ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. Équations différentielles linéaires

1.1. Équations linéaires d'ordre 1.

Exercice 1.1.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit $t \in \mathbb{R} \mapsto A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $A(t)$ est antisymétrique.

(1) Pour $X : t \in \mathbb{R} \mapsto X(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ solution de $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = A.X$, former l'équation différentielle dont $Y = X^{\mathrm{T}}X$ est solution.
(2) Montrer que, si $X(t_0)$ est orthogonale, il en est de même de $X(t)$ pour tout t.

Exercice 1.1.2. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$, f et g deux applications continues de I dans $\mathcal{L}(E)$ où $E = \mathbb{R}^n$.

(1) Montrer que, si $u : I \to \mathcal{L}(E)$ est solution de

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t) \circ x \text{ avec } u(t_0) = \mathrm{Id}_E \tag{1}$$

$(t_0 \in I)$ alors $u(t)$ est inversible pour tout t de I et que, si on pose $v(t) = [u(t)]^{-1}$ alors v est solution de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -y \circ f(t) \text{ avec } v(t_0) = \mathrm{Id}_E\,. \tag{2}$$

(2) Soient u et v les solutions respectives de $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t) \circ x$ et (3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y \circ g(t)$ telles que $u(t_0) = v(t_0) = \mathrm{Id}_E$; exprimer la solution de

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = f(t) \circ z + z \circ g(t), \tag{4}$$

qui prend en t_0 la valeur $z(t_0) = z_0$ en fonction de $u(t)$ et $v(t)$.

Exercice 1.1.3. $\boxed{\textbf{I}}$

Résoudre le système $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{-x}{2(1+x^2)} f(x) - \dfrac{1}{2(1+x^2)} g(x) \\ g'(x) = \dfrac{1}{2(1+x^2)} f(x) - \dfrac{x}{2(1+x^2)} g(x) \end{cases}$ (faire intervenir $h = f + ig$).

Exercice 1.1.4. $\boxed{\textbf{D}}$
Soit E un e.v. euclidien de dimension n et $f : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E)$ continue, bornée sur $\mathbb{R}$, $M = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \|f(t)\|$ (ici $\|f(t)\|$ désigne la norme de l'endomorphisme $f(t)$ subordonnée à la norme euclidienne, cf. *définition 5.1.32 page 231*).

(1) Si $\varphi\ : \mathbb{R} \to E$ est solution non nulle de :

$$x' = f(t).x \tag{1}$$

(attention ici la notation $f(t).x$ signifie $f(t)(x)$, image du vecteur x par l'endomorphisme $f(t)$) et si $\lambda \in \mathbb{R}$, écrire l'équation différentielle linéaire (2) vérifiée par $\psi_\lambda(t) = e^{-\lambda t}\varphi(t)$.

(2) Montrer que $\nu(t) = \|\psi_\lambda(t)\|^2$ est dérivable et que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ -(M+\lambda)\nu(t) \leqslant \frac{1}{2}\nu'(t) \leqslant (M-\lambda)\nu(t).$$

(3) Prouver que $I = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lim\limits_{t\to+\infty} \psi_\lambda(t) = 0\}$ et $J = \{\lambda \in \mathbb{R} | \lim\limits_{t\to+\infty} \|\psi_\lambda(t)\| = +\infty\}$ sont non vides et sont des intervalles.

1.2. **Équations linéaires à coefficients constants.**

Exercice 1.2.1. **F T**

Résoudre le système différentiel : $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 1.2.2. **F T**

Résoudre les systèmes :

1. $\begin{cases} x' = 5x - 2y + e^t \\ y' = \qquad -y + t \end{cases}$

2. $\begin{cases} x'' = 3x + y + \operatorname{ch} t \\ y'' = 2x + 2y \end{cases}$ (on posera $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$)

3. $\begin{cases} x' = x \ + 2y - z \\ y' = 2x \ + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = x \quad + y \quad + z \end{cases}$ θ réel fixé

5. $\begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = x \ + y + z \\ z' = 2x \quad + 2z \end{cases}$

6. $\begin{cases} x'' = 7x \ + 3y + t \\ y'' = -3x - 3y + e^t \end{cases}$

7. $\begin{cases} x'' = 3x + 2y - 2z \\ y'' = -x \quad + z \\ z'' = x \ + y \end{cases}$

Exercice 1.2.3. **F**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice n'ayant que des valeurs propres à partie réelle strictement négative. Soit X une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX.$$

Si A est diagonalisable, que dire de $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t)$. Généraliser au cas où A n'est pas diagonalisable.

Exercice 1.2.4. **F**

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(1) Résoudre le système différentiel $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = AX$ (1).

(2) Faire de même avec $\dfrac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} = AX$.
(3) En déduire $\exp(A)$.

Exercice 1.2.5. $\boxed{\textbf{F}}$

(1) Trouver A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour que $X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ et $X_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ soient solutions de

$$X'' = AX' + BX. \tag{E}$$

(2) Résoudre alors (E).

1.3. **Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2.**

Exercice 1.3.1. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient a et b deux fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, a(x) \geqslant \lambda > 0,\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} b(x) = 0$.

(1) Montrer que toute solution de l'équation différentielle

$$y' + a(x)y = b(x) \tag{E}$$

a une limite nulle en $+\infty$.
(2) Montrer qu'il existe une et une seule solution de (E) qui a une limite nulle en $-\infty$.

Exercice 1.3.2. $\boxed{\textbf{F T}}$
Résoudre l'équation différentielle

$$(1 + x)y'' + y' = \frac{1}{1 + x}.$$

Chercher le développement en série entière des solutions.

Exercice 1.3.3. $\boxed{\textbf{F}}$
Chercher une solution développable en série entière de l'équation différentielle homogène :

$$(1 + x)y'' - 2y' + (1 - x)y = 0 \tag{E$_0$}$$

(on posera $y = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $a_0 = a_1 = 1$).
En déduire les solutions de (E) : $(1 + x)y'' - 2y' + (1 - x)y = xe^{-x}$.

Exercice 1.3.4. $\boxed{\textbf{F}}$
Résoudre l'équation : (E) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 2 + 2x^3 \sin x$.

Exercice 1.3.5. $\boxed{\textbf{I C}}$
Trouver les fonctions f telles que l'équation :

(E) $$xy'' - y' - xyf(x) = 0$$

ait 2 solutions inverses l'une de l'autre (poser $y = \lambda z$ d'où $\lambda' = \dfrac{Cx}{z^2}$ et exprimer que $\lambda = \dfrac{1}{z^2}$).
Résoudre alors (E).

Exercice 1.3.6. $\boxed{\textbf{I C}}$
Résoudre l'équation : (E) $f''(x) + f(-x) = x + \cos x$.

Exercice 1.3.7. $\boxed{\textbf{I C}}$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $h_n(x) = e^x g_n(x)$ où $g_n(x) = (f_n(x))^{(n)}$ et $f_n(x) = e^{-x}\dfrac{x^n}{n!}$ (i.e. on peut encore écrire $h_n(x) = e^x \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}\dfrac{x^n}{n!}\right)$.

(1) Montrer que h_n est un polynôme de degré n, solution de l'équation différentielle :

(E_n) $$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

(2) Montrer par récurrence que h_n a n racines réelles distinctes positives (on montrera que (h_n) est une famille orthonormale de polynômes pour $B(f,g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$ puis, en appelant r le polynôme formé avec les racines positives de h_n d'ordre impair, on étudiera $B(h_n, r)$).

Exercice 1.3.8. $\boxed{\textbf{I}}$
Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $|y''| = y$.

Exercice 1.3.9. $\boxed{\textbf{I}}$
On considère l'équation différentielle

(E) $$y'' + e^{-x^2}y = \sin x \operatorname{th} x.$$

Soit f une solution de (E) sur $I = [1, +\infty[$ bornée de carré intégrable sur I.
Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 1.3.10. $\boxed{\textbf{I}}$
Soient A et B deux fonctions continues de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ et f une solution non identiquement nulle de l'équation différentielle

(E) $$y'' + Ay' + By = 0.$$

Montrer que f admet un nombre fini de 0 sur tout $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$.

Exercice 1.3.11. $\boxed{\textbf{I C}}$
Déterminer les conditions que doivent vérifier $a, b\ : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et C^0 respectivement, a ne s'annulant pas sur l'intervalle I, pour qu'il existe $\varphi\ : J \to I$, difféomorphisme de classe C^1 tel que le changement de variable $x = \varphi(t)$ transforme l'équation

$$a(x)y'' + b(x)y' + ky = 0$$

en une équation différentielle à coefficients constants.
Appliquer cette méthode à la résolution de $(1 - x^2)y'' - xy' + a^2y = 0$.

Exercice 1.3.12. $\boxed{\textbf{D C}}$
On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y'' + py = 0$$

où p est une fonction monotone croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Soit f une solution non nulle de (E) sur $\mathbb{R}_+$.

(1) Étudier l'ensemble des zéros de f et de f'.
(2) f est-elle bornée ?
(3) Si t_1 et t_2 sont deux zéros consécutifs de f', montrer que, si p est strictement monotone et si $t_1 < t_2$, alors $|f(t_1)| > |f(t_2)|$.

---

2. Équations différentielles non linéaires

2.1. **Équations non linéaires.**

Exercice 2.1.1. $\boxed{\textbf{F T}}$
Résoudre les équations différentielles :

(1) $(xy' - y)(xy' - 2y) + x^2 = 0$
(2) $(y - x)\sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}y = (1 + y^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x$ (poser $x = \tan u$, $y = \tan v$)
(3) $(3x^2 + 6xy^2)\,\mathrm{d}x + (4y^3 + 6x^2y)\,\mathrm{d}y = 0$
(4) $y'x^2 + (xy - 2)^2 = 0$ (x nécessairement non nul)

Exercice 2.1.2. $\boxed{\textbf{I T}}$
Résoudre les équations différentielles :

(1) $5y' - y\sin x + y^4 \sin 2x = 0$.
(2) $yy'^2 - 2xy' + y = 0$ (faire intervenir la fonction auxiliaire $z = x^2 - y^2$ et chercher les solutions définies sur $\mathbb{R}$).
(3) $(x^2 - y^2 - 1)y' - 2xy = 0$ (poser $X = x^2$, $Y = y^2$).
(4) $x(yy'' + y'^2) - yy' = 0$. En posant $Y = (y, y')$ on se ramènera au cas d'une équation différentielle du premier ordre et on appliquera le théorème de Cauchy-Lipschitz (cf. *théorème 8.7 page 303*) pour $(x, y, y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On posera enfin $u = \dfrac{y}{y'}$.
Chercher les solutions φ et l'intervalle maximal associé lorsque $\varphi(1) = 1$, $\varphi'(1) = a$.
(5) $x^2y' - y^2 - x^2y + 2x^2 = 0$ (donner une solution polynomiale y_0 et chercher les autres solutions sous la forme $y = y_0 + \dfrac{1}{z}$).

Exercice 2.1.3. $\boxed{\textbf{I}\quad\quad}$
Étudier les branches infinies des solutions de l'équation différentielle :

$$y = y'^2 \tan y'.$$

Exercice 2.1.4. $\boxed{\textbf{I}\quad\quad}$
À toute fonction φ de classe C^2, intégrale de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} \qquad f(x, y, y') = 0$$

sur un intervalle où φ'' ne s'annule pas, on associe l'arc paramétré $x \mapsto (X = \varphi'(x), Y = x\varphi'(x) - \varphi(x))$.

(1) Montrer qu'il représente une intégrale de (E') : $F(X, Y, Y') = f(Y', XY' - Y, X) = 0$.
(2) Réciproquement, prouver que toute intégrale de (E') permet de déterminer des intégrales de (E).
(3) Appliquer cette méthode (appelée transformation de Lagrange) pour intégrer l'équation différentielle : $(xy' - y)^2(x^2 - 1) + y'^2 = 0$.

Exercice 2.1.5. $\boxed{\textbf{D}\quad\quad}$
On considère l'équation différentielle

$$x' = \lambda + \frac{x^2}{1+t^2}.$$

On se propose d'en étudier les solutions maximales x définies sur $I \subset \mathbb{R}_+$ et telle que $x(0) = 0$.

(1) On suppose $0 < \lambda \leqslant 1/4$, montrer que

$$(\exists k \in \mathbb{R}_+)(\forall \lambda \in]0, 1/4])(\forall t \geqslant 0) \quad k \geqslant \lambda + \frac{k^2 t^2}{1+t^2}.$$

en déduire que x est définie sur $[0, +\infty[$ (on fera intervenir la fonction $y(t) = \dfrac{t}{2}$).

(2) On suppose $\lambda > 1/4$. Montrer que x est définie sur $[0, \omega[$ avec

$$\operatorname{sh} \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \leqslant \omega < \operatorname{sh} \frac{2\pi}{\sqrt{4\lambda - 1}}.$$

(Faire le changement de variable $t = \operatorname{sh}\theta$, le changement de fonction inconnue $x = y \operatorname{ch}\theta$.)

Indication 1.1.1 $Y' = 0$ et si $X(t_0)$ est orthogonale alors $Y(t_0) = I_n$.

Indication 1.1.2

(1) Poser $w = u \circ v$ et montrer que $w' = f(t) \circ w - w \circ f(t)$, $w(t_0) = \mathrm{Id}_E$.

(2) Utiliser la méthode de la question (1) : si v est solution de (3) alors v est inversible et v^{-1} est solution de $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -g(t) \circ x$. Pour l'équation (4), poser $w(t) = z(t) \circ [v(t)]^{-1}$ et montrer que $w(t) = u(t) \circ z_0$.

Indication 1.1.3 On a $h' = \dfrac{i - x}{2(1 + x^2)} h$ puis $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(a\sqrt{\sqrt{1 + x^2} + 1} - b\frac{x}{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}} \right)$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(b\sqrt{\sqrt{1 + x^2} + 1} + a\frac{x}{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}} \right)$

Indication 1.1.4

(1) On a immédiatement : $\psi'_\lambda(t) = (f(t) - \lambda \,\mathrm{Id}).\psi_\lambda(t)$.

(2) $\nu'(t) = 2(\psi'_\lambda(t)|\psi_\lambda(t))$ et par Cauchy-Schwarz $\frac{1}{2}\nu'(t) \leqslant \|f(t)\|\nu(t) - \lambda\nu(t) \leqslant M\nu(t) - \lambda\nu(t)$. De même pour $\frac{1}{2}\nu'(t) \geqslant -\|f(t).\psi_\lambda(t)\|.\|\psi_\lambda(t)\| - \lambda\nu(t) \geqslant -(M + \lambda)\nu(t)$.

(3) ν ne s'annule pas et on a $\forall t \in \mathbb{R}, \quad -2(M+\lambda) \leqslant \frac{\nu'(t)}{\nu(t)} \leqslant 2(M-\lambda)$, on intègre et on passe aux exponentielles. On obtient $\nu(0)e^{-2(M+\lambda)t} \leqslant \nu(t) \leqslant \nu(0)e^{2(M-\lambda)t}$. Si $\lambda > M$ alors $I \supset]M, +\infty[$, si $\lambda < -M$ alors $J \supset]-\infty, -M[$. On utilise ensuite la caractérisation des intervalles.

Indication 1.2.1 On trouve $X = aX_1 + bX_2 + cX_3$ où

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} -2\sin(t\sqrt{3}) \\ \sqrt{3}\cos(t\sqrt{3}) - \sin(t\sqrt{3}) \\ \sqrt{3}\cos(t\sqrt{3}) + \sin(t\sqrt{3}) \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 2\cos(t\sqrt{3}) \\ \cos(t\sqrt{3}) + \sqrt{3}\sin(t\sqrt{3}) \\ -\cos(t\sqrt{3}) + \sqrt{3}\sin(t\sqrt{3}) \end{pmatrix}.$$

Indication 1.2.2

(1) $x = \frac{2t}{5} - \frac{8}{25} - \frac{e^t}{4} + be^{-t} + ae^{5t}$.

(2) En posant $x = X + Y$, $y = -2X + Y$ alors
$X = a\,\mathrm{ch}\,t + b\,\mathrm{sh}\,t + \frac{1}{9}\,\mathrm{ch}\,2t$, $Y = c\,\mathrm{ch}\,2t + d\,\mathrm{sh}\,2t + \frac{t}{6}\,\mathrm{sh}\,2t$.

(3) L'ensemble des solutions est donné par $X = ae^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(4) $x = [\lambda\cos(t\sin\theta) - \mu\sin(t\sin\theta)]\exp[t\cos\theta]$, $y = [\lambda\sin(t\sin\theta) + \mu\cos(t\sin\theta)]\exp[t\cos\theta]$ et $z = [\alpha\cos(t\sin\theta) + \beta\sin(t\sin\theta)]\exp[t\cos\theta] + \nu e^t$ où
$$\begin{cases} \alpha &= \frac{(\cos\theta - \sin\theta - 1)\lambda + (\cos\theta + \sin\theta - 1)\mu}{2(1-\cos\theta)} \\ \beta &= \frac{(\cos\theta + \sin\theta - 1)\lambda - (\cos\theta - \sin\theta - 1)\mu}{2(1-\cos\theta)} \end{cases}$$

(5) $x = (at + b)e^{2t}$, $y = [at^2 + (2b - a)t + a - b + c]e^{2t}$, $z = (at^2 + 2bt + c)e^{2t}$.

(6) $x = 3\left(ae^{t\sqrt{6}} + be^{-t\sqrt{6}}\right) + c\cos t\sqrt{2} + d\sin t - \frac{t}{4} - \frac{e^t}{5}$,
$y = -(ae^{t\sqrt{6}} + be^{-t\sqrt{6}}) - 3(c\cos t\sqrt{2} + d\sin t) + \frac{t}{4} + \frac{2e^t}{5}$.

(7) $x = -2(a + ct)e^t + 2(b - c't)e^{-t}$, $y = (a + b + 2ct)e^t + (a' + b' - c't)e^{-t}$,
$z = (-a - b + 2c - ct)e^t + (-a' - b' + 2c' + c't)e^{-t}$.

Indication 1.2.3 Soit $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $X = PY$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = 0$.

Si A n'est pas diagonalisable alors $P^{-1}AP = T$ où T est une matrice trigonale et la conclusion persiste.

Indication 1.2.4

(1) Si $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ alors $\begin{cases} x_1=\alpha e^{6t}+\beta e^{2t} & x_3=\alpha e^{6t}-\beta e^{2t}\\ x_2=\gamma e^{6t}+\delta e^{2t} & x_4=\gamma e^{6t}-\delta e^{2t}\end{cases}$.

(2) De même, on trouve $x_1=\alpha e^{t\sqrt{6}}+\alpha' e^{-t\sqrt{6}}+\beta e^{t\sqrt{2}}+\beta' e^{-t\sqrt{2}}$, etc...

(3) Comme $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{6t}+e^{2t} & 0 & e^{6t}-e^{2t} & 0\\ 0 & e^{6t}+e^{2t} & 0 & e^{6t}-e^{2t}\\ e^{6t}-e^{2t} & 0 & e^{6t}+e^{2t} & 0\\ 0 & e^{6t}-e^{2t} & 0 & e^{6t}+e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\\x_3(0)\\x_4(0)\end{pmatrix}$ on a e^{At} et e^{A}.

Indication 1.2.5

(1) Soient A_i les vecteurs colonnes de A, B_i ceux de B alors $A=\begin{pmatrix}2&-2\\2&0\end{pmatrix}$,, $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$.

(2) Si X est solution de (E), X' l'est aussi.

Indication 1.3.1

(1) y solutions de l'équation différentielle s'écrit $y(x)=e^{-\alpha(x)}\int_0^x e^{\alpha(t)}b(t)\,\mathrm{d}t+Ce^{-\alpha(x)}$ où $\alpha(x)=\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$, on remarque que $-\alpha(x)\leqslant -\lambda x$ et on raisonne comme avec Césaro.

(2) La fonction $t\mapsto e^{\alpha(t)}b(t)$ est intégrable sur $]-\infty,0]$ puis on montre que la condition pour qu'une solution de l'équation différentielle ait une limite nulle en $-\infty$ est $C+\int_0^x e^{\alpha(t)}b(t)\,\mathrm{d}t\to 0$.

Indication 1.3.2 On pose $I_1=]-\infty,-1[$, $I_2=]-1,0[$ et $I_3=]0,+\infty[$ et on résout cette équation sur chaque intervalle I_k. On trouve alors $y_k=\frac{1}{2}\ln^2|1+x|+\lambda_k\ln|1+x|+\mu_k,\ x\in I_k,\ k\in\{1,2\}$. Les solutions D.S.E. sont données par $y=\frac{1}{2}\ln^2(1+x)+\lambda\ln(1+x)+\mu$ pour $x\in]-1,+1[$.

Indication 1.3.3 On peut ne pas faire de calcul... (pour l'équation homogène), ce n'est pas le cas pour l'équation complète où on trouve $y=A_k(2x^2+6x+5)e^{-x}+B_ke^{x}+\frac{x+1}{2}e^{-x}$.

Indication 1.3.4 Reconnaître une équation d'Euler, les solutions sont $y=\lambda x+\mu x^2+1-2x\sin x$.

Indication 1.3.5 Utiliser la méthode de variation de la constante, si l'équation admet deux solutions inverses l'une de l'autre y et z on pose $y=\lambda z$. On trouve $\lambda=\dfrac{1}{z^2}$ puis $z=z_0e^{-Cx^2/4}$, $y=\frac{1}{z_0}e^{Cx^2/4}$ et $f(x)=\frac{C^2x^2}{4}$.

Indication 1.3.6 Faire intervenir la partie paire et impaire de f.
On trouve $f(x)=\lambda\cos x+\mu\,\mathrm{sh}\,x+\frac{1}{2}x\sin x-x$.

Indication 1.3.7

(1) h_n est un polynôme en utilisant Leibniz, puis, en cherchant les solutions D.S.E. de (E_n) on trouve $y=a_0h_n$.

(2) Si on appelle r le polynôme formé avec les racines positives de h_n d'ordre impair, alors $B(h_n,r)>0$ puis $r=\lambda h_n$).

Indication 1.3.8 Montrer que, si f n'est pas la fonction nulle, alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (on résout les deux équations : $y''-y=0$ et $y''+y=0$ et on pose $g(x)=(f(x)+f'(x))e^{-x}$ et $h(x)=(f(x)-f'(x))e^{x}$). Étudier alors les cas selon le signe de f''. Les solutions sont données par $f(x)=ae^{x}+be^{-x}$ avec $(a,b)\in(\mathbb{R}_+)^2\setminus\{(0,0\}$.

Indication 1.3.9 On trouve $f'(x)=f'(1)-\int_1^x e^{-t^2}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_1^x\sin t\,\mathrm{th}\,t\,\mathrm{d}t$, montrer ensuite que la première intégrale admet une limite en $+\infty$ et faire une intégration par parties pour la seconde.

Indication 1.3.10 Supposer que f admet sur $[\alpha,\beta]$ une infinité de 0 et considérer $c\in[\alpha,\beta]$ point d'accumulation des zéros de f. Montrer alors que f est la solution nulle.

Indication 1.3.11 Poser $b_1(t) = b \circ \varphi(t)$ et $a_1(t) = a \circ \varphi(t)$, la condition cherchée se traduit par l'existence de deux réels α et β tels que $a_1(t) = \alpha\varphi'^2(t)$, $b_1(t)\varphi'^2(t) - a_1(t)\varphi''(t) = \beta\varphi'^3(t)$.
On trouve $b(x) = \frac{1}{2}a'(x) + \beta\sqrt{\frac{a(x)}{\alpha}}$.
Dans l'exemple proposé, on prend $\varphi(t) = \sin t$, ce qui donne
$y(t) = \lambda \sin(a \operatorname{Arcsin} x) + \mu \cos(a \operatorname{Arcsin} x),\ x \in]-1, 1[$.

Indication 1.3.12 On remarque tout d'abord que f et f' ne s'annulent pas simultanément, poser $A = \{x \geqslant 0 \mid f(x) = 0\}$ et $B = \{x \geqslant 0 \mid f'(x) = 0\}$ alors $A \cap B = \emptyset$.

(1) Montrer que A et B n'ont que des points isolés, que A et B sont infinis dénombrables, discrets, non bornés et alternés (i.e. entre deux éléments consécutifs de A il y a un élément de B et un seul).
(2) Poser $p_n = p(x_n)$ (où les x_n sont les points de A rangés dans l'ordre croissant et les t_n ceux de B) et $h(x) = \begin{cases} f^2(x) + \frac{1}{p_n}f'^2(x) & \text{si } x \in [x_n, t_n] \\ f^2(x) + \frac{1}{p_{n+1}}f'^2(x) & \text{si } x \in]t_n, x_{n+1}[\end{cases}$ sur $[x_1, +\infty[$ (on a fait l'hypothèse $t_n \in]x_n, x_{n+1}[$). Remarquer que h est bornée et majore f^2.
(3) Utiliser $h(t_n) = f^2(t_n)$.

Indication 2.1.1

(1) Équation homogène : $t = \frac{y}{x}$: $|t| > 2$: $x = \lambda\left(t + \varepsilon\sqrt{t^2 - 4}\right)\exp\left(\frac{2}{(t+\varepsilon\sqrt{t^2-4})^2}\right)$ $\varepsilon = \pm 1$.
(2) On obtient $\sin(v - u)\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}u$ et avec $w = v - u$: $\mathrm{d}w = (1 - \sin w)\,\mathrm{d}v$. Solution singulière : $\sin w = 1$: $y = -\frac{1}{x}$, $x < 0$; $u = \tan(\frac{w}{2} + \frac{\pi}{4}) - \lambda - w$, $v = \tan(\frac{w}{2} + \frac{\pi}{4}) - \lambda$, $(u\,;v) \in]-\pi/2, +\pi/2[^2$.
(3) On a une forme différentielle exacte : courbes intégrales : $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = a$.
(4) On pose $z = xy$ d'où $xz' = -(z - 1)(z - 4)$. $z = 1$: $y = \frac{1}{x}$; $z = 4$: $y = \frac{4}{x}$. Sinon $y = \frac{4x^3-\lambda^3}{x(x^3-\lambda^3)}$.

Indication 2.1.2

(1) Équation de Bernoulli, on pose $z = \dfrac{1}{y^3}$. $z(x) = \lambda \exp\left(\frac{3\cos x}{5} + 2\cos x + \frac{10}{3}\right)$, d'où $y(x) = \left[\lambda \exp\left(\frac{3\cos x}{5} + 2\cos x + \frac{10}{3}\right)\right]^{-1/3}$.
(2) On remarque que $z = x^2 - y^2$ est solution de $z'^2 = 4z$. Montrer que $J = \{x \in \mathbb{R} \mid z(x) = 0\} = [a, b]$ intervalle fermé de $\overline{\mathbb{R}}$, remarquer que si y est solution, $-y$ l'est aussi. Distinguer alors les cas $0 < a \leqslant b$, $a \leqslant 0 \leqslant b$.

$$y(x) = \begin{cases} -\sqrt{2ax - a^2} & \text{si } x \leqslant a \\ x & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ \sqrt{2bx - b^2} & \text{si } x \geqslant b \end{cases} \tag{1}$$

On obtient toutes les solutions définies sur $\mathbb{R}$ en prenant tous les couples $(a, b) \in [-\infty, 0]\times[0, +\infty]$ et en prenant éventuellement l'opposé de la solution définie en (1).
(3) On fait le changement indiqué et on cherche X comme fonction de Y : d'où $X = -Y + 1 + \lambda\sqrt{Y}$ i.e. : $x^2 = y^2 - \lambda y - 1 = 0$.
(4) On a une équation homogène en y, y', y'' équivalente à $\begin{cases} y' = z \\ z' = \frac{yz-xz^2}{xy} \end{cases}$. Écarter le cas des fonctions constantes et se placer sur l'intervalle maximal $I \subset \mathbb{R}^*$ où y ne s'annule pas, faire le changement de fonction inconnue suggéré : $u = \frac{y}{y'}$ puis trouver $u = \frac{x^2+\lambda}{x}$ d'où $\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2+\lambda}$ qui s'intègre immédiatement. Distinguer alors les cas $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$. Poser $a = \frac{1}{1+\lambda}$ et conclure
(i) Si $a < 0$, $y = \sqrt{-a}\sqrt{1 - 1/a - x^2}$ définie sur $]0, \sqrt{|\lambda|}[$.
(ii) Si $a = 0$ alors $y = 1$ solution constante définie sur $]0, +\infty[$.

(*iii*) Si $0 < a < 1$, la solution est définie sur $]0, +\infty[$.
(*iv*) Si $a = 1$, on a $y = x$ définie sur $]0, +\infty[$.
(*v*) Si $a > 1$, on a la même fonction qu'au (*iii*) mais elle est définie sur l'intervalle $]\sqrt{|\lambda|}, +\infty[$ ($\lambda < 0$).

(5) On a une équation de Riccati. $y_0(x) = -x^2 + 2x$ est une solution particulière d'où les solutions : $y = -x^2 + 2x + \dfrac{x^4}{x^2 + 2x + 2 + \lambda e^x}$. On discute alors selon le signe de λ.

Indication 2.1.3 Soit y une solution sur un intervalle I non majoré, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y' \in J_k =]-\pi/2 + k\pi, +\pi/2 + k\pi[$. On distingue les cas $k \geqslant 1$, $k \leqslant -1$, $k = 0$. On montre alors que $y^2(x) \to +\infty$.
Si $k \geqslant 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$ on pose $\alpha_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi = \lim_{x\to+\infty} y'(x)$ et on étudie la limite de $z(x) = y(x) - \alpha_k x$ d'où $y(x) = \alpha_k x - \alpha_k \ln x + o(\ln x)$.

Indication 2.1.4

(1) φ' est strictement monotone donc bijective, la condition $\forall X \in J,\ F(X, \Psi(X), \Psi'(X)) = 0$ est équivalente à la condition $\forall x \in I,\ f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$.
(2) La transformation de Lagrange est involutive.
(3) Dans l'exemple demandé, l'équation transformée est $Y^2(Y'^2 - 1) + X^2 = 0 \quad (E')$, on obtient alors les intégrales de (E) : $\begin{cases} x = \frac{\varepsilon' u}{\sqrt{u^2+1}} \\ y = \frac{\varepsilon' C}{\sqrt{u^2-u+1}} \exp\left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right) \frac{u-1-u^2}{\sqrt{1+u^2}} \end{cases}$.

Indication 2.1.5

(1) Soit $\varphi(t) = \lambda + \frac{k^2t^2}{1+t^2}$ montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) \leqslant \lambda + k^2$ et prendre $k = \frac{1}{2}$. Remarquer ensuite que x est croissant et avec $y(t) = \frac{t}{2}$ montrer par l'absurde que, sur un voisinage à droite de 0, on a $y(t) > x(t)$. Conclure alors que, si x solution maximale, est définie sur $[0, T[$, on a $x(t) \leqslant \frac{t}{2}$.
Raisonner encore par l'absurde en supposant que $T < +\infty$.
(2) On pose $x = y \operatorname{ch}\theta$, on obtient $y'(\theta) + y \operatorname{th}\theta = \lambda + y^2$. $y(\theta)$ est une fonction croissante, soit $z(\theta)$ telle que $z'(\theta) = \lambda + z^2$, $z(0) = y(0) = 0$, alors $z(\theta) = \sqrt{\lambda}\tan(\theta\sqrt{\lambda})$ et dans un voisinage à droite de 0, on a $y(\theta) < z(\theta)$.
On raisonne alors comme au 1 : si $y(\theta)$ était défini sur $[0, \theta_1[$ avec $\theta_1 < \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$, alors on obtient une contradiction. D'où $\theta_1 \geqslant \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$, et $x(t)$ est définie sur un intervalle $[0, \omega[$ où $\omega = \operatorname{sh}\theta_1 \geqslant \operatorname{sh}\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$.
En remarquant ensuite que $\operatorname{th}\theta < 1$, on a de même : $y'(\theta) \geqslant \lambda - y + y^2 = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \lambda - \frac{1}{4}$.
On introduit alors la fonction $u(\theta)$ définie par $u(0) = 0, \quad u'(\theta) = \lambda - u + u^2 = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \lambda - \frac{1}{4}$.
Comme au 1., $y(\theta) \geqslant u(\theta)$ et $u(\theta)$ est défini pour $\theta < \theta_2 = \frac{\alpha + \pi/2}{\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}}$. Si $y(\theta)$ est défini sur $[0, \theta_1[$, on a $\theta_1 \leqslant \theta_2$. Finalement $\omega = \operatorname{sh}\theta_1 \leqslant \operatorname{sh}\frac{\alpha+\pi/2}{\sqrt{\lambda-\frac{1}{4}}} < \operatorname{sh}\frac{2\pi}{\sqrt{4\lambda-1}}$.

1. Solutions :

Solution 1.1.1

(1) On trouve immédiatement que $Y' = 0$. En effet
$$Y' = X'^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}X' = X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}X + X^{\mathrm{T}}AX = 0$$
en utilisant la dérivation de la forme bilinéaire $(U, V) \mapsto U^{\mathrm{T}}V$ (cf. *proposition 6.1.1 page 257*).

(2) Si $X(t_0)$ est orthogonale, cela signifie que $Y(t_0) = I_n$ et comme Y est constante, $Y(t) = I_n$ pour tout t et par conséquent $X(t)$ est orthogonale pour tout t.

Solution 1.1.2

(1) Comme il est dit dans l'énoncé, soit v la solution de (2) satisfaisant la condition initiale : $v(t_0) = \mathrm{Id}_E$. v est déterminée de manière unique.
On a $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u \circ v) = f(t) \circ u \circ v - u \circ v \circ f(t)$ i.e. $w = u \circ v$ vérifie l'équation différentielle $w' = f(t) \circ w - w \circ f(t)$ et satisfait à la condition initiale $w(t_0) = \mathrm{Id}_E$. Or $x(t) = \mathrm{Id}_E$ est solution de cette équation, on peut donc dire que, grâce au théorème d'unicité de Cauchy, $w(t) = \mathrm{Id}_E$.

(2) On prouve de même qu'au 1, que si v est solution de (3) alors v est inversible et v^{-1} est solution de $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -g(t) \circ x$.
Soit z la solution de (4) telle que $z(t_0) = z_0$, posons
$$w(t) = z(t) \circ [v(t)]^{-1}.$$
On a alors $w'(t) = f(t) \circ w(t)$ et $w(t_0) = z_0$ donc $w(t) = u(t) \circ z_0$.
Conclusion : on a bien $z(t) = u(t) \circ z_0 \circ v(t)$.
Remarque : on pouvait parachuter la solution et utiliser le théorème de Cauchy comme au 1.

Solution 1.1.3 On peut réécrire le système différentiel sous la forme $h' = \dfrac{i - x}{2(1 + x^2)}h$ donc
$$h(x) = \frac{\exp\left(\dfrac{i}{2}\operatorname{Arctan} x\right)}{(1 + x^2)^{1/4}}$$
(cf. par exemple la *résolution page 300*).
Posons $\theta = \operatorname{Arctan} x \in]-\pi/2, \pi/2[$ alors, en utilisant les formules
$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{2}},\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}},\ \tan\theta = x$$
on obtient $\cos\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{Arctan} x\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{\sqrt{\sqrt{1 + x^2} + 1}}{(1 + x^2)^{1/4}}$ puis
$$\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x\right) = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{\sqrt{1 + x^2} - 1}}{(1 + x^2)^{1/4}} = \frac{x}{\sqrt{2}}\frac{1}{(1 + x^2)^{1/4}\sqrt{\sqrt{1 + x^2} + 1}}$$
car le sinus est du même signe que x. Finalement
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\left(a\sqrt{\sqrt{1 + x^2} + 1} - b\frac{x}{\sqrt{\sqrt{1 + x^2} + 1}}\right),$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(b\sqrt{\sqrt{1+x^2}+1} + a\frac{x}{\sqrt{\sqrt{1+x^2}+1}}\right)$$

Solution 1.1.4

(1) On a immédiatement : $\psi'_\lambda(t) = (f(t) - \lambda\,\mathrm{Id}).\psi_\lambda(t)$.

(2) On sait que $\nu'(t) = 2(\psi'_\lambda(t)|\psi_\lambda(t))$ d'où

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nu'(t) &= (f(t).\psi_\lambda(t)|\psi_\lambda(t)) - \lambda\nu(t)\\ &\leqslant \|f(t).\psi_\lambda(t)\|.\|\psi_\lambda(t)\| - \lambda\nu(t) && \text{par Cauchy-Schwarz}\\ &\leqslant \|f(t)\|\nu(t) - \lambda\nu(t) \leqslant M\nu(t) - \lambda\nu(t).\end{aligned}$$

De même

$$\frac{1}{2}\nu'(t) \geqslant -\|f(t).\psi_\lambda(t)\|.\|\psi_\lambda(t)\| - \lambda\nu(t) \geqslant -(M+\lambda)\nu(t).$$

(3) Comme $\varphi \neq 0$, φ ne s'annule pas (en effet, φ est solution d'une équation différentielle linéaire et, en vertu du théorème de Cauchy, il n'y a que la solution nulle qui s'annule), ν non plus et on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad -2(M+\lambda) \leqslant \frac{\nu'(t)}{\nu(t)} \leqslant 2(M-\lambda),$$

et en intégrant de 0 à $t > 0$:

$$-2(M+\lambda)t \leqslant \ln\frac{\nu(t)}{\nu(0)} \leqslant 2(M-\lambda)t,$$

et en passant aux exponentielles

$$\nu(0)e^{-2(M+\lambda)t} \leqslant \nu(t) \leqslant \nu(0)e^{2(M-\lambda)t}.$$

- Si $\lambda > M$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty}\nu(t) = 0$, donc $I \supset]M, +\infty[$.
- Si $\lambda < -M$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty}\nu(t) = +\infty$, donc $J \supset]-\infty, -M[$.

Enfin, $e^{-\lambda' t}\varphi(t) = e^{-\lambda t}\varphi(t)e^{(\lambda-\lambda')t}$ nous permet d'affirmer que si $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi_\lambda(t) = 0$ et si $\lambda' > \lambda$ alors $\lim\limits_{t\to+\infty}\psi_{\lambda'}(t) = 0$ i.e. $\lambda' \in I$ et donc $I \supset [\lambda, +\infty[$, I est bien un intervalle (on utilise la caractérisation des intervalles, cf. *proposition 3.1.3 page 50*).
Il en est de même pour J.

Solution 1.2.1 $A^{\mathrm{T}} = -A$ la seule valeur propre est 0. Si $P = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$ alors $P^{-1}AP = B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$, on pose $X = PY$ alors $Y' = BY$ d'où $X = aX_1 + bX_2 + cX_3$ où

$$X_1 = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix}-2\sin(t\sqrt{3})\\ \sqrt{3}\cos(t\sqrt{3}) - \sin(t\sqrt{3})\\ \sqrt{3}\cos(t\sqrt{3}) + \sin(t\sqrt{3})\end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix}2\cos(t\sqrt{3})\\ \cos(t\sqrt{3}) + \sqrt{3}\sin(t\sqrt{3})\\ -\cos(t\sqrt{3}) + \sqrt{3}\sin(t\sqrt{3})\end{pmatrix}.$$

Solution 1.2.2 Pour tous ces exercices, on utilise essentiellement la *remarque 8.1.4 page 299.*

(1) On résout la deuxième équation en y, ce qui donne : $y = t - 1 + 3be^t$ d'où $x = \dfrac{2t}{5} - \dfrac{8}{25} - \dfrac{e^t}{4} + be^{-t} + ae^{5t}$.

(2) On diagonalise A : $P^{-1}AP = D$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} x = X + Y \\ y = -2X + Y \end{cases}$

alors

$$X = a \operatorname{ch} t + b \operatorname{sh} t + \frac{1}{9} \operatorname{ch} 2t, \; Y = c \operatorname{ch} 2t + d \operatorname{sh} 2t + \frac{t}{6} \operatorname{sh} 2t.$$

(3) La matrice du système est symétrique (donc diagonalisable, cf. *corollaire 4.8 page 204*), de rang 1. Son noyau est le plan $x + 2y - z = 0$ et le sous-espace propre associé à la valeur propre 6 est engendré par le vecteur $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On prend $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, l'ensemble des solutions est donné par

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ae^{-t} v_1 + bv_2 + cv_3.$$

(4) En posant $u = x + iy$ on trouve immédiatement $u(t) = (\lambda + i\mu) \exp(te^{i\theta})$ d'où

$$\begin{cases} x = [\lambda \cos(t \sin\theta) - \mu \sin(t \sin\theta)] \exp[t \cos\theta] \\ y = [\lambda \sin(t \sin\theta) + \mu \cos(t \sin\theta)] \exp[t \cos\theta] \end{cases}$$

on trouve ensuite très rapidement

$$z = [\alpha \cos(t \sin\theta) + \beta \sin(t \sin\theta)] \exp[t \cos\theta] + \nu e^t$$

où $\begin{cases} \alpha & = \dfrac{(\cos\theta - \sin\theta - 1)\lambda + (\cos\theta + \sin\theta - 1)\mu}{2(1 - \cos\theta)} \\ \beta & = \dfrac{(\cos\theta + \sin\theta - 1)\lambda - (\cos\theta - \sin\theta - 1)\mu}{2(1 - \cos\theta)} \end{cases}$

(5) On remarque que $(A - 2I_3)^3 = 0$ où A désigne la matrice du système. Donc $e^{At} = e^{2t}[I_3 + (A - 2I_3)t + \dfrac{1}{2}(A - 2I_3)^2 t^2]$ et par conséquent :

$$\begin{cases} x = (at + b)e^{2t} \\ y = [at^2 + (2b - a)t + a - b + c]e^{2t} \\ z = (at^2 + 2bt + c)e^{2t} \end{cases}$$

(cf. *remarque 8.1.4 (ii) page 299*).

(6) Ce système s'écrit $X'' = AX + B$. Si $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ alors $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En posant $X = PY$ on se ramène à $Y'' = DY + P^{-1}B$. i.e. $\begin{cases} x_1'' = 6x_1 + \dfrac{1}{8}(3t + e^t) \\ y_1'' = -2y - \dfrac{1}{8}(t + 3e^t) \end{cases}$.

Ces deux équations différentielles linéaires s'intègrent facilement et en revenant aux variables initiales, on obtient :

$$\begin{cases} x = 3\left(ae^{t\sqrt{6}} + be^{-t\sqrt{6}}\right) + c\cos t\sqrt{2} + d\sin t - \dfrac{t}{4} - \dfrac{e^t}{5} \\ y = -\left(ae^{t\sqrt{6}} + be^{-t\sqrt{6}}\right) - 3\left(c\cos t\sqrt{2} + d\sin t\right) + \dfrac{t}{4} + \dfrac{2e^t}{5} \end{cases}$$

(7) On a $X'' = AX$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. La seule valeur propre de A est 1 et on remarque que $(A - I_3)^2 = 0$. Avec $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ on obtient $P^{-1}(A - I_3)P = N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
En posant $X = PY$, le système s'écrit $Y'' = (I_3 + N)Y$ qui s'intégre sans problème.
Finalement, après calculs, on arrive à :

$$\begin{cases} x = -2(a + ct)e^t + 2(b - c't)e^{-t} \\ y = (a + b + 2ct)e^t + (a' + b' - c't)e^{-t} \\ z = (-a - b + 2c - ct)e^t + (-a' - b' + 2c' + c't)e^{-t} \end{cases}$$

Solution 1.2.3 On a : $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et si $X = PY$, $Y = (y_k)$, alors $y_k(t) = a_k \exp(\lambda_k t)$. Comme $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ on en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} y_k(t) = 0$ pour tout k et donc $\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t) = 0$. Par continuité du produit matriciel on obtient

$$\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0.$$

Si A n'est pas diagonalisable alors $P^{-1}AP = T$ où T est une matrice trigonale. donc $y_k(t) = \sum Q_{j,k}(t)e^{\lambda_j t}$ où λ_j est une valeur propre de A, la conclusion persiste.

Solution 1.2.4

(1) Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}' = B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}' = B\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$ où $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ d'où $\begin{cases} x_1 = \alpha e^{6t} + \beta e^{2t} & x_3 = \alpha e^{6t} - \beta e^{2t} \\ x_2 = \gamma e^{6t} + \delta e^{2t} & x_4 = \gamma e^{6t} - \delta e^{2t} \end{cases}$.

(2) De même, on trouve $x_1 = \alpha e^{t\sqrt{6}} + \alpha' e^{-t\sqrt{6}} + \beta e^{t\sqrt{2}} + \beta' e^{-t\sqrt{2}}$, etc...

(3) On peut écrire $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{6t} + e^{2t} & 0 & e^{6t} - e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{6t} + e^{2t} & 0 & e^{6t} - e^{2t} \\ e^{6t} - e^{2t} & 0 & e^{6t} + e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{6t} - e^{2t} & 0 & e^{6t} + e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \end{pmatrix}$ d'où e^{At} et e^A en utilisant le *théorème 8.5 page 299*.

Solution 1.2.5

(1) En appelant A_i les vecteurs colonnes de A, B_i ceux de B on trouve

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet on écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et on écrit les équations vérifiées par ces coefficients :

$$\begin{array}{llll} 1 & = a + b + \alpha & -1 & = b + \alpha \\ 0 & = b + \beta & 0 & = -a - \beta \\ 2 & = c + d + \gamma\text{'} & -1 & = -c + \delta \\ 1 & = d + \delta & 0 & = d + \gamma \end{array}$$

que l'on résout simplement...

(2) Si X est solution de (E), X' l'est aussi, d'où la base de l'ensemble des solutions : X_1, X_1', X_2, X_2' car ces vecteurs forment une famille libre. On obtient ainsi un système fondamental de solutions (cf. *définition 8.1.4 page 298*).

Solution 1.3.1

(1) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle considérée s'écrit

$$y(x) = e^{-\alpha(x)} \int_0^x e^{\alpha(t)} b(t)\,\mathrm{d}t + Ce^{-\alpha(x)}$$

où $\alpha(x) = \displaystyle\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t$ (cf. **a)** *page 300*).

Pour prouver que toute solution a une limite nulle en $+\infty$, on remarque que $-\alpha(x) \leqslant -\lambda x$ (majoration d'intégrale) et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\alpha(x)} = 0$. Il reste donc à montrer que $y_1(x) = e^{-\alpha(x)} \displaystyle\int_0^x e^{\alpha(t)} b(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 en ∞.

On raisonne comme avec Césaro : soit x_1 tel que $t \geqslant x_1 \Rightarrow |b(t)| \leqslant \lambda\dfrac{\varepsilon}{2}$ alors

$$|y_1(x)| \leqslant e^{-\alpha(x)} A + \int_{x_1}^x e^{\alpha(t)-\alpha(x)} b(t)\,\mathrm{d}t$$

où on a posé $A = \left|\displaystyle\int_0^{x_1} e^{\alpha(t)} b(t)\,\mathrm{d}t\right|$ et pris $x \geqslant x_1$.

On majore $e^{\alpha(t)-\alpha(x)}$ par $e^{-\lambda(x-t)}$ d'où

$$|y_1(x)| \leqslant e^{-\alpha(x)} A + \frac{\varepsilon}{2} \int_{x_1}^x \lambda e^{-\lambda(x-t)}\,\mathrm{d}t.$$

La deuxième quantité se majore facilement par $\dfrac{\varepsilon}{2}$, on choisit ensuite $x_2 \geqslant x_1$ pour que $e^{-\alpha(x)} A$ soit inférieur à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour $x \geqslant x_2$.

Remarque : on peut simplifier considérablement cette démonstration en utilisant l'égalité

$$e^{\alpha(x)} = 1 + \int_0^x e^{\alpha(t)} a(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_0^x e^{\alpha(t)} a(t)\,\mathrm{d}t \text{ car } (e^{\alpha(x)})' = e^{\alpha(x)} a(x).$$

et en remarquant que $e^{\alpha(t)} b(t) = o\left(e^{\alpha(t)} a(t)\right)$. La conclusion est alors une conséquence immédiate de l'intégration des relations de comparaison.

(2) Pour $x < 0$ on a $e^{\alpha(x)} \leqslant e^{\lambda x}$ donc la fonction $t \mapsto e^{\alpha(t)} b(t)$ est intégrable sur $]-\infty, 0]$.

Cherchons la condition pour qu'une solution de l'équation différentielle ait une limite nulle en $-\infty$:

$$y(x) = e^{-\alpha(x)} \left[C + \int_0^x e^{\alpha(t)} b(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

Pour que y ait une limite nulle ($e^{-\alpha(x)}$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$), il est nécessaire que la quantité entre crochets tende vers 0. Ceci impose l'unique choix pour C : $C = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha(t)}b(t)\,\mathrm{d}t$ (et donc s'il existe une solution de limite nulle en $-\infty$, elle est unique).

Soit $y_0(x) = e^{-\alpha(x)}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{\alpha(t)}b(t)\,\mathrm{d}t$. Il reste à montrer que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y_0(x) = 0$.

Soit $x_1 \leqslant 0$ tel que $t \leqslant x_1 \Rightarrow |b(t)| \leqslant \varepsilon\lambda$, alors

$$|y_0(x)| \leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{x} e^{-\lambda(x-t)}\,\mathrm{d}t = \varepsilon$$

et donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y_0(x) = 0$.

Solution 1.3.2 On pose $I_1 =]-\infty,-1[$, $I_2 =]-1,0[$ et $I_3 =]0,+\infty[$ et on résout cette équation sur chaque intervalle I_k. On trouve alors $y_k' = \dfrac{\ln|1+x|}{1+x} + \dfrac{\lambda_k}{1+x}$ pour $x \in I_k$ et en intégrant

$$y_k = \frac{1}{2}\ln^2|1+x| + \lambda_k \ln|1+x| + \mu_k,\ x \in I_k,\ k \in \{1,2\}.$$

On remarque que, pour $x \in]-1,1[$, on obtient des fonctions développables en série entière. Pour chercher ce développement, on procède comme au **c** *page 285* :

On cherche les solutions sous la forme $y' = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ on trouve $b_n = (-1)^n(b_0 - S_n)$ où $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$, ce qui donne :

$$y = \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{S_n}{n}x^n}_{=\frac{1}{2}\ln^2(1+x)} + \lambda\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}}_{=\ln(1+x)} + \mu$$

pour $x \in]-1,+1[$.

Remarque : on aurait pu retrouver ce résultat directement en faisant le produit de convolution des développements en série entière de $\ln(1+x)$:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}\right)^2 &= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p(n-p)}\right)(-1)^n x^n\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p}+\frac{1}{n-p}\right)(-1)^n\frac{x^n}{n}\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{S_n}{n}x^n\end{aligned}$$

Solution 1.3.3 La recherche d'une solution développable en série entière nous donne une seule solution : $y = e^x$. On utilise alors la méthode de variation de la constante (cf. *page 301*). Avec $y = ze^x$, z est solution de l'équation : $(1+x)z'' + 2xz' = xe^{-x}$ ce qui donne finalement, avec $I_1 =]-\infty,-1[$, $I_2 =]-1,+\infty[$,

$$y = A_k(2x^2+6x+5)e^{-x} + B_k e^x + \frac{x+1}{2}e^{-x},\ x \in I_k.$$

Solution 1.3.4 L'équation homogène est une équation d'Euler (cf. *exemple (i) page 302*). On pose $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, +\infty[$.
Les solutions de l'équation homogène s'écrivent : $y = \lambda_k x + \mu_k x^2$, pour $x \in I_k$, $k = 1, 2$. Une solution particulière est $1 - 2x \sin x$ (méthode exposée *page 301*) d'où les solutions :

$$y = \lambda x + \mu x^2 + 1 - 2x \sin x.$$

Solution 1.3.5 On utilise la méthode de variation de la constante (cf. *page 301*). On note $I_1 =]-\infty, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$. Si l'équation en question admet deux solutions inverses l'une de l'autre y et z alors sur chaque intervalle I_k, ces solutions ne vont pas s'annuler.
On pose $y = \lambda z$. En remplaçant dans (E) on obtient :

$$\lambda'[2xz' - z] + \lambda'' xz = 0 \Leftrightarrow \lambda' = \frac{Cx}{z^2}. \tag{1}$$

Comme $yz = 1$ on sait que $\lambda = \dfrac{1}{z^2}$ et en dérivant on a $\lambda' = -\dfrac{2z'}{z^3}$ et en utilisant la relation (1) on arrive à $\dfrac{z'}{z} = -\dfrac{C}{2}x$ i.e. $z = z_0 e^{-Cx^2/4}$, $y = \dfrac{1}{z_0} e^{Cx^2/4}$.
En remplaçant dans (E) on trouve : $f(x) = \dfrac{C^2 x^2}{4}$.
La réciproque est immédiate avec $C \neq 0$ (on trouve $e^{\pm Cx^2/4}$ comme solutions).

Solution 1.3.6 On écrit f en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire : $f = p + i$ (cf. *question (ii) page 128*).
La partie paire de f vérifie $p'' + p = \cos x$, la partie impaire $i'' - i = x$ d'où

$$p(x) = \lambda \cos x + \lambda' \sin x + \frac{1}{2} x \sin x, \ \ i(x) = \mu' \operatorname{sh} x + \mu \operatorname{ch} x - x$$

p paire $\Rightarrow \lambda' = 0$, i impaire $\Rightarrow \mu' = 0$ et en conclusion

$$f(x) = \lambda \cos x + \mu \operatorname{sh} x + \frac{1}{2} x \sin x - x.$$

La réciproque est immédiate.

Solution 1.3.7

(1) Par Leibniz (cf. *théorème 4.12 page 74*), on a :

$$h_n(x) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{n!}{(n-p)!(p!)^2} x^p.$$

En cherchant les solutions développables en série entière de (E_n) : $y = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^p$ on trouve $a_p = -\dfrac{n-p+1}{p^2} a_{p-1}$ d'où, si $k \geqslant 1$: $a_{n+k} = 0$ et $a_p = (-1)^p \dfrac{n!}{(n-p)!(p!)^2} a_0$ i.e. $y = a_0 h_n$.
Conclusion : h_n est bien solution de E_n.

(2) (h_n) est une famille orthonormale de polynômes pour $B(f,g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) g(x) e^{-x}\,dx$ donc h_n a n racines réelles distinctes sur $]0, +\infty[$ (résultat classique, on appelle r le polynôme formé avec les racines positives de h_n d'ordre impair, $B(h_n, r) > 0$ donc $\deg r \geqslant \deg h_n$ car h_n est orthogonal à tous les polynômes de degré inférieur à $n-1$ soit $r = \lambda h_n$).

Solution 1.3.8 Tout le problème ici se pose lorsque f s'annule. On va montrer que, si f n'est pas la fonction nulle, alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Soit f une solution non nulle sur $\mathbb{R}$. Si $f(a) = 0$ alors, comme f est positive, f passe par un minimum en a et $f'(a) = 0$.
L'équation considérée correspond à deux équations : $y'' - y = 0$ et $y'' + y = 0$. Considérons les deux fonctions $g(x) = (f(x) + f'(x))e^{-x}$ et $h(x) = (f(x) - f'(x))e^{x}$.

$$g'(x) = (f''(x) - f(x))e^{-x} \leqslant 0 \text{ et } h'(x) = (f(x) - f''(x))e^{x} \geqslant 0.$$

Vu que $f(x) = \dfrac{1}{2}(g(x)e^{x} + h(x)e^{-x})$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(g(x)e^{x} - h(x)e^{-x})$ et sachant que $f(a) = f'(a) = 0$, on déduit que $g(a) = h(a) = 0$. On a alors les tableaux de variation suivants

x	$-\infty$		a		$+\infty$
g		$\searrow$	0	$\searrow$	
h		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

on a donc $f \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $f = 0$ ce qui a été écarté.
Conclusion : f ne s'annule pas et f'' garde un signe constant.
On distingue alors 2 cas :

- Si $f'' < 0$ alors f est solution de $y'' + y = 0$ donne $f(x) = a\cos x + b\sin x$ ce qui est impossible car f ne peut garder un signe constant.
- Si $f'' > 0$ alors f est solution de $y'' + y = 0$ donne $f(x) = ae^{x} + be^{-x}$ ce qui fournit une solution à condition de prendre $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2 \setminus \{(0, 0\}$.

Solution 1.3.9 On intégre la relation (E), on trouve :

$$f'(x) = f'(1) - \int_1^x e^{-t^2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x \sin t \operatorname{th} t\,\mathrm{d}t.$$

Comme f est bornée, la première intégrale admet une limite en $+\infty$. Quant à la deuxième, on fait une intégration par parties :

$$\int_1^x \sin t \operatorname{th} t\,\mathrm{d}t = [-\cos t \operatorname{th} t]_1^x + \int_1^x \frac{\cos t}{\operatorname{ch}^2 t}\,\mathrm{d}t$$

La partie toute intégrée est bornée et la fonction qui reste dans l'intégrale est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc f' est bornée.
Comme f' est une fonction bornée, f^2 est uniformément continue car $(f^2)' = 2ff'$ est aussi bornée. Or, on a supposé que $t \mapsto f^2(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, on sait alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Solution 1.3.10 Supposons que f admette sur $[\alpha, \beta]$ une infinité de 0.
Il existe alors $c \in [\alpha, \beta]$ point d'accumulation des zéros de f. Comme f est continue, $f(c) = 0$.
On sait aussi qu'il existe une suite (c_n) d'éléments de $[\alpha, \beta]$ telle que $f(c_n) = 0$ convergeant vers c. On a alors $\dfrac{f(c) - f(c_n)}{c - c_n} = 0$ et à la limite, $f'(c) = 0$, f est donc la solution nulle (c'est une conséquence immédiate du théorème de Cauchy-Lipschitz, cf. *théorème 8.1 page 297*, car $f(c) = f'(c) = 0$ et 0 est l'unique solution de (E) qui vérifie ces conditions initiales).

Remarque : l'équation différentielle $y''+\dfrac{2}{x}y'+\dfrac{1}{x^4}y=0$ admet sur $]0,1[$ la solution $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ qui admet une infinité de 0 sur $]0,1[$. Il est donc essentiel que l'on se limite à un segment.

Solution 1.3.11 On pose $b_1(t)=b\circ\varphi(t)$ et $a_1(t)=a\circ\varphi(t)$. L'équation transformée s'écrit alors

$$\frac{a_1}{\varphi'^2}y''+\left(\frac{b_1}{\varphi'}-\frac{a_1}{\varphi'^3}\varphi''\right)y'+ky=0$$

(φ' ne s'annule pas car c'est un difféomorphisme).
La condition cherchée se traduit donc par l'existence de deux réels α et β tels que

$$a_1(t)=\alpha\varphi'^2(t),\quad b_1(t)\varphi'^2(t)-a_1(t)\varphi''(t)=\beta\varphi'^3(t).$$

φ doit être solution sur J des deux équations différentielles $\alpha x'^2=a(x)$ et $b(x)x'^2-a(x)x''=\beta x'^3$.
En dérivant la première, en simplifiant par x' (qui est supposé ne pas s'annuler) et en reportant dans la seconde, on obtient

$$b(x)\frac{a(x)}{\alpha}-a(x)\frac{a'(x)}{2\alpha}=\beta\left(\frac{a(x)}{\alpha}\right)^{3/2}$$

i.e.

$$b(x)=\frac{1}{2}a'(x)+\beta\sqrt{\frac{a(x)}{\alpha}}.$$

Dans l'exemple proposé, on a $b(x)=\dfrac{1}{2}a'(x)$, il suffit donc de prendre $\beta=0$, $\alpha=\pm1$ du signe de $a(x)$.
Pour $I=]-1,+1[$, on prendra $\varphi(t)=\sin t$, $J=]-\pi/2,+\pi/2[$, ce qui donne

$$y''+a^2y=0$$

qui admet les solutions

$$y(t)=\lambda\sin at+\mu\cos at=\lambda\sin(a\operatorname{Arcsin}x)+\mu\cos(a\operatorname{Arcsin}x),\ \ x\in]-1,1[.$$

Solution 1.3.12 On remarque tout d'abord que, f étant non nulle et solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, f et f' ne s'annulent pas simultanément (par le théorème de Cauchy, il n'y a que la fonction nulle qui s'annule pour les conditions initiales), i.e. si on pose $A=\{x\geqslant0\mid f(x)=0\}$ et $B=\{x\geqslant0\mid f'(x)=0\}$ alors $A\cap B=\emptyset$.

(1) Montrons que A et B n'ont que des points isolés : soit (a_n) une suite de 0 de f qui converge vers a. Par continuité, on a tout d'abord $f(a)=0$. Puis, en étudiant le rapport $\dfrac{f(a_n)-f(a)}{a_n-a}=0$ et en passant à la limite, on obtient $f'(a)=0$ ce qui est impossible.
Montrons que A et B sont infinis : soit $x_0\geqslant0$, notons $p_0=p(x_0)>0$, on pose $\varphi(x)=\sqrt{p_0}(x-x_0)$, $g(x)=f'(x)\sin\varphi(x)-\sqrt{p_0}f(x)\cos\varphi(x)$.
On a $g'(x)=(p_0-p(x))f(x)\sin\varphi(x)$.
Supposons que, pour $x\in]x_0,x_0+\pi/\sqrt{p_0}[$, on ait $f(x)>0$, alors $g'(x)\leqslant0$ et $g(x_0)=-\sqrt{p_0}f(x_0)<0$ ce qui est contradictoire.
L'hypothèse $f(x)<0$ l'est aussi, donc f s'annule entre x_0 et $x_0+\dfrac{\pi}{\sqrt{p_0}}$. Ceci permet d'affirmer que A est infini, et comme ses points sont isolés, A est dénombrable. En effet, pour tout n, $A\cap[0,n]$ est fini donc, comme $A=\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A\cap[0,n]$ alors A, réunion dénombrable d'ensembles finis est dénombrable. On a donc $A=\{x_n,n\in\mathbb{N}\}$, où l'on

peut supposer la suite (x_n) strictement croissante.
Grâce au théorème de Rolle, entre deux 0 de f, il y a un 0 de f', donc $B = \{t_n, n \in \mathbb{N}\}$, la suite (t_n) étant elle aussi strictement croissante. On remarque en outre qu'entre deux 0 de f', il y a un 0 de f car $f''(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$.
Conclusion : les ensembles A et B sont dénombrables, discrets, non bornés et alternés (i.e. entre deux éléments consécutifs de A il y a un élément de B et un seul, et réciproquement).

(2) On pose $p_n = p(x_n)$ et $h(x) = \begin{cases} f^2(x) + \dfrac{1}{p_n} f'^2(x) & \text{si } x \in [x_n, t_n] \\ f^2(x) + \dfrac{1}{p_{n+1}} f'^2(x) & \text{si } x \in]t_n, x_{n+1}[\end{cases}$ sur $[x_1, +\infty[$ (on a fait l'hypothèse $t_n \in]x_n, x_{n+1}[$).
h est continue, dérivable et $h'(x) = \begin{cases} 2f(x)f'(x)\left(1 - \dfrac{p(x)}{p_n}\right) & \text{si } x \in [x_n, t_n] \\ 2f(x)f'(x)\left(1 - \dfrac{p(x)}{p_{n+1}}\right) & \text{si } x \in [t_n, x_{n+1}] \end{cases}$.
On remarque alors que h est décroissante sur chacun des intervalles $[x_n, t_n]$ et $]t_n, x_{n+1}[$, h est positive et décroissante donc bornée et elle majore f^2 donc f est bien bornée.

(3) Comme $h(t_n) = f^2(t_n)$, on peut conclure que la suite $(|f(t_n)|)$ est décroissante.

Solution 2.1.1

(1) Équation homogène : $t = \dfrac{y}{x}$: $|t| > 2$: $x = \lambda\left(t + \varepsilon\sqrt{t^2 - 4}\right) \exp\left(\dfrac{2}{(t + \varepsilon\sqrt{t^2 - 4})^2}\right)$ $\varepsilon = \pm 1$.

(2) On obtient $\sin(v - u)\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}u$ et avec $w = v - u$: $\mathrm{d}w = (1 - \sin w)\,\mathrm{d}v$. Solution singulière : $\sin w = 1$: $y = -\dfrac{1}{x}$, $x < 0$; $u = \tan(\frac{w}{2} + \frac{\pi}{4}) - \lambda - w$, $v = \tan(\frac{w}{2} + \frac{\pi}{4}) - \lambda$, $(u\ ; v) \in] - \pi/2, +\pi/2[^2$.

(3) On a une forme différentielle exacte : courbes intégrales : $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = a$.

(4) On pose $z = xy$ d'où $xz' = -(z - 1)(z - 4)$. $z = 1$: $y = \dfrac{1}{x}$; $z = 4$: $y = \dfrac{4}{x}$. Sinon $y = \dfrac{4x^3 - \lambda^3}{x(x^3 - \lambda^3)}$.

Solution 2.1.2

(1) On a affaire à une équation de Bernoulli, sur un intervalle I (maximal) où y solution ne s'annule pas, on pose $z = \dfrac{1}{y^3}$.
z satisfait $5z' + 3z \sin x = 3 \sin 2x$ i.e. $z(x) = \lambda \exp\left(\dfrac{3\cos x}{5} + 2\cos x + \dfrac{10}{3}\right)$. D'où, sur I, on a $y(x) = \left[\lambda \exp\left(\dfrac{3\cos x}{5} + 2\cos x + \dfrac{10}{3}\right)\right]^{-1/3}$.

(2) On remarque que si y est solution sur $\mathbb{R}$, alors $z = x^2 - y^2$ est solution de $z'^2 = 4z$.
Soit $J = \{x \in \mathbb{R} \mid z(x) = 0\}$, montrons que J est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$:
- Si $a < b$ sont dans J, alors si $|z|$ passe par un maximum en $c \in]a, b[$, on a $z'(c) = 0$ donc $z(c) = 0$ (car $z = \dfrac{z'^2}{4}$ et $z = 0$ sur $[a, b]$). Donc $[a, b] \subset J$. J est bien un intervalle (caractérisation des intervalles, cf. *proposition 3.1.3 page 50*) et il est évidemment fermé (image réciproque de $\{0\}$ qui est un fermé par la fonction continue z, cf. *remarque 5.1.15 page 230*).

- Si $J = \emptyset$ alors z est solution sur $\mathbb{R}$ de $z' = \pm 2\sqrt{z}$ i.e. il existe $a \in \mathbb{R}$ ou $b \in \mathbb{R}$ tels que $\sqrt{z(x)} = a - x$ pour $x < a$ ou $\sqrt{z}(x) = x - b$ pour $b < x$. Comme ces solutions ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$, on les écarte.
- Si $J = [a, b]$, on recolle grâce à l'étude précédente les solutions pour avoir

$$z(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & \text{si } x \leqslant a \\ 0 & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ (x-b)^2 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

- Si J est non borné, il suffit de se ramener au cas précédent avec $a = +\infty$ ou $b = -\infty$.

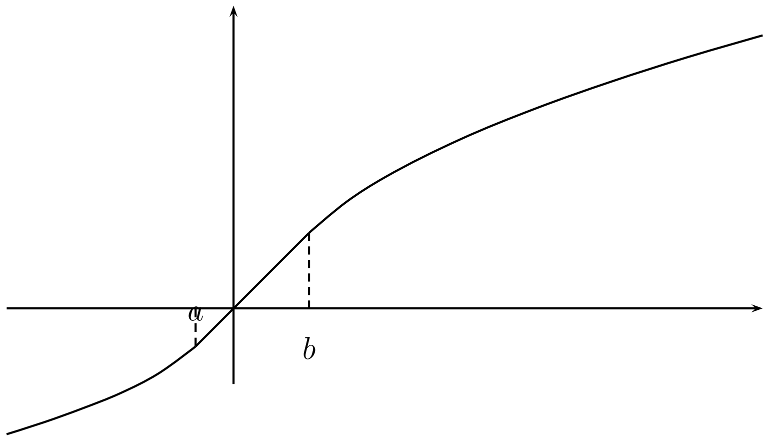
Revenons à y : si y est solution, $-y$ l'est aussi.

- Si $0 < a \leqslant b$ on ne peut définir les solutions que sur l'intervalle $[a/2, +\infty[$, de même si $a \leqslant b < 0$. En effet $y^2 = x^2 - z^2 = x^2 - (x-a)^2 = a(2x - a)$ n'est positif que si $x \geqslant \dfrac{a}{2}$ (si $a \geqslant 0$) et si $a \leqslant b < 0$, $y^2 = x^2 - (x-a)^2$ n'est positif que si $x \leqslant \dfrac{a}{2}$.
- Si $a \leqslant 0 \leqslant b$ (a et b pouvant être infinis) on obtient :

(1)
$$y(x) = \begin{cases} -\sqrt{2ax - a^2} & \text{si } x \leqslant a \\ x & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ \sqrt{2bx - b^2} & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

qui est une solution définie et continue sur $\mathbb{R}$. Comme $y'_d(b) = y'_g(b)$, le branchement en b est $\mathcal{C}^1$ (théorème du prolongement dérivable, cf. *théorème 4.10 page 72*). Comme c'est la même chose pour $x = a$, on obtient finalement toutes les solutions définies sur $\mathbb{R}$ en prenant tous les couples $(a, b) \in [-\infty, 0] \times [0, +\infty]$ et en prenant éventuellement l'opposé de la solution définie en (1).

On peut faire un dessin illustrant cette situation :



Remarque : en prenant $y' = t$ comme paramètre et en supposant $y' \neq 0$ on obtient $x = \dfrac{t^2+1}{2t} y$ et $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ donc $y = Ct$ et $x = C\dfrac{t^2+1}{2}$ ce qui correspond à une portion de parabole.

(3) On fait le changement indiqué et on cherche X comme fonction de Y : on trouve $2YX' - X = -Y - 1$ équation différentielle linéaire qui admet comme solutions : $X = -Y + 1 + \lambda\sqrt{Y}$ i.e. : $x^2 = y^2 - \lambda y - 1 = 0$ faisceau de cercles centrés sur l'axe Oy et passant tous par les points $(\pm 1, 0)$. On peut alors déterminer les solutions maximales.

Remarque : si y est solution alors, sur un intervalle où y ne s'annule pas, $\dfrac{1}{y^2}$ est un facteur intégrant, on retrouve alors les solutions.

(4) On a une équation homogène en y, y', y'' : elle est équivalente à $\begin{cases} y' = z \\ z' = \dfrac{yz - xz^2}{xy} \end{cases}$ i.e. $Y' = f(x, Y)$. Les conditions de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites pour tout triplet de conditions initiales $(x_0, y_0, y_0') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On considère maintenant y solution définie sur un intervalle maximale $I \subset \mathbb{R}^*$.
Les fonctions constantes sont solutions, on écarte ce cas par la suite.
Sur l'intervalle maximal $I \subset \mathbb{R}^*$, y ne s'annule pas, y' ne s'annule pas non plus. En effet, si $y'(x_0) = 0$ alors la fonction définie sur I par $y_0(x) = y(x_0)$ est une solution et par l'unicité de la solution au problème de Cauchy alors $y = y_0$ est constante ce qui a été écarté. On peut alors faire le changement de fonction inconnue suggéré : $u = \dfrac{y}{y'}$
u vérifie $xu' + u = 2x$ et donc l'ensemble des solutions sur $I \subset \mathbb{R}^*$ s'écrit $u = \dfrac{x^2 + \lambda}{x}$ (on a résolu l'équation linéaire du premier ordre) ce qui donne

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + \lambda}. \tag{1}$$

Étudions maintenant les différents cas (l'intégration de la relation (1) est immédiate).
- Si $\lambda > 0$, $y = \mu\sqrt{x^2 + \lambda}$ est une solution définie sur $I \subset \mathbb{R}^*$ (où $I =]-\infty, 0[$, $I =]0, +\infty[$) qui peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
- Si $\lambda < 0$, on obtient $y = \mu\sqrt{|x^2 + \lambda|}$, solutions définies sur un intervalle $|x| > \sqrt{|\lambda|}$ ou $0 < |x| < \sqrt{|\lambda|}$ qui se prolongent par continuité sur $\mathbb{R}$ mais pas en des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.
- Enfin, le cas $\lambda = 0$ donne les solutions $y = \mu x$ définies sur $I \subset \mathbb{R}^*$ (où $I =]-\infty, 0[$, $I =]0, +\infty[$) qui peuvent se prolonger en des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur $\mathbb{R}$.

On peut alors maintenant discuter (avec $a = \dfrac{1}{1 + \lambda}$) :
(i) Si $a < 0$, ici $\lambda = \dfrac{1}{a} - 1$, $y = \sqrt{-a}\sqrt{1 - 1/a - x^2}$ définie sur $]0, \sqrt{|\lambda|}[$.
(ii) Si $a = 0$ alors $y = 1$ solution constante définie sur $]0, +\infty[$.
(iii) Si $0 < a < 1$, on prend $\mu = \sqrt{a}$, $\lambda = \dfrac{1}{a} - 1$, la solution est définie sur $]0, +\infty[$.
(iv) Si $a = 1$, on a $y = x$ définie sur $]0, +\infty[$.
(v) Si $a > 1$, on a la même fonction qu'au (iii) mais elle est définie sur l'intervalle $]\sqrt{|\lambda|}, +\infty[$ ($\lambda < 0$).
On peut aussi poser $z = yy'$, l'équation devient alors $xz' - z = 0 \Leftrightarrow z = \lambda x \Leftrightarrow yy' = \lambda x \Leftrightarrow y^2 = \lambda x^2 + \mu$.

(5) On reconnaît une équation de Riccati. $y_0(x) = -x^2 + 2x$ est une solution particulière. En effet, si y est un polynôme non constant alors $\deg y' < \deg y$ et les termes de plus haut degré de l'expression $x^2 y' - y^2 - x^2 y + 2x^2$ se trouvent en examinant le polynôme $-y^2 - x^2 y = -y(y + x^2)$. On cherche alors la solution polynomiale en l'écrivant $y_0 = -x^2 + ax + b$ et le calcul est immédiat.
Pour $x \neq 0$, on cherche les autres solutions sous la forme $y = y_0 + \dfrac{1}{z}$ (en effet, grâce à Cauchy-Lipschitz, $y - y_0$ ne s'annule pas).
z vérifie : $x^2 z' - (x^2 - 4x)z + 1 = 0$ i.e. $z(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^4} + \lambda\dfrac{e^x}{x^4}$ d'où les solutions :

$$y = -x^2 + 2x + \frac{x^4}{x^2 + 2x + 2 + \lambda e^x}.$$

- Si $\lambda \geqslant 0$, les solutions sont définies sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ mais on peut les raccorder en $(0,0)$ comme on le souhaite.
- Si $\lambda < 0$, elles sont définies sur $]-\infty, x_0[$ ou $]x_0, +\infty[$, non raccordables en x_0 car $x^2 + 2x + 2 + \lambda e^x$ ne s'annule qu'en un point (étudier $f(x) = (x + 2x + 2)e^{-x}$) et on peut préciser :
  - $x_0 > 0$ si $\lambda > -2$,
  - $x_0 = 0$ si $\lambda = -2$,
  - et $x_0 < 0$ si $\lambda < -2$.

Solution 2.1.3 Soit y une solution sur un intervalle I non majoré. En supposant y' continue, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, on sait qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y' \in J_k =]-\pi/2 + k\pi, +\pi/2 + k\pi[$ (l'hypothèse de continuité sur y' n'est pas essentielle, il suffit d'utiliser le théorème de Darboux).

- Si $k \geqslant 1$, $y' > 0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y(x)}{y'^2(x)} = +\infty$ (y' est bornée), on a alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \tan y'(x) = +\infty$ et donc $y' \to k\pi + \dfrac{\pi}{2}$.
- Si $k \leqslant -1$, avec le même genre de raisonnement, on arrive à $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.
- Si $k = 0$, alors $(y^2)' = 2yy' = 2y'^2(y' \tan y') \geqslant 0$, donc y^2 est croissante.

Supposons que y ne soit pas la fonction nulle, alors on a deux cas :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} y^2(x) = +\infty$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} y^2(x) = l^2 > 0$.

Montrons que le deuxième cas est impossible :
si $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = l$ (par exemple), on peut trouver $a > 0$ tel que $y'(x) > 0$ pour $x \geqslant a$. Considérons la fonction $f(t) = t^2 \tan t$, sur $]0, \pi/2[$, f est une bijection strictement croissante, donc $y' = f^{-1}(y)$ est aussi strictement croissante, ce qui est en contradiction avec le fait que y soit bornée.
Conclusion : si y n'est pas la fonction nulle, y tend vers $\pm\infty$.
Étudions maintenant le cas où $k \geqslant 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$:
posons $\alpha_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = \alpha_k$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y(x)}{x} = \alpha_k$ (soit en utilisant la règle de l'Hôpital généralisée, soit, avec l'hypothèse y' continue, en utilisant la comparaison des intégrales divergentes).
On veut étudier la limite de $z(x) = y(x) - \alpha_k x$. En reportant dans l'équation différentielle, on a déjà : $z + \alpha_k y = (\alpha_k + z')^2 \tan(\alpha_k + z') = -\dfrac{(\alpha_k + z')^2}{\tan z'}$. Comme $z' \to 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{z(x)}{x} = 0$, on peut écrire :

$$-\alpha_k^2 \sim \tan z'(z + \alpha_k x) \sim xz'\left(\frac{z}{x} + \alpha_k\right) \sim \alpha_k x z',$$

d'où $z' \sim -\dfrac{\alpha_k}{x}$ i.e. $z \sim -\alpha_k \ln x$.
Finalement : $y(x) = \alpha_k x - \alpha_k \ln x + o(\ln x)$.
Remarque : on peut intégrer cette équation en posant $y' = t$, on obtient alors

$$\begin{cases} x(t) = -\ln|\cos t| + t\tan t + x_0 \\ y(t) = t^2 \tan t \end{cases}$$

Solution 2.1.4

(1) φ' est strictement monotone donc bijective, soit ψ son application réciproque :
$$x \in I, X = \varphi'(x) \Leftrightarrow X \in J, x = \psi(X).$$
ψ et φ' sont de classe C^1 et $Y = x\varphi'(x) - \varphi(x) = X\psi(X) - \varphi \circ \psi(X) = \Psi(X)$ est de classe C^1 sur J.
On remarque que $\Psi'(X) = \dfrac{x\varphi''(x)}{\varphi''(x)} = \psi(X)$ d'où $XY' - Y = \varphi'(x)x - x\varphi'(x) + \varphi(x) = \varphi(x)$.
La condition $\forall X \in J$, $F(X, \Psi(X), \Psi'(X)) = 0$ est équivalente à la condition $\forall x \in I$, $f(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$.

(2) La transformation de Lagrange est involutive car de toute intégrale Ψ de (E') de classe C^2 sur un intervalle J où Ψ'' ne s'annule pas peut se ramener à une intégrale de (E).

(3) Dans l'exemple demandé, l'équation transformée est
$$(E') \qquad Y^2(Y'^2 - 1) + X^2 = 0$$
elle est homogène.
<u>Analyse</u> : cette relation s'écrit $Y' = \varepsilon\sqrt{1 - \dfrac{X^2}{Y^2}}$ et en posant $Y = tX$, on obtient $X'[\varepsilon\sqrt{t^2 - 1} - t^2) - tX = 0$ équation différentielle linéaire qui admet comme solutions :
$$\begin{cases} X = \dfrac{C}{\sqrt{u^2 - u + 1}} \exp\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \dfrac{2u - 1}{\sqrt{3}}\right) \\ Y = \dfrac{\varepsilon' C\sqrt{1 + u^2}}{\sqrt{u^2 - u + 1}} \exp\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \dfrac{2u - 1}{\sqrt{3}}\right) \end{cases}$$
où $u = \varepsilon\sqrt{t^2 - 1} \in \mathbb{R}$.
<u>Synthèse</u> : si $X \neq 0$ sur I intervalle alors $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \neq 0$ et donc $t \mapsto X(t)$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme ce qui justifie les calculs.
On obtient alors les intégrales de (E) :
$$\begin{cases} x = \dfrac{\varepsilon' u}{\sqrt{u^2 + 1}} \\ y = \dfrac{\varepsilon' C}{\sqrt{u^2 - u + 1}} \exp\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \dfrac{2u - 1}{\sqrt{3}}\right) \dfrac{u - 1 - u^2}{\sqrt{1 + u^2}} \end{cases}.$$

Solution 2.1.5

(1) Soit $\varphi(t) = \lambda + \dfrac{k^2t^2}{1 + t^2}$, φ est croissante sur $[0, +\infty[$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) \leqslant \lambda + k^2$. Il suffit donc que $k \geqslant \lambda + k^2$ i.e. $\left(k - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \lambda - \dfrac{1}{4} \leqslant 0$ et comme $\lambda \leqslant \dfrac{1}{4}$, il suffit de prendre $k = \dfrac{1}{2}$.
On remarque ensuite que $x'(t) \geqslant 0$ donc x est croissant. Soit $y(t) = \dfrac{t}{2}$, d'après ce qui précède,
$$y'(t) = \frac{1}{2} \geqslant \lambda + \frac{t^2/4}{1 + t^2} = \lambda + \frac{y^2(t)}{1 + t^2}$$
avec $y(0) = x(0) = \lambda$ et $y'(0) = \dfrac{1}{2} > x'(0) = \lambda$
Sur un voisinage à droite de 0, on a $y(t) > x(t)$. Raisonnons par l'absurde : si $\exists t > 0$ tel que $y(t) < x(t)$ alors, grâce au théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_1 > 0$

tel que $x(t_1) = y(t_1)$ et notons $t_0 = \inf\{t > 0 \mid x(t) = y(t)\}$. Cet ensemble est non vide et minoré par hypothèse, fermé (par continuité des fonctions x et y), il contient sa borne inférieure. Le théorème de Rolle nous assure l'existence de $u \in]0, t_0[$ tel que $y'(u) - x'(u) = 0$. Or

$$y'(u) - x'(u) = \lambda + \frac{y^2(u)}{1+u^2} - \lambda - \frac{x^2(u)}{1+u^2} = \frac{(y(u)-x(u)).(y(u)+x(u))}{1+u^2}.$$

Ceci nous mène à une contradiction car on obtient $y(u) = x(u)$ pour $u < t_0$.
Conclusion : si x solution maximale, est définie sur $[0, T[$, on a $x(t) \leqslant \dfrac{t}{2}$.
Supposons maintenant que $T < +\infty$. $x(t) \leqslant \dfrac{T}{2}$ donc la fonction $x(t)$ est croissante et majorée, elle admet donc une limite l en T. On peut alors appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour $t = T$, $x(T) = l$ et ainsi prolonger la solution maximale (par le théorème du prolongement dérivable), ce qui est contradictoire. On utilise en fait le résultat de la *proposition 8.2.1 page 303.*
Conclusion finale : x solution maximale est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

(2) Faisons le changement de variable $t = \operatorname{sh}\theta$ et le changement de fonction inconnue $x = y\operatorname{ch}\theta$, on obtient

$$x'(\theta) = \lambda\operatorname{ch}\theta + \frac{x^2}{\operatorname{ch}\theta} \text{ soit } y'(\theta) + y\operatorname{th}\theta = \lambda + y^2.$$

$x(\theta)$ est une fonction croissante, il en est de même de $y(\theta)$, donc

$$y'(\theta) \leqslant \lambda + y^2, \qquad \text{pour tout } \theta \geqslant 0.$$

Soit $z(\theta)$ telle que $z'(\theta) = \lambda + z^2$, $z(0) = y(0) = 0$, alors $z(\theta) = \sqrt{\lambda}\tan(\theta\sqrt{\lambda})$.
On remarque ensuite que l'on a :

$$z'(0) = \lambda = y'(0), \quad z''(0) = 0 = y''(0), \quad z'''(0) = 2\lambda^2 > 2\lambda^2 - 2\lambda = y'''(0).$$

(La variable ici est θ). Donc, dans un voisinage à droite de 0, on a $y(\theta) < z(\theta)$.
On raisonne alors comme au 1 : si $y(\theta)$ était défini sur $[0, \theta_1[$ avec $\theta_1 < \dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$, alors on pourrait prolonger y fonction bornée et croissante ce qui est impossible.
Première conclusion : $\theta_1 \geqslant \dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$, et $x(t)$ est définie sur un intervalle $[0, \omega[$ où $\omega = \operatorname{sh}\theta_1 \geqslant \operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$.
En remarquant ensuite que $\operatorname{th}\theta < 1$, on a de même :

$$y'(\theta) \geqslant \lambda - y + y^2 = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \lambda - \frac{1}{4}.$$

On introduit alors la fonction $u(\theta)$ définie par

$$u(0) = 0, \quad u'(\theta) = \lambda - u + u^2 = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + \lambda - \frac{1}{4}$$

qui s'intègre en $u(\theta) = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\lambda - \dfrac{1}{4}}\tan\left(\theta\sqrt{\lambda - \dfrac{1}{4}} - \alpha\right)$. Avec $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{4\lambda - 1}}$ (pour $u(0) = 0$).
Comme au 1., $y(\theta) \geqslant u(\theta)$ et $u(\theta)$ est défini pour $\theta < \theta_2 = \dfrac{\alpha + \pi/2}{\sqrt{\lambda - \frac{1}{4}}}$, si $y(\theta)$ est défini

sur $[0, \theta_1[$, on a nécessairement $\theta_1 \leqslant \theta_2$. Pour $x(t)$ on aura alors

$$\omega = \operatorname{sh} \theta_1 \leqslant \operatorname{sh} \frac{\alpha + \pi/2}{\sqrt{\lambda - \dfrac{1}{4}}} < \operatorname{sh} \frac{2\pi}{\sqrt{4\lambda - 1}}.$$

Ceci permet bien de conclure.