouver une représentation paramétrique de certaines courbes intégrales (on prendra $u = \dfrac{y'}{y}$, puis $v = xu$).

EXERCICE 2.2.5. $\boxed{\textbf{I}}$
Intégrer les équations différentielles :
1. $y'' = xy'^2$ 2. $x(yy'' - y'^2) = yy'$ (poser $u = \dfrac{y'}{y}$).

---

1. INDICATIONS :

Indication 1.1.1

(1) C'est le théorème de Cauchy.
(2) $Y_1(x) = R(x, x_0).C$ est solution de (1) et vérifie la C.I. $Y(x_0) = C$, puis prendre $C = R(v, w)$, $x_0 = v$ donc $Y(u) = R(u, v).R(v, w)$ et conclure $Y(u) = R(u, w) = R(u, v).R(v, w)$. La relation $R(v, u) = [R(u, v)]^{-1}$ est immédiate.
(3) $Y(x_2)$ est une matrice inversible donc $R(x_1, x_2) = Y(x_1).Y(x_2)^{-1}$.
(4) Montrer que $\Delta(x + h) = \Delta(x)\det(Y(x + h).Y(x)^{-1})$ et écrire $Y(x + h) = Y(x) + hA(x).Y(x) + o(h)$. Utiliser ensuite le développement d'un déterminant pour en déduire que $\Delta'(x) = \mathrm{Tr}(A(x)).\Delta(x)$ et conclure.

Indication 1.1.2

(1) Poser $z_p = y_p - y$ et si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système fondamental de solutions, écrire $z_p = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(p)x_k$ et conclure.
(2) On raisonne par l'absurde, on suppose qu'il existe t_1 tel que $\forall k \in [1, n-1]$, $y_k(t_1) \geqslant 0$ et $y_n(t_1) \leqslant 0$ et pour $t \in [t_0, t_1[$, $y(t) > 0$. Alors, en appliquant le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $t_2 \in]t_0, t_1[$ tel que $y_n'(t_2) = \frac{y_n(t_1)-y_n(t_0)}{t_1-t_0} < 0$ ce qui est impossible.
(3) Pour $t \in I$, poser $u = \frac{1}{t}$ et $y(t) = x(u)$ où x est solution de $x' = A_1(u)x$, si $x_0 > 0$ et x_p la solution de cette dernière équation vérifiant $x_p(1/p) = x_0$, montrer que pour $u \in [1/p, +\infty[$, $y_p(t) > 0$ sur $]0, p]$. Extraire de la suite $z_p(t) = \frac{y_p(t)}{\|y_p(0)\|}$ une suite convergente $(z_{\varphi(p)})$ de limite Z et choisir z la solution de $y' = -A(t)y$ vérifiant $z(0) = Z$.

Indication 1.2.1

(1) Les solutions sont $x = \frac{1}{4}\left[\lambda(r_1 - 2)e^{r_1 t} + \mu(r_2 - 2)e^{r_2 t} + \frac{2}{3}\cos t + 2\sin t\right]$,
$y = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} - \frac{2}{3}(\cos t + \sin t)$.
(2) $x = \lambda \sin t + \mu \cos t + 1 + \frac{t}{2}\cos t$, $y = \lambda \cos t - \mu \sin t - \frac{t}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t$.

(3) $x = \frac{1}{2}\left[(at+b-c)e^t - de^{-t}\right]$, $y = \frac{1}{2}\left[(at+b+c)e^t + de^{-t}\right]$.

(4) $x = -2\lambda e^{-2t} + e^{3t}\left[\mu + t\operatorname{Arctan} t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]$,
$y = \lambda e^{-2t} + 2e^{3t}\left[\mu + t\operatorname{Arctan} t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]$.

(5) Avec $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $X = \lambda e^{3t}X_1 + \mu e^{3t}X_2 + \nu e^{9t}X_3$.

(6) On trouve successivement $z = 1 + \lambda e^{-t}$, puis $y = t - 2 - \lambda te^{-t} + \mu e^{-t}$ et
$x = t^2 - 3t + 5 + \left(\frac{\lambda}{2}t^2 - \mu t + \nu\right)e^{-t}$.

(7) $x = (3\lambda t^2 + (5\lambda - \mu)t + \nu)e^t + t$, $y = (-3\lambda t + \mu)e^t + 1$, $z = \lambda e^t - t$.

(8) Si A est la matrice du système alors $e^{At} = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 - 2t + \frac{3}{2}t^2 & t & t - \frac{3}{2}t^2 \\ t + \frac{3}{2}t^2 & 1+t & -2t - \frac{3}{2}t^2 \\ -2t + \frac{3}{2}t^2 & t & 1 + t - \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}$.

(9) Montrer que $y'' = 3y'' - 3y' + y - t + 3$ puis $y(t) = -t + e^t(at^2 + bt + c)$, $x(t) = -t - 2 + e^t[at^2 + (b+2a)t + c + b]$ et $z(t) = -t - 5 + e^t[at^2 + (b-2a)t + c - b + 2a]$.

Indication 1.2.2 Poser $u = y - z$, les solutions sont données par $x = \frac{1}{3}\left(e^{-t} + 8e^{2t}\right)$, $y = \frac{1}{3}\left(-e^{-t} + 4e^{2t}\right)$, $z = \frac{1}{3}\left(-e^{-t} + 4e^{2t}\right)$.

Indication 1.2.3 Prendre un vecteur $\overrightarrow{V}$ tel que $(\overrightarrow{V}, A\overrightarrow{V}, A^2\overrightarrow{V})$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a (x, y, z) comme coordonnées dans cette base, alors on obtient $x = a$, $y = at + b$, $z = \frac{a}{2}t^2 + bt + c$ qui est en général une parabole.

Indication 1.2.4

(1) Montrer que $g(t) = e^{tA}\left(g(0) + \int_0^t e^{-uA}f(u)\,\mathrm{d}u\right)$ puis écrire
$$g(t+T) - g(t) = e^{tA}\left[(e^{TA} - I_n)g(0) + w\right],$$
en déduire la C.N.S. pour que g soit T-périodique : $g(0) = \left(I_n - e^{TA}\right)^{-1}(w)$.

(2) Si g est une solution de (E_f) de période T' montrer que $T' = nT$ puis que $n = 1$.

(3) Poser $\alpha = \sup_{t\in[0,T]} \|e^{tA}\|$, $\beta = \|(I_n - e^{TA})^{-1}\|$ et montrer que $\|\varphi_f(t)\| \leqslant \alpha T\|f\|(\beta + 1)$.

Indication 1.3.1 Montrer que y vérifie l'équation différentielle : $y''' + 6y' = 10$ et en déduire que $y = \frac{5}{3}\cos\left(x\sqrt{6}\right) + \dfrac{25}{3\sqrt{6}}\sin\left(x\sqrt{6}\right) + \frac{5x+1}{3}$.

Indication 1.3.2

(1) Écrire $g(t) = f(t) + \sin t\int_0^t \cos u.\varphi(u)f(u)\,\mathrm{d}u - \cos t\int_0^t \sin u.\varphi(u)f(u)\,\mathrm{d}u$.

(2) Écrire que $g(t) = f(0)\cos t + f'(0)\sin t$, en déduire que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $|g(t)| \leqslant |f(0)| + |f'(0)| = a$ et conclure avec le (1).

(3) Poser $F(t) = \exp\left(-\int_0^t |\varphi(u)|\,\mathrm{d}u\right)\left[a + \int_0^t |\varphi(u)|.|f(u)|\,\mathrm{d}u\right]$ et montrer que $F(t) \leqslant F(0) = a$ et utiliser le (2).

Indication 1.3.3 Raisonner par l'absurde : l'ensemble des 0 de f admet un point d'accumulation $c \in [\alpha, \beta]$, montrer alors que $f(c) = f'(c) = 0$. L'exemple en question montre qu'on ne peut pas étendre le résultat à l'intervalle $]a, b[$.

Indication 1.3.4 (1) $y = -(1+x)$, (2) $y = a_0(-5x^4 - 6x^2 + 1) + a_1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3(n+1)}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}x^n$,
(3) $y = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\prod_{k=1}^{n}(k^2-3k+3)}{(n!)^2}x^n$, (4) $y = \frac{x}{1-x}a_1$,
(5) $a_{4p} = \frac{(-1)^p}{3\times4\times\cdots\times(4p-1)\times4p}a_0$, $a_{4p+1} = \frac{(-1)^p}{4\times5\times\cdots\times4p\times(4p+1)}a_1$, $R = +\infty$,
(6) $r = \pm1$, $y = \lambda\frac{e^{-x}}{x} + \mu\frac{1-x}{x}$.

Indication 1.3.5 (1) $y = x(\alpha\cos x + \beta\sin x)$, (2) $y = a_-\cos\sqrt{-x} + b_-\sin\sqrt{-x}$ si $x < 0$, $a_+\operatorname{ch}\sqrt{x} + b_+\operatorname{sh}\sqrt{x}$ si $x > 0$, (3) $y = \lambda\frac{\ln|x|}{x+1} + \mu\frac{1}{x+1}$, $y = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{3^n(n!)^2}$.

Indication 1.3.6 (1) $y = \alpha\sqrt{|1-x^2|} + \beta x$, (2) $y = \lambda x + \mu(1+x^2)$, (3) $y = \lambda e^x + \mu(2x^2+6x+10)e^{-x}$, (4) $y = \lambda\frac{1}{1-x} + \mu\frac{1}{1-2x}$.

Indication 1.3.7 Remarquer que sur l'intervalle I, f et g ne s'annulent pas, montrer que $-4xf'g' + 1 = 0$, puis $4xf'^2 + f^2 = 0$. En déduire que $f(x) = Ce^{\varepsilon\sqrt{-x}}$ et $g(x) = \frac{1}{C}e^{-\varepsilon\sqrt{-x}}$ avec $I =]-\infty, 0[$.

Indication 1.3.8 Étudier les solutions de $(\mathrm{E}_1) : 2y''+5y'+3y = 0$ et de $(\mathrm{E}_2) : 2y''+5y'-3y = 0$, en déduire les solutions de signe constant de (E) : $y(x) = ae^{-x} + be^{-3x/2}$ $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $y(x) = ce^{-3x} + de^{x/2}$ $c \leqslant 0$, $d \leqslant 0$.
Pour les solutions de signe non constant sur $\mathbb{R}$, poser $u(x) = e^{-x} - e^{-3x/2}$, $v(x) = e^{-3x} - e^{x/2}$. Montrer que si y est une solution de (E) qui s'annule en a, et si $\exists b > a$ tel que y reste positif sur $]a, b[$ alors y s'écrit sous la forme $\lambda u(x-a)$, $\lambda > 0$. En posant $y_1(x) = 7u(x)$ si $x \geqslant 0$, $-v(x)$ si $x < 0$ et $y_2(x) = -7u(x)$ si $x < 0$, $v(x)$ si $x \geqslant 0$ montrer que les solutions maximales qui changent de signe sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $\lambda y_1(x-a)$, $\lambda > 0$ ou $\mu y_2(x-a)$, $\mu > 0$.

Indication 1.3.9 Montrer que les solutions sont à chercher parmi les solutions de (E_1) $y + y' + y'' = 0$ et (E_2) $y = y' = y''$ puis que l'ensemble des solutions est la réunion des solutions de ces deux équations. Pour cela considérer y une solution de (E) telle que $y'(a) - y''(a) \neq 0$ et I un intervalle maximal sur lequel $\forall x \in I$, $(y' - y'')(x) \neq 0$ ou $(y - y')(x) \neq 0$, montrer alors que $I = \mathbb{R}$ en raisonnant par l'absurde et conclure.

Indication 1.3.10 Supposer que $y(c) = \sup_{t\in[0,1]} |y(t)|$ et considérer a et b les bornes supérieures et inférieures des ensembles $\{x \in [0, c] \mid y(x) = 0\}$ et $\{x \in [c, 1] \mid y(x) = 0\}$. Écrire alors que $y(c) = y(c) - y(a) = (c-a)y'(\alpha) = y(c) - y(b) = (c-b)y'(\beta)$ et montrer que $\frac{b-a}{(c-a)(b-c)} \geqslant 4$. Utiliser ensuite la minoration $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \int_\alpha^\beta \frac{|y''(x)|}{|y(x)|}\,\mathrm{d}x$ et conclure.

Indication 1.3.11 Montrer que la fonction y a des 0 isolés puis supposer que $y > 0$ sur $]a, b[$ et $y'(b) < 0$ (quitte à prendre une autre valeur pour b). Raisonner alors par l'absurde en supposant que $z > 0$ sur $[a, b]$ et en posant $u = y'z - yz'$ et en montrant que $u = 0$ sur $[a, b]$.

Indication 1.3.12

(1) Montrer que $\varphi(u) \geqslant \int_a^b f(t)u^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \inf_{x\in[a,b]} f(x)$.
(2) Avec $\int_a^b [y(t)y''(t) + (\lambda - f(t))y^2(t)]\,\mathrm{d}t = 0$ et une intégration par parties, montrer que $\varphi(y) = \lambda\int_a^b y^2(t)\,\mathrm{d}t$. Conclure en raisonnant par l'absurde.

Indication 1.3.13

(1) Résoudre les équations différentielles $(\mathrm{E}_1) : y' + 3x^2y = 0$ et $(\mathrm{E}_2) : -y' + 3x^2y = 0$ puis si a est tel que $y(a) = 0$ alors étudier les fonctions $z_1 = ye^{x^3}$ et $z_2 = ye^{-x^3}$ et montrer que $z_1 \geqslant 0$ et $z_2 \leqslant 0$ pour $x \leqslant a$, en déduire que y est la fonction nulle.
(2) Si y est non nulle alors montrer que y' garde un signe constant sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et en déduire que les solutions maximales sont : $y(x) = \alpha e^{\varepsilon x^3}$ si $x > 0$, $\alpha e^{\varepsilon' x^3}$ si $x < 0$ avec $\alpha < 0$, $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$.
En déduire que le nombre de courbes passant par un point de $\mathbb{R}^2$ est
4 si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*_-$ ou si $(x_0, y_0) \in \{0\} \times \mathbb{R}^*_-$,
0 si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*_+$ et 1 si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ (fonction nulle).

Indication 2.1.1 On a une différentielle exacte, les courbes sont en général des coniques.

Indication 2.1.2 (1) $e^x = \ln\frac{e^y}{1+e^y} + C$, (2) $x^2 - \lambda y^2 + y^4 = 0$, (3) $x^2 = \lambda e^y(e^y - 2)$, (4) poser $z = \sqrt{y}$ et en déduire que $y = (x + \lambda\sqrt{|x|})^2$, (5) poser $z = \frac{2y+1}{\sqrt{3}}$, on obtient alors $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\tan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-a)\right) - \frac{1}{2}$ sur $]a - \pi/\sqrt{3}, a + \pi/\sqrt{3}[$.

Indication 2.2.1

(1) Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz.
(2) On trouve $u' = 2(u - u^2)$.

(3) v vérifie l'équation $v' + 2v = 2$ d'où $u = \frac{1}{1+\lambda e^{-2t}}$.

(4) Remplacer $|y|^2$ en fonction de u dans (E), y est solution de $y' = \left(1 + i - \frac{e^{2t}}{\lambda+e^{2t}}\right) y$ d'où $y = \mu \frac{e^{(1+i)t}}{\sqrt{\lambda+e^{2t}}}$, $\mu \in \mathbb{U}$.

Indication 2.2.2 Sur un intervalle I, si $0 \in I$ et si $z(0) = 0$ alors montrer que $y(0) \neq 0$ et que y garde un signe constant que l'on suppose positif. Remplacer z par $\frac{y}{x}$ et poser $u = \frac{y'}{y}$. En déduire que $\exists \lambda > 0$, $y = \lambda e^{-\sqrt{1-4x}}(1 + \sqrt{1-4x})$ et $z = \frac{1}{4\lambda} e^{\sqrt{1-4x}}(1 - \sqrt{1-4x})$. Prendre $I =]-\infty, \frac{1}{4}[$.

Indication 2.2.3 Poser $u = x^2 + y^2$, $z = x + iy$ et montrer que
si $a = 0$ alors $u' = 2u^{3/2}$ puis $u = \left(\frac{1}{t-t_0}\right)^2$, $t \in]-\infty, t_0[$ et $|z| = \frac{1}{t_0-t}$,
si $a \neq 0$ alors écarter la solution $u = a^2$, on trouve $u = \frac{a^2}{\cos^2[a(t-t_0)]}$, $t \in]t_0 - \frac{\pi}{2a}, t_0[$ ou $t \in]t_0, t_0 + \frac{\pi}{2a}[$ et $|z| = \frac{a}{\cos[a(t-t_0)]}$.

Indication 2.2.4 Réécrire l'équation différentielle sous la forme $(y, z)' = F(x, y, z)$ et appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Si I est un intervalle où y ne s'annule pas alors poser $u = \frac{y'}{y}$ puis, sur $I \setminus \{0\}$, $v = xu$. Après avoir écarté les intégrales particulières $v = 0$ et $v = -1$, on trouve $x = \frac{av}{v+1} \exp\left(\frac{2}{v+1}\right)$, $y = \frac{b}{v+1} \exp\left(\frac{-2}{v+1}\right)$.
Pour étudier une courbe intégrale ($a = b = 1$), poser $t = \frac{1}{v+1}$ pour obtenir la paramétrisation $x(t) = (1-t)e^{2t}$, $y(t) = te^{-2t}$.
Faire la synthèse : sur $I_1 =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et $I_2 =]\frac{1}{2}, +\infty[$, montrer que $t \mapsto x(t)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et conclure que les solutions maximales sont représentées par les intégrales particulières $y = \lambda$ et $y = \frac{\mu}{x}$ auxquelles on rajoute les branches des courbes $\Gamma(t)$ pour $t \in I_k$.

Indication 2.2.5

(1) Poser $z = y'$ et en déduire que $y = \begin{cases} -\frac{2}{\lambda} \operatorname{Arctan} \frac{x}{\lambda} + \mu \\ -\frac{1}{\lambda} \ln\left|\frac{x-\lambda}{x+\lambda}\right| + \mu \\ \frac{2}{x} + \mu \end{cases}$ selon les cas.

(2) Si J est un intervalle maximal où y ne s'annule pas, poser $u = \frac{y'}{y}$, si $0 \notin J$ alors $y = \mu e^{\lambda x^2/2}$.

1. Solutions

Solution 1.1.1

(1) C'est le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires appliqué au cas où F l'espace vectoriel est $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (cf. *théorème 8.1 page 297*).

(2) $Y_1(x) = R(x, x_0).C$ est solution de (1) et vérifie la condition initiale $Y(x_0) = C$ donc, grâce à l'unicité de la solution du problème de Cauchy, on en déduit $Y_1 = Y$.
On prend alors $C = R(v, w)$, $x_0 = v$ donc $Y(u) = R(u, v).R(v, w)$. Comme $Y(v) = R(u, u).R(v, w) = R(v, w)$ car, en vertu du 1, $R(u, u) = I_n$, on en déduit que Y est l'unique solution de (1) vérifiant $Y(v) = R(v, w)$ d'où $Y(x) = R(x, w)$ et en prenant $x = u$ on a bien

$$Y(u) = R(u, w) = R(u, v).R(v, w).$$

La relation $R(v, u) = [R(u, v)]^{-1}$ est alors immédiate.
Remarque : on a en fait $R(x, x_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} A(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

(3) On a vu au 2 que $Y(x_1) = R(x_1, x_2).Y(x_2)$. Mais on sait que $Y(x_2)$ est une matrice inversible (cf. *théorème 8.4 page 298*) donc $R(x_1, x_2) = Y(x_1).Y(x_2)^{-1}$.

(4) On a $R(x + h, x_0) = R(x + h, x).R(x, x_0)$ donc

$$\Delta(x + h) = \det(R(x + h, x))\Delta(x) = \Delta(x)\det(Y(x + h).Y(x)^{-1})$$

en utilisant la relation du 3.
Ensuite, grâce à la différentiabilité de $Y(x) = R(x, x_0)$, on peut écrire

$$Y(x + h) = Y(x) + hY'(x) + o(h) = Y(x) + hA(x).Y(x) + o(h).$$

On a donc $Y(x+h).Y(x)^{-1} = I_n+hA(x)+o(h)$ On utilise ensuite le développement d'un déterminant (que l'on a utilisé pour le polynôme caractéristique, cf. *remarque 3.2.3 (i) page 192*) on obtient $\det(Y(x + h).Y(x)^{-1}) = 1 + h\operatorname{Tr}(A(x)) + o(h)$ d'où, en revenant à la définition de la différentiabilité on arrive à la relation

$$\Delta'(x) = \operatorname{Tr}(A(x)).\Delta(x)$$

et comme $\Delta(x_0) = 1$ on a bien la relation demandée en intégrant l'équation différentielle obtenue. *Remarque* : on peut aussi utiliser la relation $\det e^B = \exp(\operatorname{Tr}(B))$ et utiliser la remarque faite à la fin de la question 2.

Solution 1.1.2

(1) On pose $z_p = y_p - y$ alors z est solution de $z' = A(t)z$. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système fondamental de solutions alors $z_p = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(p)x_k$ et comme $z_p(t_0) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(p)x_k(t_0)$ tend vers 0 quand $p \to +\infty$ alors chaque composante $\lambda_k(p)$ tend aussi vers 0.
En effet $(x_k(t_0))_{k\in[1,n]}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Soit (φ_k) sa base duale alors $\lambda_k(p) = \varphi_k(z_p) \to 0$ car les φ_k sont continues (on est en dimension finie).
On a donc la propriété demandée.

(2) On raisonne par l'absurde, on suppose qu'il existe t_1 tel que $\forall k \in [1, n-1]$, $y_k(t_1) \geqslant 0$ et $y_n(t_1) \leqslant 0$ et pour $t \in [t_0, t_1[$, $y(t) > 0$. Alors, en appliquant le théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $t_2 \in]t_0, t_1[$ tel que $y_n'(t_2) = \dfrac{y_n(t_1) - y_n(t_0)}{t_1 - t_0} < 0$ ce qui est impossible.

(3) Toute solution y de $y' = -A(t)y$ sur $I =]0, +\infty[$ peut se prolonger en 0 (en effet, le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (cf. *théorème 8.5 page 299*) nous assure l'existence d'une solution sur tout l'intervalle de définition de A).

Pour $t \in I$, on pose $u = \dfrac{1}{t}$ alors $y(t) = x(u)$ où x est solution de $x' = A_1(u)x$ avec $A_1(u) = \dfrac{1}{u^2}A(1/u)$ et $A_1(u) \geqslant 0$. Soit $x_0 > 0$ et x_p la solution de cette dernière équation vérifiant $x_p(1/p) = x_0$ alors on sait, d'après le 2 que $x_p(t) > 0$ pour $u \in [1/p, +\infty[$ et donc $y_p(t) > 0$ sur $]0, p]$. Comme $y_p' = -A(t)y$ alors y_p est décroissante et peut se prolonger en 0 donc $y_p(0) > 0$. On pose $z_p(t) = \dfrac{y_p(t)}{\|y_p(0)\|}$ alors $\|z_p(0)\| = 1$ et comme la boule unité de $\mathbb{R}^n$ est compacte, on peut en extraire une suite convergente $(z_{\varphi(p)})$ de limite Z (c'est la propriété de Bolzano-Weierstrass, cf. *définition 5.1.38 page 234*). On choisit alors z la solution de $y' = -A(t)y$ vérifiant $z(0) = Z$. On sait alors d'après le 1. que pour tout t dans $[0, +\infty[$, $z_{\varphi(p)}(t) \to z(t)$ et comme, à partir d'un certain rang, cette suite est strictement positive, alors $z(t) \geqslant 0$ et $z'(t) \leqslant 0$.

Solution 1.2.1

(1) Les valeurs propres de la matrice du système sont $r_1 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}, r_2 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ d'où les solutions (en utilisant la *remarque 8.1.4 (iv) page 299*)

$$x = \frac{1}{4}\left[\lambda(r_1 - 2)e^{r_1 t} + \mu(r_2 - 2)e^{r_2 t} + \frac{2}{3}\cos t + 2\sin t\right],$$

$$y = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} - \frac{2}{3}(\cos t + \sin t).$$

(2) On dérive la deuxième équation et on reporte dans la première, on arrive à l'équation $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y = -\cos t$. On utilise alors la technique exposée au *paragraphe 2.2.3 page 40* et on obtient

$$x = \lambda \sin t + \mu \cos t + 1 + \frac{t}{2}\cos t,\ \ y = \lambda \cos t - \mu \sin t - \frac{t}{2}\sin t - \frac{1}{2}\cos t.$$

(3) On pose $u = y + x$, $v = y - x$, u vérifie l'équation différentielle $u'' - 2u' + u = 0$, v est solution de $v'' - v = 0$ donc $u = (at + b)e^t$ et $v = ce^t + de^{-t}$ ce qui donne

$$x = \frac{1}{2}\left[(at + b - c)e^t - de^{-t}\right],\ \ y = \frac{1}{2}\left[(at + b + c)e^t + de^{-t}\right].$$

(4) La matrice du système admet -2 et 3 comme valeur propre. On utilise la *remarque 8.1.3 (iv) page 299* pour trouver les solutions de l'équation homogène puis la méthode de variation des constantes (cf. *page 298*) :

$$\begin{cases} x = -2\lambda e^{-2t} + e^{3t}\left[\mu + t\operatorname{Arctan} t - \dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)\right] \\ y = \quad \lambda e^{-2t} + 2e^{3t}\left[\mu + t\operatorname{Arctan} t - \dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)\right] \end{cases}$$

(5) Avec $P = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ on trouve $P^{-1}AP = P^tAP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et si $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $X = \lambda e^{3t}X_1 + \mu e^{3t}X_2 + \nu e^{9t}X_3$ (cf. *remarque 8.1.3 (iv) page 299*).

(6) On intègre d'abord la dernière équation : $z = 1 + \lambda e^{-t}$, puis la deuxième en reportant l'expression de z, $y = t - 2 - \lambda t e^{-t} + \mu e^{-t}$ et enfin $x = t^2 - 3t + 5 + \left(\frac{\lambda}{2}t^2 - \mu t + \nu\right) e^{-t}$.

(7) On procède comme au 5 ou on écrit $AX' = X + B \Leftrightarrow X' = A^{-1}X + A^{-1}B$ et on trouve :

$$x = (3\lambda t^2 + (5\lambda - \mu)t + \nu)e^t + t,\ y = (-3\lambda t + \mu)e^t + 1,\ z = \lambda e^t - t.$$

(8) A matrice du système alors $(A + 2I)^3 = 0$ et

$$e^{At} = e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 - 2t + \frac{3}{2}t^2 & t & t - \frac{3}{2}t^2 \\ t + \frac{3}{2}t^2 & 1 + t & -2t - \frac{3}{2}t^2 \\ -2t + \frac{3}{2}t^2 & t & 1 + t - \frac{3}{2}t^2 \end{pmatrix}.$$

Cette formule permet d'avoir les solutions en utilisant le *théorème 8.5 page 299.*

(9) On dérive une fois la première équation et on remplace x'' par y''' (deuxième équation dérivée deux fois) x' par $y'' - 1$ et z' par $y + t - 1$. On obtient $y'' = 3y'' - 3y' + y - t + 3$. On généralise la méthode exposée au *paragraphe 2.2.3 page 40* au cas des équations différentielles du troisième ordre. On cherche tout d'abord une solution polynomiale $y(t) = at + b$ d'où $y(t) = -t$. On rajoute l'ensemble des solutions de l'équation homogène d'où $y(t) = -t + e^t(at^2 + bt + c)$. On obtient x à partir de la deuxième équation et z à partir de la première. Finalement on arrive à

$$\begin{array}{ll} x(t) = -t - 2 & +e^t[at^2 + (b + 2a)t + c + b] \\ y(t) = -t & +e^t[at^2 + bt + c] \\ z(t) = -t - 5 & +e^t[at^2 + (b - 2a)t + c - b + 2a] \end{array}$$

et on vérifie que $(x(t), y(t), z(t))$ est un système solution.

Remarque : on aurait pu aussi utiliser la méthode générale qui consiste à calculer $\exp A$ où A est la matrice du système (cf. *théorème 8.5 page 299*).

Solution 1.2.2 On remarque que, en posant $u = y - z$ alors $u' = -2u$ et $u(0) = 0$ donc $u = 0$. Le système devient donc

$$\begin{cases} x' &= x + 2y \\ y' &= x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' - x' - 2x = 0 \\ y = \frac{1}{2}(x' - x) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 3$, $y(0) = 1$.

Les solutions sont donc données par $\begin{cases} x &= \frac{1}{3}\left(e^{-t} + 8e^{2t}\right) \\ y &= \frac{1}{3}\left(-e^{-t} + 4e^{2t}\right) \\ z &= \frac{1}{3}\left(-e^{-t} + 4e^{2t}\right) \end{cases}$. La courbe solution est contenue dans le plan $y = z$, sa projection sur xOy a pour équation $(x - 2y)^2(x + y) - 4 = 0$, $x > 0$.

Solution 1.2.3 Choisissons un vecteur $\overrightarrow{V}$ tel que $(\overrightarrow{V}, A\overrightarrow{V}, A^2\overrightarrow{V}) = (\overrightarrow{V}_0, \overrightarrow{V}_1, \overrightarrow{V}_2)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a (x, y, z) comme coordonnées dans cette base, alors on obtient le système $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = x \\ z' = y \end{cases}$ qui s'intègre en $x = a$, $y = at + b$, $z = \dfrac{a}{2}t^2 + bt + c$.

On a donc $\overrightarrow{OM} = (a\overrightarrow{V}_0 + b\overrightarrow{V}_1 + c\overrightarrow{V}_2) + t(a\overrightarrow{V}_1 + b\overrightarrow{V}_2) + \dfrac{at^2}{2}\overrightarrow{V}_2 = \overrightarrow{O\Omega} + t\,\overrightarrow{I} + t^2\,\overrightarrow{J}$.

- Si $a \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ sont linéairement indépendants, la trajectoire de M est une parabole.
- Si $a = 0$, $b \neq 0$, la trajectoire de M est une droite.
- Enfin, si $a = b = 0$, M est un point fixe.

Solution 1.2.4

(1) On a $g' = Ag + f(t) \Leftrightarrow (e^{-tA}g)' = e^{-tA}f$ donc

$$g(t) = e^{tA}\left(g(0) + \int_0^t e^{-uA}f(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

(cf. *théorème 8.6 page 299*). On a alors (comme f est T-périodique)

$$g(t+T) - g(t) = e^{tA}\left[(e^{TA} - I_n)g(0) + w\right]$$

où $w = \displaystyle\int_0^T e^{(T-u)A}f(u)\,\mathrm{d}u$, ce qui donne, en simplifiant par e^{tA}, la C.N.S. pour que g soit T-périodique :

$$(e^{TA} - I_n)g(0) + \int_0^T e^{(T-u)A}f(u)\,\mathrm{d}u = 0.$$

Les valeurs propres de e^{TA} sont $e^{T\lambda_i}$ où λ_i désignent les valeurs propres de A. En effet, si on trigonalise A alors $A = PTP^{-1}$ et donc $e^A = Pe^TP^{-1}$. Comme $\Re(\lambda_i) < 0$, les valeurs propres de e^{TA} sont toutes inférieures à 1 en module (on a $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$), la matrice $e^{TA} - I_n$ est inversible. On peut donc choisir $g(0) = \left(I_n - e^{TA}\right)^{-1}(w)$, ce qui assure la T-périodicité de g et son unicité grâce au théorème de Cauchy (cf. *théorème 8.5 page 299*).

(2) Si g est une solution de (E_f) de période T' alors $g' - Ag$ est aussi T'-périodique, donc $T' = nT$ (car T' est une période de f). Or φ_f est aussi T'-périodique, donc, grâce à l'unicité des solutions périodiques démontrée au 1., $g = \varphi_f$ et g est T-périodique.

(3) Comme φ_f est T-périodique, $\|\varphi_f\| = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|\varphi_f(t)\|$. Posons $\alpha = \sup\limits_{t\in[0,T]} \|e^{tA}\|$ alors

$$\|w\| \leqslant \int_0^T \|e^{(T-u)A}\|.\|f(u)\|\,\mathrm{d}u \leqslant \alpha T\|f\|.$$

Si on pose $\beta = \|(I_n - e^{TA})^{-1}\|$ alors $\|g(0)\| \leqslant \beta\|w\| \leqslant \beta\alpha T\|f\|$. On a donc la majoration suivante :

$$\|\varphi_f(t)\| \leqslant \alpha T\|f\|(\beta + 1).$$

Solution 1.3.1 On montre d'abord que y est C^3 :
y est dérivable par hypothèse, puis, comme $y'(x) = -5\displaystyle\int_0^x y(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t + 10$ alors y' est dérivable (cf. *remarque 6.2.7 (iv) page 269*) et $y''(x) = -5y(x) + 5\displaystyle\int_0^x y(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$. y'' est

aussi dérivable (même raison) avec

$$y'''(x) = -5y'(x) + 5\int_0^x y(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = -6y'(x) + 10.$$

y vérifie l'équation différentielle : $y''' + 6y' = 10$ d'où $y'(x) = a\cos\left(x\sqrt{6}\right) + b\sin\left(x\sqrt{6}\right) + \dfrac{5}{3}$ en intégrant l'équation différentielle. Les solutions sont donc à chercher sous la forme

$$y(x) = \alpha\cos\left(x\sqrt{6}\right) + \beta\sin\left(x\sqrt{6}\right) + C + \frac{5}{3}x$$

en reportant, on trouve l'unique solution :

$$y = \frac{5}{3}\cos\left(x\sqrt{6}\right) + \frac{25}{3\sqrt{6}}\sin\left(x\sqrt{6}\right) + \frac{5x+1}{3}.$$

Solution 1.3.2

(1) En écrivant

$$g(t) = f(t) + \sin t\int_0^t \cos u.\varphi(u)f(u)\,\mathrm{d}u - \cos t\int_0^t \sin u.\varphi(u)f(u)\,\mathrm{d}u$$

et en dérivant deux fois (ce qui est possible) on trouve le résultat (on pouvait aussi utiliser le résultat de la *remarque 6.2.7* (*iii*) *page 269* pour dériver sous le signe intégral).

(2) On sait alors que $g(t) = f(0)\cos t + f'(0)\sin t$ en cherchant l'unique solution de l'équation $y''+y = 0$ qui satisfait les conditions initiales $y(0) = g(0) = f(0)$ et $y'(0) = g'(0) = f'(0)$. On a donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |g(t)| \leqslant |f(0)| + |f'(0)| = a.$$

On a alors

$$\begin{aligned}|f(t)| &\leqslant |g(t)| + \int_0^t |\sin(t-u)\varphi(u)f(u)|\,\mathrm{d}u\\ &\leqslant a + \int_0^t |\varphi(u)|.|f(u)|\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

(3) On pose

$$F(t) = \exp\left(-\int_0^t |\varphi(u)|\,\mathrm{d}u\right)\left[a + \int_0^t |\varphi(u)|.|f(u)|\,\mathrm{d}u\right].$$

F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $F'(t) \leqslant 0$ donc $F(t) \leqslant F(0) = a$. On a donc, grâce au 2.,

$$|f(t)| \leqslant a\exp\left(\int_0^t |\varphi(u)|\,\mathrm{d}u\right) \leqslant a\exp\left(\int_0^{+\infty} |\varphi(u)|\,\mathrm{d}u\right) \tag{1}$$

ce qui signifie que toute solution de (E) est bornée sur $[0,+\infty[$.

Remarque : l'inégalité (1) correspond à une version du célèbre lemme de Gronwall très utile aux équations différentielles.

Solution 1.3.3 Raisonnons par l'absurde : $[\alpha,\beta]$ est compact, donc l'ensemble des 0 de f admet un point d'accumulation $c \in [\alpha,\beta]$ et par continuité : $f(c) = 0$. En prenant une suite (c_n) convergeant vers c, on a $\dfrac{f(c_n) - f(c)}{c_n - c} = 0 \to f'(c) = 0$ donc f est la fonction nulle (unicité d'une solution connaissant les conditions initiales) d'où une contradiction.

L'exemple en question nous montre qu'on ne peut pas étendre le résultat à l'intervalle $]a,b[$.

Solution 1.3.4 On utilise ici la méthode exposée page 285 au **c)** sur le recherche de D.S.E.

(1) $y = -(1+x)$! Il est en effet toujours intéressant d'essayer de trouver des solutions polynomiales simples.

(2) $a_n = \dfrac{(n-6)(n+1)}{n(n-1)} a_{n-2}$ d'où un rayon de convergence $R \geqslant 1$ (faire attention au cas où $n = 6$ qui donne $a_6 = 0$ et par une récurrence immédiate $a_{2p} = 0$ pour $p \geqslant 3$).
On obtient finalement $a_{2n+1} = \dfrac{3(n+1)}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)} a_1$ et pour n pair une solution polynomiale : $y_1 = a_0(-5x^4 - 6x^2 + 1)$ d'où l'ensemble des solutions

$$y = a_0(-5x^4 - 6x^2 + 1) + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3(n+1)}{(2n+1)(2n-1)(2n-3)} x^n.$$

(3) $a_n = -\dfrac{n^2 - 3n + 3}{n^2} a_{n-1}$ d'où $R = 1$ ($n^2 - 3n + 3$ ne s'annule pas) et les solutions

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\prod_{k=1}^{n} (k^2 - 3k + 3)}{(n!)^2} x^n.$$

(4) $y = \dfrac{x}{1-x} a_1$ avec un rayon de convergence égal à 1.

(5) $a_{4p} = \dfrac{(-1)^p}{3\times 4\times \cdots \times (4p-1)\times 4p} a_0 \quad a_{4p+1} = \dfrac{(-1)^p}{4\times 5\times \cdots \times 4p\times (4p+1)} a_1$ avec un rayon de convergence infini.

(6) On cherche les solutions sous la forme $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+r}$, $a_0 \neq 0$ d'où $r = \pm 1$.

- $r = 1$: $a_n = \dfrac{2(-1)^n}{(n+2)!} a_0$, $y = \dfrac{2}{x}(e^{-x} - 1 + x) a_0$,
- $r = -1$: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!} a_0$, $y = \dfrac{e^{-x}}{x}$ qui n'est pas développable en série entière.

L'ensemble des solutions peut s'écrire $\lambda \dfrac{e^{-x}}{x} + \mu \dfrac{1-x}{x}$.
Quant à l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ on trouve $y = \lambda \dfrac{2}{x}(e^{-x} - 1 + x)$.

Solution 1.3.5 On cherche un D.S.E. solution pour chacune des 4 équations :

(1) Les solutions sont à priori définies sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. On trouve en fait $y = x(\alpha \cos x + \beta \sin x)$.

(2) On trouve $y(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \cos \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Pour intégrer ensuite, on peut poser $x = \pm t^2$ et on obtient finalement les solutions sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$:

$$y = \begin{cases} a_- \cos \sqrt{-x} + b_- \sin \sqrt{-x} \text{ si } x < 0 \\ a_+ \operatorname{ch} \sqrt{x} + b_+ \operatorname{sh} \sqrt{x} \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

(3) Les solutions sont à priori définies sur $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$. $y = \dfrac{1}{1+x}$ est solution et par variation de la constante on obtient :

$$y = \lambda \frac{\ln |x|}{x+1} + \mu \frac{1}{x+1}.$$

(4) Les solutions sont à priori définies sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. La seule solution développable en série entière au voisinage de 0 est donnée par

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{3^n (n!)^2}.$$

Solution 1.3.6 On remarque que, pour les deux premières équations, $y = x$ est solution (immédiat lorsque l'on note la présence de l'expression $-xy' + y$). On utilise pour toutes les équations qui suivent la méthode de variation de la constante exposée *page 301.*

(1) On cherche les solutions sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, +\infty[$. En posant $y = zx$ on trouve les solutions

$$y = \alpha\sqrt{|1 - x^2|} + \beta x.$$

(2) On cherche les solutions sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, +\infty[$. En plus de la solution $y = x$, on a la solution $1 + x^2$ d'où les solutions
$y = \lambda x + \mu(1+x^2)$ en distinguant les cas selon les intervalles $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, +1[$, $I_3 =]+1, +\infty[$.

(3) On cherche les solutions sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, +\infty[$. e^x est solution, une autre solution est donnée par $(2x^2 + 6x + 10)e^{-x}$ et on distingue les cas selon que $x > -1$ ou $x < -1$.

(4) On cherche les solutions sur les intervalles $]-\infty, 1/2[$, $]1/2, 1[$, $]1, +\infty[$. On trouve les solutions $\dfrac{1}{1-x}$ et $\dfrac{1}{1-2x}$ (penser à la factorisation $1 - 3x + 2x^2 = (1-x)(1-2x)$). On étudie alors ce qui se passe dans l'un des 3 intervalles $]-\infty, 1/2[$, $]1/2, 1[$, $]1, +\infty[$.

Solution 1.3.7 On remarque tout d'abord que sur l'intervalle I, f et g ne s'annulent pas.
Si on pose $L(f) = 4xf'' + 2f' + f$ alors, comme $L(f) = L(g) = 0$, on a

$$\begin{aligned} gL(f) + fL(g) &= 0 \\ &= 4xgf'' + 2gf' + gf + 4xfg'' + 2fg' + fg \\ &= 4x(\underbrace{f''g + fg''}_{=-2f'g'}) + 2\underbrace{(fg)'}_{=0} + 2 \end{aligned}$$

car $fg = 1$ et en dérivant, on obtient successivement $(fg)' = f'g + fg' = 0$ et $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg'' = 0$. On simplifie pour trouver la relation $-4xf'g' + 1 = 0$. Ensuite, comme $g = \dfrac{1}{f}$, $g' = -\dfrac{f'}{f^2}$ ce qui donne finalement $4xf'^2 + f^2 = 0$. On en déduit que $I \subset]-\infty, 0[$ et que $\dfrac{f'}{f} = \dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{-x}}$ (on sait que f ne s'annule pas donc f garde un signe constant sur I). On peut intégrer ce qui donne $f(x) = Ce^{\varepsilon\sqrt{-x}}$ et $g(x) = \dfrac{1}{C}e^{-\varepsilon\sqrt{-x}}$ avec $I =]-\infty, 0[$.

Remarque : en cherchant des solutions développables en série entière, on aurait pu trouver les solutions :

$$y = \begin{cases} \lambda \operatorname{ch}\sqrt{-x} + \mu \operatorname{sh}\sqrt{-x} \text{ si } x < 0 \\ \lambda' \cos\sqrt{x} + \mu' \sin\sqrt{x} \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

On aurait pu aussi s'inspirer de l'exercice 1.3.5 numéro 2...

Solution 1.3.8 On étudie comme à l'exercice 1.3.13 les solutions de (E_1) : $2y'' + 5y' + 3y = 0$ et de (E_2) : $2y'' + 5y' - 3y = 0$. On aura alors tout de suite les solutions de signe constant de (E) :

$$y(x) = \begin{cases} ae^{-x} + be^{-3x/2} & a \geqslant 0, b \geqslant 0 \\ ce^{-3x} + de^{x/2} & c \leqslant 0, d \leqslant 0 \end{cases}.$$

Étude des solutions de signe non constant sur $\mathbb{R}$: posons $u(x) = e^{-x} - e^{-3x/2}$, $v(x) = e^{-3x} - e^{x/2}$. Si y est une solution de (E) qui s'annule en a, et si $\exists b > a$ tel que y reste positif sur $]a, b[$ alors y s'écrit sous la forme $\lambda u(x - a)$, $\lambda > 0$. On montre que l'intervalle maximal contenant $[a, b]$ tel que $y \geqslant 0$ n'a pas de borne supérieure. De même, comme $y'(a) > 0$, y change de signe en a, y reste négatif sur $] - \infty, a[$. D'où, dans ce cas les solutions, si on pose :

$$y_1(x) = \begin{cases} 7u(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ -v(x) & \text{si } x < 0 \end{cases} y_2(x) = \begin{cases} -7u(x) & \text{si } x < 0 \\ v(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

alors les solutions maximales qui changent de signe sur $\mathbb{R}$ sont de la forme $\lambda y_1(x - a)$, $\lambda > 0$ ou $\mu y_2(x - a)$, $\mu > 0$.

Solution 1.3.9 La factorisation sur $\mathbb{R}$ donne :

$$(y + y' + y'') \left[(y' - y'')^2 + (y'' - y)^2 + (y - y')^2 \right] = 0.$$

Les solutions seront à chercher parmi les solutions de (E_1) $y+y'+y'' = 0$ et (E_2) $y = y' = y''$ (ce qui correspond à l'annulation de l'une des deux parenthèses figurant dans le produit). Montrons que l'ensemble des solutions est la réunion des solutions de ces deux équations :
soit y une solution de (E) telle que $y'(a) - y''(a) \neq 0$. Soit I un intervalle maximal sur lequel

$$\forall x \in I,\ (y' - y'')(x) \neq 0 \text{ ou } (y - y')(x) \neq 0.$$

I est non vide (il contient a) et par continuité I n'est pas réduit à $\{a\}$. Supposons $I \neq \mathbb{R}$: soit b une borne de I appartenant à $\mathbb{R}$. On a déjà $y(b) = y'(b) = y''(b)$ et par continuité $y(b) + y'(b) + y''(b) = 0$ (car y vérifie $y + y' + y'' = 0$ sur I). Grâce à l'unicité d'une solution connaissant les conditions initiales (cf. *théorème 8.1 page 297*), y est la fonction nulle sur I. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse faite sur y.
On en déduit que les bornes de I ne sont pas réelles i.e. $I = \mathbb{R}$.

Conclusion : si y est une solution de (E) alors on distingue deux cas :

- S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $y'(a) \neq y''(a)$ alors y est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y+y'+y'' = 0$ et donc
$$y(x) = e^{-x/2} \left[\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right].$$
- Si, pour tout a de $\mathbb{R}$, $y'(a) = y''(a)$ alors $y'(x) = \lambda e^x$ et $y(x) = \lambda e^x + \mu$. Dans ce cas $y + y' + y'' = 3\lambda e^x + \mu$ n'est pas la fonction nulle donc il existe x tel que $y'(x) = y(x)$ soit $\mu = 0$. Dans ce cas les solutions sont de la forme
$$y(x) = \lambda e^x.$$

Solution 1.3.10 Quitte à changer y en $-y$, on suppose que $y(c) = \sup_{t \in [0,1]} |y(t)|$ (i.e. on suppose que $|y|$ prend son maximum pour une valeur de y positive. On a donc $y'(c) = 0$.
Soient a et b les bornes supérieures et inférieures des ensembles

$$\{x \in [0, c] \mid y(x) = 0\} \text{ et } \{x \in [c, 1] \mid y(x) = 0\}.$$

Sur $]a, b[$, $y(t) > 0$.
On a ensuite (avec le théorème des accroissements finis, cf. *théorème 4.7 page 70*)

$$y(c) = y(c) - y(a) = (c-a)y'(\alpha) = y(c) - y(b) = (c-b)y'(\beta)$$

donc $y'(\alpha) - y'(\beta) = \dfrac{y(c)(b-a)}{(c-a)(b-c)}$. On remarque que $\dfrac{b-a}{(c-a)(b-c)} \geqslant 4$. En effet $(c-a)(b-c) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$ (en étudiant la fonction $c \mapsto (c-a)(b-c)$ sur $[a,b]$). Puis $\dfrac{b-a}{(c-a)(b-c)} \geqslant \dfrac{4}{b-a} \geqslant 4$.
Maintenant, $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \int_\alpha^\beta |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \frac{|y''(x)|}{|y(x)|}\,\mathrm{d}x$. Cette dernière quantité est supérieure ou égale à $\displaystyle\frac{1}{y(c)}\int_\alpha^\beta |y''(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{y(c)}|y'(\alpha) - y'(\beta)|$ d'où

$$\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{y(c)}|y'(\alpha) - y'(\beta)| \geqslant \frac{1}{y(c)}4y(c) = 4.$$

Solution 1.3.11 Comme $y'(a) > 0$, la fonction y n'est pas la solution nulle, ses 0 sont isolés (cf. exercice précédent). Quitte à prendre une autre valeur pour b, on peut supposer que $y > 0$ sur $]a, b[$ et $y'(b) < 0$. En effet, comme les zéros de y sont en nombre fini sur $[a, b]$, on remplace b par le premier zéro de y strictement supérieur à a.
Supposons que $z > 0$ sur $[a, b]$ et posons $u = y'z - yz'$ (ceci correspond au wronskien, cf. *définition 8.1.5 page 301*),

$$u' = y''z - yz'' = yz(-f + g) \geqslant 0$$

mais $u(a) \geqslant 0$ et $u(b) \leqslant 0$ donc $u = 0$ sur $[a, b]$ (faire un tableau de variation).
En dérivant $\dfrac{y}{z}$ sur $]a, b[$, on trouve que cette fonction est constante, donc $z(a) = z(b) = 0$ ce qui est contradictoire avec $z > 0$ sur $]a, b]$.

Solution 1.3.12

(1) Comme $-\alpha u^2(b) \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b u'^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned}\varphi(u) &\geqslant \int_a^b f(t)u^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant \inf_{x\in[a,b]} f(x) \int_a^b u^2(t)\,\mathrm{d}t = \inf_{x\in[a,b]} f(x)\end{aligned}$$

car $\displaystyle\int_a^b u^2(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
$B = \{\varphi(u) \mid u \in A\}$ admet une borne inférieure λ_0.
On a, en normalisant (i.e. en appliquant l'inégalité $\varphi(u) \geqslant \lambda_0$ à $u = \dfrac{v}{\|v\|_2}$ où $\|v\|_2 = \left(\displaystyle\int_a^b v^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$ est la norme de la moyenne quadratique)

$$\forall v \in C^1([a, b], \mathbb{R}),\ \varphi(v) \geqslant \lambda_0 \int_a^b v^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

(2) On a $\displaystyle\int_a^b \left[y(t)y''(t) + (\lambda - f(t))y^2(t)\right] \mathrm{d}t = 0$ d'où, après une intégration par parties,

$$[y(t)y'(t)]_a^b - \int_a^b \left[y'^2(t) + (f(t) - \lambda)y^2(t)\right] \mathrm{d}t = 0$$

i.e. $\varphi(y) = \lambda \displaystyle\int_a^b y^2(t)\,\mathrm{d}t$. Compte tenu de l'inégalité stricte $\lambda < \lambda_0$ on en déduit $y = 0$ sur $[a, b]$ par l'absurde.

Solution 1.3.13

(1) On considère tout d'abord les équations différentielles (E_1) : $y' + 3x^2y = 0$ et (E_2) : $-y' + 3x^2y = 0$ qui admettent comme solutions $y_1 = \alpha e^{-x^3}$ et $y_2 = \beta e^{x^3}$.
Soit a tel que $y(a) = 0$ alors en étudiant les fonctions $z_1 = ye^{x^3}$ et $z_2 = ye^{-x^3}$ on a

$$z_1' = y' + 3x^2y \leqslant |y'| + 3x^2y = 0$$
$$z_2' = y' - 3x^2y \geqslant -|y'| - 3x^2y = 0$$

donc $z_1 \geqslant 0$ et $z_2 \leqslant 0$ pour $x \leqslant a$ (en dressant les tableaux de variations) i.e. $y = 0$, de même pour $x \geqslant a$. Conclusion y est la fonction nulle.

(2) Si y est non nulle alors y ne s'annule pas (et comme $3x^2y = -|y'|$, $y < 0$), et y' ne s'annule qu'en 0 donc y' garde un signe constant sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Les solutions maximales seront alors données par :

$$y(x) = \begin{cases} \alpha e^{\varepsilon x^3} & \text{si } x > 0 \\ \alpha e^{\varepsilon' x^3} & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{avec } \alpha < 0,\ \varepsilon = \pm 1,\ \varepsilon' = \pm 1$$

(le branchement en 0 est bien $\mathcal{C}^1$). On en déduit le nombre de courbes passant par un point de $\mathbb{R}^2$:

- Si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_-^*$ alors il passe 4 solutions maximales. En effet, si, par exemple, $x_0 > 0$ alors on a deux choix pour α qui sont $\alpha = y_0 e^{-\varepsilon x_0^2}$. Le choix de ε' multiplie alors le nombre de courbes par 2.
- Si $(x_0, y_0) \in \{0\} \times \mathbb{R}_-^*$ on a aussi quatre choix correspondant aux diverses valeurs que peuvent prendre ε et ε'.
- Si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ alors il ne passe aucune courbe.
- Si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$ on a vu que seule la fonction nulle répondait à la question.

Remarque : le théorème de Cauchy-Lipschitz (cf. *théorème 8.7 page 303*) ne s'applique pas ici (on ne peut exprimer y' en fonction de y), c'est l'une des raisons pour lesquelles le nombre de courbes maximales passant par un point n'est pas réduit à une seule courbe (comme dans la conclusion de ce théorème).

Solution 2.1.1 On a une différentielle exacte, l'intégration est immédiate : $ax^2 + 2bxy + dy^2 + ex + fy + K = 0$, les courbes intégrales sont des coniques lorsque $(a, b, d) \neq (0, 0, 0)$ sinon on trouve des droites.

Solution 2.1.2 1 et 3 sont à variables séparables :

(1) $e^x = \ln \dfrac{e^y}{1 + e^y} + C$.

(2) On pose $u = x^2 \Rightarrow y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} - 2u + 2y^4 = 0$ d'où les courbes intégrales : $x^2 - \lambda y^2 + y^4 = 0$.

(3) $x^2 = \lambda e^y(e^y - 2)$.

(4) On a une équation de Bernoulli, on pose $z = \sqrt{y} \Rightarrow y = (x + \lambda\sqrt{|x|})^2$.

(5) $y' = y^2 + y + 1$ satisfait au théorème de Cauchy-Lipschitz, on cherche les solutions maximales de cette équation qui s'écrit de manière équivalente sous la forme $z' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(z^2+1)$ en posant $z = \dfrac{2y+1}{\sqrt{3}}$.

On a une équation à variables séparables équivalente à $\operatorname{Arctan} \dfrac{2y+1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-a)$. On obtient alors $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \tan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x-a)\right) - \dfrac{1}{2}$ sur $]a - \pi/\sqrt{3}, a + \pi/\sqrt{3}[$. Tout intervalle ouvert de longueur $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ permet de définir une solution maximale.

Solution 2.2.1

(1) On a $y' = F(y)$ où F est de classe C^1 en tant que fonction polynomiale de $\mathrm{Re}(y)$ et $\mathrm{Im}(y)$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique (cf. *théorème 8.7 page 303*), il existe donc une unique solution maximale vérifiant : $y(t_0) = y_0$ pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C}$. La fonction nulle est solution sur $\mathbb{R}$ en entier et donc, si f est une solution qui s'annule en un point, f est nulle et donc, on pourra supposer par la suite que les solutions considérées ne s'annulent pas.

(2) On multiplie les deux membres de (E) par $\overline{y}$ d'où

$$y'\overline{y} = (1+i)u - u^2.$$

On fait de même avec $(\overline{\mathrm{E}})$ obtenue en passant aux conjugués dans (E) (et en multipliant par y). On obtient alors

$$\overline{y'}y = (1-i)u - u^2$$

et, en additionnant ces deux égalités, on arrive finalement à

$$u' = 2(u - u^2)$$

(en remarquant que $u' = (y\overline{y})' = y'\overline{y} + y\overline{y'}$, cf. dérivation d'une application bilinéaire, *proposition 6.1.1 page 257*). u vérifie une équation de Bernoulli et u ne s'annule pas.

(3) v vérifie l'équation $v' + 2v = 2$ qui admet 1 comme solution évidente. On trouve alors : $u = \dfrac{1}{1 + \lambda e^{-2t}}$.
- Si $\lambda \geqslant 0$, alors u est définie sur $\mathbb{R}$.
- Si $\lambda < 0$ alors u est définie sur $]-\dfrac{1}{2}\ln|\lambda|, +\infty[$ (ne pas oublier que $u > 0$).

(4) En remplaçant $|y|^2$ en fonction de u dans (E), y est solution de l'équation différentielle linéaire

$$y' = \left(1 + i - \frac{e^{2t}}{\lambda + e^{2t}}\right) y$$

donc $y = \mu \dfrac{e^{(1+i)t}}{\sqrt{\lambda + e^{2t}}}$, $\mu \in \mathbb{C}$. La condition $|y|^2 = u$ donne alors $|\mu| = 1$.

Jusqu'à présent, on a raisonné par implications, c'est à dire que les solutions de (E) sont de la forme indiquée ci-dessus. On vérifie alors que les fonctions obtenues sont solutions de (E) (en précisant à chaque fois quel est l'intervalle maximal).

Solution 2.2.2 Sur un intervalle I, si $0 \in I$ et si $z(0) = 0$ alors $\lim_{x \to 0} y(x)\dfrac{z(x)}{x} = y(0)z'(0) = 1$ donc $y(0) \neq 0$. y garde un signe constant que l'on suppose positif. On a alors $z' > 0$, $y' > 0$. En remplaçant z par $\dfrac{y}{x}$ on trouve l'équation : $xu^2 - u + 1 = 0$ où $u = \dfrac{y'}{y}$. On trouve alors pour $x \in]-\infty, \frac{1}{4}]$ $u = \dfrac{2}{1 + \sqrt{1-4x}}$ donc $\exists \lambda > 0$, $y = \lambda e^{-\sqrt{1-4x}}(1 + \sqrt{1-4x})$ et $z = \dfrac{1}{4\lambda} e^{\sqrt{1-4x}}(1 - \sqrt{1-4x})$. En prenant $I =]-\infty, \frac{1}{4}[$ on vérifie que les fonctions y et z définies ci-dessus conviennent. Pour obtenir toutes les solutions, il suffira de prendre λ dans $\mathbb{R}^*$.

Solution 2.2.3 On reconnaît un système différentiel autonome : $(x, y)' = F(x, y)$.

- Si $a = 0$ alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
- Si $a > 0$ alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}(O, a)$ où $\overline{D}(O, a)$ désigne le disque fermé de centre $(0, 0)$ de rayon a.

Si (x, y) est un couple de solutions sur I intervalle, alors $u = x^2 + y^2$ et $z = x + iy$ sont de classe C^1 sur I et vérifient :

$$u' = 2u\sqrt{u - a^2},\ z' = (\sqrt{u - a^2} - i)z.$$

Si $z = re^{i\theta}$ et $z \neq 0$ alors $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{r'}{r} + i\theta'$ donc $\theta' = -1$ car $z' = (\sqrt{u - a^2} - i)z$ soit $\theta(t) = t_1 - t$.

- Si $a = 0$ alors $u' = 2u^{3/2}$. On remarque que si u s'annule alors u est la solution nulle (en application du théorème de Cauchy-Lipschitz, cf. *théorème 8.7 page 303*). On écarte ce cas là alors $u \neq 0$ et $\dfrac{u'}{u^{3/2}} = 2$ s'intègre en
$$u = \left(\frac{1}{t - t_0}\right)^2,\ t \in]-\infty, t_0[$$
(on prend $t < t_0$ car $u' > 0$). On a donc $|z| = \dfrac{1}{t_0 - t}$ et les courbes intégrales admettent comme équation polaire $r(t) = \dfrac{1}{t_0 - t}$, $\theta(t) = t_1 - t$ soit $r(\theta) = \dfrac{1}{\theta + t_0 - t_1}$.
- Si $a \neq 0$ alors $u = a^2$ est solution particulière et correspond aux cas où la courbe intégrale est un cercle de centre O de rayon a.
On se place sur un intervalle où $u(t) > a^2$. En intégrant $\dfrac{u'}{u\sqrt{u - a^2}} = 2$ on trouve $\operatorname{Arctan} \dfrac{\sqrt{u - a^2}}{a} = a(t - t_0)$ soit $u = a^2(1 + \tan^2[a(t - t_0)])$, $t \in]t_0 - \frac{\pi}{2a}, t_0[$ ou $t \in]t_0, t_0 + \frac{\pi}{2a}[$.
On trouve alors $u = \dfrac{a^2}{\cos^2[a(t - t_0)]}$ soit $|z| = \dfrac{a}{\cos[a(t - t_0)]}$.
Finalement $r(\theta) = \dfrac{a}{\cos[a(\theta + t_0 - t_1)]}$ qui est l'équation d'une demi-droite tangente au cercle de centre O de rayon a.

Solution 2.2.4 On peut réécrire l'équation différentielle sous la forme

$$(y, z)' = \left(z, \frac{4z^2}{y - xz}\right) = F(x, y, z)$$

où F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - xz \neq 0\}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique (cf. *théorème 8.7 page 303*).

Analyse : On reconnaît une équation différentielle homogène en y, y', y''. Soit I un intervalle où y ne s'annule pas, alors en posant $u = \dfrac{y'}{y}$ on obtient : $(xu-1)u' + xu^3 + 3u^2 = 0$.
Sur $I \setminus \{0\}$ $v = xu$ est dérivable, elle vérifie : $(1-v)xv' = v(1+v)^2$ (équation à variables séparables).
Les intégrales particulières s'obtiennent pour $v = 0$ et $v = -1$; elles donnent respectivement $y = \lambda$ et $y = \dfrac{\mu}{x}$ (on vérifie que ces fonctions sont bien solutions).
Soit K un intervalle maximal où $v(1+v)$ ne s'annule pas alors on a $\dfrac{(1-v)v'}{v(1+v)^2} = \dfrac{1}{x}$ ce qui donne

$$x = \frac{av}{v+1}\exp\left(\frac{2}{v+1}\right) \text{ et } y = \frac{b}{v+1}\exp\left(\frac{-2}{v+1}\right)$$

car, en passant aux différentielles, on a

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{v+1}{a}\exp\left(\frac{-2}{v+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1-v}{(1+v)^2}$$

qui permet d'avoir l'expression de y.
En fait les courbes intégrales obtenues $\Gamma(t)$ sont invariantes par la transformation $(x,y) \mapsto (ax, by)$.
Pour étudier une courbe intégrale ($a = b = 1$), posons $t = \dfrac{1}{v+1}$, alors on obtiendra la paramétrisation suivante : $\begin{cases} x(t) = (1-t)e^{2t} \\ y(t) = te^{-2t} \end{cases}$.
Synthèse : on dérive par rapport à t les fonctions $x(t)$ et $y(t)$. On a $x'(t) = a(1-2t)e^{2t}$ et $y'(t) = b(1-2t)e^{-2t}$ donc, sur $]-\infty, \frac{1}{2}[= I_1$ et $]\frac{1}{2}, +\infty[= I_2$, $t \mapsto x(t)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On pourra donc exprimer y comme fonction de x. On vérifie alors que pour t dans l'un des intervalles I_k,

$$y - xz = y(t) - x(t)\frac{y'(t)}{x'(t)} = be^{-2t}(2t-1)$$

et donc les solutions ainsi mises en évidence sont des solutions maximales. Compte tenu de l'analyse, on peut affirmer que les solutions maximales sont représentées par les intégrales particulières $y = \lambda$ et $y = \dfrac{\mu}{x}$ auxquelles on rajoutera les branches des courbes $\Gamma(t)$ pour $t \in I_k$.

Solution 2.2.5

(1) On pose $z = y'$, on obtient une équation différentielle à variables séparables d'où

$$y = \begin{cases} -\dfrac{2}{\lambda}\operatorname{Arctan}\dfrac{x}{\lambda} + \mu \\ -\dfrac{1}{\lambda}\ln\left|\dfrac{x-\lambda}{x+\lambda}\right| + \mu \\ \dfrac{2}{x} + \mu \end{cases}$$

selon les cas.

(2) C'est une équation différentielle du second ordre, homogène en (y, y', y'').
Soit J un intervalle maximal où y ne s'annule pas, la fonction $u = \dfrac{y'}{y}$ est de classe C^1, l'équation se transforme en $xu' = u$. Si $0 \notin J$ $u = \lambda x$. $y = \mu e^{\lambda x^2/2}$. On obtient alors une solution maximale de l'équation différentielle (y ne peut s'annuler aux bornes de J).