FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

1. Calcul différentiel

1.1. Applications continûment différentiables.

Exercice 1.1.1. **I C**
Soit

$$f\ :M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\mapsto\det M\in\mathbb{R},$$

prouver que f est différentiable, calculer $f'(M)$.

Exercice 1.1.2. **I**
Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $(x,y)\mapsto(x+y,xy)$.

(1) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle. Quels sont les points où le jacobien de f est nul?
(2) Montrer que la restriction f_U de f à l'ouvert U définit par $|y|<|x|$ est une bijection de U sur un ouvert V que l'on déterminera ; trouver la réciproque de f_U et sa différentielle.

Exercice 1.1.3. **D**
Soit Ω l'ensemble des matrices symétriques définies positives d'ordre n.

(1) Montrer que Ω est un ouvert de l'espace des matrices symétriques.
(2) Montrer que l'application $\varphi\ :A\in\Omega\mapsto A^2\in\Omega$ est un C^1-difféomorphisme.

Exercice 1.1.4. **D C**
Soit f définie sur V voisinage de $a\in\mathbb{R}$ à valeurs dans E espace vectoriel de dimension finie, telle que $f''(a)$ existe (on suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ sur V).

(1) $\varepsilon>0$ étant donné, montrer que, pour t assez voisin de a, on a :
$$\|f'(t)-f'(a)-(t-a)f''(a)\|<\varepsilon|t-a|$$
En déduire une majoration de :
$$\|f(y)-f(x)-(y-x)f'(a)-\frac{1}{2}(y-a)^2f''(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''(a)\|$$
valable pour x et y assez voisins de a.
(2) Soit $F\ :\ V^2\to E$ définie par : $F(x,y)=\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ pour $y\neq x$ et $F(x,x)=f'(x)$.
Montrer que F est différentiable au point (a,a) avec $F'(a,a)=\dfrac{1}{2}f''(a).(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$.
(3) Domaine de définition de la fonction $F(x,y)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^t}{(xe^t+1)(ye^t+1)}$. Étudier la continuité de F sur son domaine de définition et sa différentiabilité.

1.2. Fonctions numériques continûment différentiables.

Exercice 1.2.1. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, $a \in E$ unitaire. On définit

$$f\ : x \in E \mapsto \|a \wedge x\| \in \mathbb{R}.$$

(1) Déterminer le domaine où f est de classe C^1 et préciser le gradient de f.
(2) Même question pour la restriction g de f à $\{a\}^{\perp}$.

Exercice 1.2.2. $\boxed{\textbf{I}}$
Domaine de définition et continuité de

$$F(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+y^{2n}}\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 1.2.3. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit

$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n^x}{1+n^y}.$$

Étudier la différentiabilité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 1.2.4. $\boxed{\textbf{I}}$
Soit $u_n(x,y) = \dfrac{x^n \cos ny}{n\sqrt{n}}$.

(1) Étudier le domaine Δ de convergence de la série : $S(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x,y)$.
(2) Prouver que $S(x,y)$ est de classe C^1 sur l'intérieur de Δ.

Exercice 1.2.5. $\boxed{\textbf{F C}}$ Fonctions homogènes :
On dit que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est homogène de degré α ssi

(1) $$\forall \lambda > 0,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ : f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y).$$

Montrer qu'une C.N.S. pour que f soit homogène de degré α est :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f.$$

Exercice 1.2.6. $\boxed{\textbf{F}}$
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, résoudre les équations aux dérivées partielles :

$$1.\ \frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0,\ U = \mathbb{R}^2, \qquad 2.\ f.\left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x^2+y^2,\ U =]0,+\infty[\times\mathbb{R},$$

(on suggère les changements $g = f^2,\ u = \dfrac{y}{x},\ v = x^2+y^2$ dans 2.)

1.3. **Dérivées partielles d'ordre $k \geqslant 2$.**

Exercice 1.3.1. **I**
On considère l'application $\Phi \ : \ (x,y,z) \in]0,+\infty[^3 \mapsto (u,v,w) \in]0,+\infty[^3$ définie par :
$$u = x + y^2, \ v = y + z^2, \ w = z + x^2 \ ;$$
Montrer que Φ définit x, y, z comme fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de (u, v, w).
Calculer $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$.

Exercice 1.3.2. **F**
Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial f}{\partial y^2} = 0$$
sur $U =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ (poser $x = u, \ y = uv$).

Exercice 1.3.3. **I C**
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x,0) = 0$.
Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x,y) = yg(x,y)$.

Exercice 1.3.4. **F**
Extrema sur $\mathbb{R}^2$ de
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

Exercice 1.3.5. **F C**
Extrema de
$$f \ : (x,y) \in \Delta \mapsto (y-x)^3 + 6xy \in \mathbb{R}$$
où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1\}$.

Exercice 1.3.6. **F T**
Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+$, on pose
$$U(x,y,z) = f\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right).$$
Déterminer les fonctions f telles que $\Delta U = 0$.

Exercice 1.3.7. **I C**
Soit ABC un triangle du plan euclidien, à tout point M intérieur au triangle, on associe
$$f(M) = pqr$$
où $p = \mathrm{d}(M,(BC))$, $q = \mathrm{d}(M,(CA))$, $r = \mathrm{d}(M,(AB))$.
Déterminer le maximum de f et préciser géométriquement le point concerné.

EXERCICE 1.3.8. **I**

Soit (S) le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$g(x,y,z) = \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1.$$

Déterminer les points de (S) où la fonction

$$f \ : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2 + y^2 + z^2 \in \mathbb{R}$$

atteint son minimum ou son maximum absolu (on pourra poser $u = \dfrac{x^2}{a^2}$, $v = \dfrac{y^2}{b^2}$, $w = \dfrac{z^2}{c^2}$).

EXERCICE 1.3.9. **I C**

Déterminer $\sup\limits_{|z|\leqslant 1} |\sin z|$ où

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x+iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \quad (z = x+iy \in \mathbb{C}).$$

(on montrera que, si $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |\sin z|$ alors $r \in [0,1] \mapsto M(r)$ est croissante).

EXERCICE 1.3.10. **D**

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f'(0) = 0$ et $A = [a_{ij}]$, où $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$, est définie négative. A est appelée matrice hessienne de f.

(1) Prouver qu'il existe $(a,r) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\forall x \in B(0,r)$, $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) \leqslant -a\|x\|^2$.

(2) Soit $u \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = \operatorname{grad} f(u(t))$ avec $u(0) = x_0$, $x_0 \in B(0,r)$.
Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0$.

1.4. **Notions sur les courbes et les surfaces.**

EXERCICE 1.4.1. **I**

Étudier et construire les courbes définies implicitement par :

a) $y^4 - x^2y^2 - y^3 = 0$ b) $-x^4y^2 + x^2y + y^2 - 2y + 1 = 0$
c) $(x^2-y^2)^2 - (x^2+y^2) = 0$ d) $(x-1)(x-2)(x-3) + (y-1)(y-2)(y-3) = 0$

EXERCICE 1.4.2. **F T**

Soit $f \ : \ (u,v) \mapsto f(u,v)$ une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $y = \phi(x)$ est définie implicitement par :

$$f\left[\operatorname{Arctan} \frac{x+2y+1}{y+2x+1}, \operatorname{Arctan} \frac{y+2x+1}{x+2y+1}\right] = 0. \qquad (1)$$

Calculer $\phi'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Exercice 1.4.3. **F**

(1) Chercher tangente et plan osculateur en $M_0(2,1,2)$ à la courbe (C) :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-9=0 \\ x^2-y^2-3=0 \end{cases}$$

(2) Déterminer le centre de courbure en M_0 à (C).

Exercice 1.4.4. **F**

Construire les projections orthogonales sur les 3 plans de coordonnées de

$$\Gamma \begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^2+y^2-x=0 \end{cases} .$$

Exercice 1.4.5. **F**

Quels sont les plans tangents à la surface S d'équation $xy = az$ contenant les tangentes au cercle d'équation $x^2+y^2=R^2$ contenu dans le plan $z=0$?

Exercice 1.4.6. **F**

Soit Σ la surface d'équation $xyz=8$ et $D\ : \begin{cases} x=5z-18 \\ y=24-6z \end{cases}$.

Trouver les points de Σ où le plan tangent contient D.

Exercice 1.4.7. **F**

Trouver les plans tangents à la surface S d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

qui coupent les axes en A, B, C tels que $OA = OB = OC$.

Exercice 1.4.8. **I**

Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que sous certaines hypothèses, la relation :

$$F(xy, z-2x)=0$$

fournit implicitement z en fonction de (x,y) et que :

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=2x.$$

Exercice 1.4.9. **I**

Déterminer la surface (S) engendrée par les droites sécantes à l'axe Oz et aux paraboles

$$P\ : z=h, y^2=2px \text{ et } P'\ : z=-h, y^2=2qx\ (p\neq q) \text{ en 3 points distincts.}$$

EXERCICE 1.4.10. **I T**

Équation cartésienne de la surface S engendrée par les droites rencontrant Ox et la courbe

$$\Gamma\ : y^2 - z^2 + 2ay = 0, x + y + z = a$$

et faisant l'angle α avec Ox.

---

2. Intégrales curvilignes

2.1. Analyse vectorielle.

EXERCICE 2.1.1. **I**

Soient $\overrightarrow{V}$ une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ de classe C^1 et $\overrightarrow{V}_0$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que la dérivée de $\overrightarrow{V}$ dans la direction de $\overrightarrow{V}_0$ est égale à :

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V}_0) + \mathrm{div}(\overrightarrow{V}).\overrightarrow{V}_0.$$

EXERCICE 2.1.2. **F**

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3 et f le champ de vecteurs :

$$f(M) = \frac{\overrightarrow{MA}}{\|MA\|^2} + \frac{\overrightarrow{MB}}{\|MB\|^2}.$$

(1) Étudier la différentiabilité de f.
(2) Vérifier que f est un champ de gradient.

EXERCICE 2.1.3. **I**

Soit $F \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ ne dépendant que de l'angle d'une direction donnée avec $\overrightarrow{OM}$ et dont le laplacien est nul.
Déterminer une telle fonction pour $n = 2, 3, 4$; préciser comment traiter le problème dans le cas général.

2.2. Calcul intégral.

EXERCICE 2.2.1. **F** Calculer les intégrales triples :

1. $I = \displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \frac{z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ où $\mathcal{D}\ : x^2 + y^2 \leqslant a^2, 0 \leqslant z \leqslant a.$
2. $J = \displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+a^2)^3}$ où $\mathcal{D}\ : x^2 + y^2 - ax \leqslant 0, 0 \leqslant z \leqslant a.$
3. $K = \displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} |x^2 - y^2|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où $\mathcal{D}\ : x^2 + y^2 \leqslant z, 0 \leqslant z \leqslant 1.$
4. $L = \displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+a^2)(z^2+a^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ où $\mathcal{D}\ : 0 \leqslant z \leqslant a, x^2 + y^2 \leqslant z^2.$

Exercice 2.2.2. **I** Aire des domaines plan définis par :

$$1.\ \begin{cases} ax^2 \leqslant y \leqslant bx^2 & (0<a<b) \\ \dfrac{c}{x} \leqslant y \leqslant \dfrac{d}{x} \end{cases}, \quad 2.\ \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1 \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-1 \leqslant 0 \end{cases}$$

Exercice 2.2.3. **I**

Soit f une fonction de classe C^4 sur $[0,1]^2$ vérifiant : $f(x,0)=-f(x,1)$, $f(0,y)=-f(1,y)$. On pose $M=\sup\limits_{(x,y)\in[0,1]^2}\left|\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\right|$. Majorer $\displaystyle\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en fonction de M.

Cas d'égalité ?

Exercice 2.2.4. **I C**

Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, Δf désigne ici le laplacien de f. Si D_r désigne le disque de centre (x_0,y_0) de rayon r, on définit la moyenne de f sur D_r par : $M_f(r)=\dfrac{1}{\pi r^2}\displaystyle\iint_{D_r} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Montrer que : $\Delta f(x_0,y_0)=\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{8}{r^2}[M_f(r)-f(x_0,y_0)]$.

Que se passe-t-il si on remplace $M_f(r)$ par $m_f(r)=\dfrac{1}{2\pi r}\displaystyle\int_C f(M)\,\mathrm{d}M$ où l'on prend l'intégrale curviligne sur le cercle de centre (x_0,y_0) de rayon r, parcouru dans le sens trigonométrique?

Exercice 2.2.5. **I C**

Soit ω_n le volume de la boule de rayon 1 dans un espace euclidien de dimension n : E_n.

(1) Montrer que le volume d'une boule de rayon R dans E_n est $\omega_n R^n$.

(2) Montrer que : $\omega_{n+1}=\omega_n\displaystyle\int_{-1}^{+1}(1-u^2)^{n/2}\,\mathrm{d}u$.

En déduire que $\omega_{2p}=\dfrac{\pi^p}{p!}$, $\omega_{2p+1}=\dfrac{\pi^p}{(1/2)(3/2)(\ldots)(p+1/2)}$.

(3) Que penser de la “surface” de la sphère en dimension n.

---

1. Indications :

Indication 1.1.1 f est une fonction polynomiale, on prouve que $f'(M)(H)=\mathrm{tr}\,(H.M')$ où M' désigne la transposée de la comatrice de M.

Indication 1.1.2

(1) $f'(x,y)=\begin{pmatrix}1&1\\y&x\end{pmatrix}$ et $J_f(x,y)=x-y=0\Leftrightarrow x=y$.

(2) $u=x+y$ $u\neq 0$ et $u^2-4v>0$ $v=xy$, $V=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2, u^2-4v>0, u\neq 0\}$ si on pose $f_U^{-1}(u,v)=(x,y)$ on a : $x=\frac{u}{2}\left(1+\sqrt{1-4\frac{v}{u^2}}\right)$, $y=\frac{u}{2}\left(1-\sqrt{1-4\frac{v}{u^2}}\right)$ et $(f^{-1})'(u,v)=\frac{1}{x-y}\begin{pmatrix}x&-1\\-y&1\end{pmatrix}$.

Indication 1.1.3 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n. On considère l'ensemble $\Omega_n=\{M\in\mathcal{S}_n|\forall X\in\mathcal{M}_{(n,1)}, X^{\mathrm{T}}MX>0\}$.

(1) Prendre la norme subordonnée à A : $\sqrt{A^{\mathrm{T}}XA}$ où $A\in\Omega_n$.

(2) φ est bien définie car $A^2=A^{\mathrm{T}}A$ est symétrique définie positive.

Montrer que φ est bijective : pour $B \in \mathcal{S}_n$, montrer, en considérant les s.e.p., que $\exists! A \in \mathcal{S}_n | \varphi(A) = B$ (A et B commutent). On a $\varphi'(A)(H) = AH + HA$, montrer que $\varphi'(A)$ est injective : si $AH + HA = 0$ et si X est un v.e.p. de A associé à la v.a.p. $\lambda > 0$, on a $A(HX) = -\lambda HX$ et conclure que $HX = 0$.

Indication 1.1.4

(1) Utiliser la différentiabilité de f' en a puis appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\Phi(t) = f(t) - tf'(a) - \frac{1}{2}(t-a)^2 f''(a)$.
(2) Conséquence immédiate du 1.
(3) F est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et si $x = y$, $F(x,x) = \frac{1}{x}$, pour $x \neq y$ écrire $(x-y)\frac{e^t}{(xe^t+1)(ye^t+1)} = \frac{-xe^t}{xe^t+1} + \frac{ye^t}{ye^t+1}$ et intégrer d'où $F(x,y) = \frac{\ln x - \ln y}{x-y}$. Conclure avec le (2).

Indication 1.2.1

(1) Écrire f comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, on trouve $\operatorname{grad} f(x) = \frac{x-(x|a)a}{\|a\wedge x\|}$.
(2) Si $H = \operatorname{Vect}(a)^\perp$: $(x|a) = 0$, g est différentiable sur $H \setminus \{0\}$ et $\operatorname{grad} g'(x) = \frac{x)}{\|x\|}$.

Indication 1.2.2 Se limiter au cas où $y \geqslant 0$ et considérer la série comme une série entière par rapport à x. On a alors le domaine de convergence suivant (en tenant compte des symétries) : $\mathcal{D} = \{(x,y) \mid |y| \leqslant 1, |x| < 1 \text{ ou } |y| > 1, |x| < y^2\}$.
Si $a < 1$ on a convergence normale sur $\mathcal{D}_a = [-a,a]\times[-1,1]$, si $b > 1$ on a convergence normale sur $\mathcal{D}'_b = \{(x,y) \mid |y| \geqslant b\sqrt{|x|}\}$ et en déduire que F est continue sur $\mathcal{D}$.

Indication 1.2.3 Poser $u_n(x,y) = \frac{1+n^x}{1+n^y}$ et en distinguant différents cas, on obtient que f est définie sur $\mathcal{D} = \{(x,y), x \leqslant 0, y > 1 \text{ ou } x > 0, y > x+1\}$. Majorer $\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y) = \ln n \frac{n^x}{1+n^y}$ et $\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y) = -\ln n \frac{n^y(1+n^x)}{(1+n^y)^2}$ par $\ln n \frac{1+n^x}{1+n^y}$. Montrer alors que les séries $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}$ et $\sum \frac{\partial u_n}{\partial y}$ convergent normalement les ensembles $\mathcal{D}_a$ et $\mathcal{D}'_b$ où $\mathcal{D}_a = \{x \leqslant 0,\ y \geqslant a > 1\}$ et $\mathcal{D}'_b = \{0 < x,\ y \geqslant x+b,\ b > 1\}$. Conclure alors que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

Indication 1.2.4

(1) Écrire $S(x,y)$ comme partie réelle d'une série entière de rayon 1, en déduire que $\Delta \supset [-1,1]\times\mathbb{R}$ puis montrer que, si $|x| > 1$: la suite $(\cos ny)$ n'a pas de limite pour $y \neq 0 \mod \pi$ et conclure $\Delta = [-1,1]\times\mathbb{R}$.
(2) Montrer que les séries des dérivées par rapport à x et à y convergent normalement sur tout compact de $]-1,1[$ et conclure.

Indication 1.2.5 Dériver la relation (1) par rapport à λ, pour la réciproque, poser $g(\lambda) = f(\lambda x, \lambda y)$ et calculer $g'(\lambda)$.

Indication 1.2.6

(1) Faire le changement de variables $u = \lambda x + y$, $v = \mu x + y$, $f(x,y) = g(u,v)$ d'où $(\lambda - 3)\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + (\mu - 3)\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$. Finalement on trouve $f(x,y) = F(3x+y)$.
(2) Montrer que $2vg(u,v)\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = v$ d'où $g^2(u,v) = v + F(u)$.

Indication 1.3.1 Appliquer le théorème d'inversion globale en montrant que Φ est une injection de $\mathcal{D} =]0,+\infty[^3$ sur $\Phi(\mathcal{D})$: si $\Phi(x,y,z) = \Phi(x',y',z')$ alors $(x-x')[1+(x+x')(y+y')(z+z')] = 0$ d'où l'injectivité de Φ. La matrice jacobienne de Φ s'inverse en $\frac{1}{1+8xyz}\begin{pmatrix} 1 & -2y & 4yz \\ 4zx & 1 & -2z \\ -2x & 4xy & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{1+8xyz}$ puis $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{8}{(1+8xyz)^3}[-yz - 4x^2z^2 + 2x^2y]$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{8}{(1+8xyz)^3}[2y^2z - xz - 4x^2y^2]$.

Indication 1.3.2 Après calcul, on trouve : $f(x,y) = \phi(\frac{y}{x})x + \psi(\frac{y}{x})$.

Indication 1.3.3 Écrire $f(x,y) = y\int_0^1 h(x,yu)\,du$ où $h = \frac{\partial f}{\partial y}$ et montrer que $g(x,y) = \int_0^1 h(x,yu)\,du$ est C^∞ grâce au théorème de continuité et dérivabilité sous le signe intégral.

Indication 1.3.4 Se limiter au demi-plan $x \geqslant 0$, les points critiques sont $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(0,0)$. En $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ on a un minimum, en (0,0) on n'a pas d'extremum.

Indication 1.3.5 Δ est un compact, f est bornée et atteint ses bornes. Le minimum de f est atteint en $(-1/2, +1/2)$ et vaut $\frac{1}{4}$, f atteint son maximum 6 en 2 points : $(1, 1)$ et $(-1, -1)$.

Indication 1.3.6 Utiliser l'expression du laplacien en cylindriques, $\Delta U = 0$ donne l'équation $\left(\frac{4}{z^2} + \frac{6r^2}{z^4}\right) f'\left(\frac{r^2}{z^2}\right) + 4\left(\frac{r^2}{z^4} + \frac{r^4}{z^6}\right) f''\left(\frac{r^2}{z^2}\right) = 0$, après intégration on a : $f(t) = \lambda \ln \frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1} + \mu$.

Indication 1.3.7 Poser $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ les aires respectives des triangles AMB, BMC, CMA, $\mathcal{A}_1 = x\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_2 = y\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_3 = z\mathcal{A}$, montrer alors que $pqr = 8xyz\mathcal{A}^3$. Le problème est de rechercher le maximum de $f(x, y, z) = xyz$ sachant que $x + y + z = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. On trouve $x = y = z = \frac{1}{3}$, le point M est l'isobarycentre du triangle ABC.

Indication 1.3.8 Écrire $f = \overrightarrow{OM}.\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ où M a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix}$.

f est maximale ssi $x^2 = \frac{a^4}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}$, $y^2 = \frac{b^4}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}$, $z^2 = \frac{c^4}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}$, f est minimale ssi, en supposant $a^2 = \inf(a^2, b^2, c^2)$, $x = \pm a$, $y = z = 0$.

Indication 1.3.9 Montrer que $\left|\sin\left(re^{i\theta}\right)\right| \leqslant r + \frac{r^3}{6} + \cdots + \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \operatorname{sh} r$ puis égalité avec $z = ir$ et en conclusion : $M(1) = \operatorname{sh} 1$.

Indication 1.3.10

(1) Écrire $g(x) = \int_0^1 (\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) x_i x_j)\, \mathrm{d}t$, montrer que $q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j \leqslant -2a\|x\|^2$, prouver qu'il existe $r > 0$ tel que $\|x\| < r \Rightarrow |\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) - a_{ij}| \leqslant \frac{a}{n^2}$ et conclure en écrivant $g(x) = g(x) - q(x) + q(x)$.

(2) $g(u(t)) = (u(t)|u'(t)) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2$, avec $A = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ | \forall t \in [0, \alpha], u'(t).u(t) \leqslant 0\}$ montrer que $A = \mathbb{R}_+$ (A est un intervalle fermé de $\mathbb{R}_+$ puis il existe $\eta > 0$ tel que $A \supset [0, \eta]$. Par l'absurde, si β sa borne supérieure arriver à une contradiction). Utiliser le 1. en écrivant que $\|u(t)\|^2 - \|u(0)\|^2 = 2\int_0^t g(u(x))\, \mathrm{d}x$ pour obtenir le résultat demandé.

Indication 1.4.1

a) La courbes correspond à $Ox \cup \mathcal{H}$ où $\mathcal{H}$ est l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 + y = 0$.

b) $y = \frac{2-x^2 \pm x\sqrt{5x^2-4}}{2(1-x^4)}$ et le point isolé $(0, 1)$).

c) On passe en polaires : $r = \pm\frac{1}{\cos 2\theta}$.

d) On pose $X = x - 2, Y = y - 2$ et on obtient : $(X + Y)(X^2 + Y^2 - XY - 1) = 0$, réunion d'une droite et d'une ellipse

Indication 1.4.2 Poser $X = x + 2y + 1$, $Y = y + 2x + 1$, avec $t = \frac{Y}{X}$ (1) s'écrit $g(t) = f(\operatorname{Arctan} t, \operatorname{Arctan} \frac{1}{t}) = 0$. On trouve $\phi'(x) = \frac{t_0-2}{1-2t_0}$ où t_0 est une solution de $g(t) = 0$.

Indication 1.4.3

(1) Prendre l'intersection des plans tangents (distincts) aux deux surfaces, on obtient la direction de la tangente en M_0 à (C) : $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$

Ensuite, on utilise le théorème des fonctions implicites pour obtenir l'équation du plan osculateur P en M_0 : $4x - y + z - 9 = 0$.

(2) Le centre de courbure I en M_0 à (C) est donné par $(2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Indication 1.4.4 La projection de Γ sur le plan xOy est le cercle de centre $(1/2, 0)$, de rayon $1/2$, Γ se paramètre en cylindriques par : $r = \cos\theta$, $z = \sin\theta$, $\theta \in [-\pi, +\pi]$.

Indication 1.4.5 On obtient les plans d'équations : $z = 0$ ou $az\sin\theta\cos\theta = R(x\cos\theta + y\sin\theta - R)$, $\theta \in]-\pi, \pi[\setminus\{-\pi/2, 0, \pi/2\}$.

Indication 1.4.6 Π, le plan tangent en $(a, b, \frac{8}{ab})$ a pour équation $bcx + acy + abz = 24$ avec $c = ab/8$ puis en cherchant un point de D et un vecteur directeur, on obtient les solutions $a \in \{2, -2, 3/4\}$, $b = \frac{8a}{6+a}$ qui correspondent aux points $(2, 2, 2)$, $(-2, -4, 1)$ et $(3/4, 8/9, 12)$.

Indication 1.4.7 Le plan tangent en M à S a pour équation : $\frac{x}{a^2}X + \frac{y}{b^2}Y + \frac{z}{c^2}Z = 1$ et ceux qui répondent à la question sont $x + y + z = \pm\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Indication 1.4.8 Il suffit que $\frac{\partial F}{\partial y}(ab,c-2a)\neq 0$ en un point (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ tel que $F(ab,c-2a)=0$, on écrit $z=2x+f(xy)$ et on dérive.

Indication 1.4.9 Écrire l'équation de la droite sous forme paramétrique, en traduisant les conditions, on trouve un cône de sommet : $(0,0,t)$: $2px(z-t)-(h-t)y^2=0$ privé des droites $x=y=0$ et $z=t$, $y=0$ où $t=-h\frac{p+q}{p-q}$.

Indication 1.4.10 Poser $m=\operatorname{cotan}\alpha$ et écrire l'équation de la droite sous forme paramétrique. On trouve 2 cas : un cône de sommet $A(a,0,0)$, d'axe Ox, de $1/2$ angle α, et une surface d'équation cartésienne : $(y+z)^2(xy-xz-3ay+az)^2-m^2(y^2+z^2)(y^2-z^2+2ay)^2=0$.

Indication 2.1.1 Soit $\overrightarrow{V}=P\overrightarrow{i}+Q\overrightarrow{j}+R\overrightarrow{k}$ alors, si M est la matrice jacobienne de $\overrightarrow{V}$, le vecteur cherché s'écrit $\overrightarrow{W}=M.\overrightarrow{V}_0$. On vérifie par calcul que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{V}_0).\overrightarrow{i}+(\operatorname{div}\overrightarrow{V})\overrightarrow{V}_0.\overrightarrow{i}=\overrightarrow{W}.\overrightarrow{i}$, par symétrie, on a le même résultat avec $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ ce qui permet de conclure.

Indication 2.1.2

(1) $f_A(M)=\frac{\overrightarrow{MA}}{\|MA\|^2}$ est différentiable et $f'_A(M)(h)=\left(2\frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{h}}{\|MA\|^2}.\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{h}\right)\frac{1}{\|MA\|^2}$ et comme $\overrightarrow{f}=\overrightarrow{f}_A+\overrightarrow{f}_B$, $\overrightarrow{f}$ est différentiable sur $E\setminus\{A,B\}$.

(2) En fait $\overrightarrow{f}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g$ où $g=-\ln\|MA\|-\ln\|MB\|$.

Indication 2.1.3 Dans le cas général, si (e_i) est un repère orthonormé tel que e_n donne la direction, alors l'hypothèse se traduit par $F(x_1,x_2,\dots,x_n)=g(u)$ où $u=\frac{x_n}{r}$ et $r=\|x\|$, g étant une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On trouve alors $g'(u)=\frac{\lambda}{(1-u^2)^{(n-1)/2}}$ ($|u|<1$).

$n=2$: $F(x,y)=\lambda\operatorname{Arcsin}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\mu=\lambda\theta+\mu$ (en polaires),

$n=3$: $F(x,y,z)=\frac{\lambda}{2}\ln\frac{1+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{1-\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}+\mu=\lambda\ln|\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}|$ (en sphériques),

$n=4$: $F(x,y,z,t)=\lambda\frac{t}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+\mu$.

Indication 2.2.1 (1) $I=\pi a^3$, (2) passer en polaires, $J=\frac{\pi}{2a^3}-\frac{1}{a^3}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}$ puis après calculs : $J=\frac{(8-3\sqrt{2})\pi}{16a^3}$, (3) après un passage en polaires, $K=\dfrac{1}{3}$, (4) $L=\pi\left[\ln 2-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right]$.

Indication 2.2.2

(1) Poser $u=\frac{y}{x^2}$, $v=xy$ et redéfinir le domaine. On trouve $A=\frac{d-c}{3}\ln\frac{b}{a}$.

(2) Poser $x=au\cos t$, $y=bu\sin t$ et redéfinir le domaine qui se partage en 2, on a $I=I_1+I_2$ où $I_1=2ab\int_0^{\varphi}v^2(t)\,\mathrm{d}t$, $I_2=2ab(\pi/2-\varphi)$ où $\varphi=\operatorname{Arctan}\frac{a}{b}$ en supposant $b\leqslant a$. On obtient $I_1=I_2=2ab\operatorname{Arctan}\frac{b}{a}$.

Indication 2.2.3 En faisant une I.P.P. $/x$ puis $/y$ (attention aux constantes), montrer que $\iint_{[0,1]^2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{[0,1]^2}(x-1/2)(y-1/2)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Recommencer pour trouver $\iint_{[0,1]^2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\iint_{[0,1]^2}(x^2-x)(y^2-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ que l'on majore par $\frac{M}{144}$.

On a égalité ssi $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)$ est constante.

Indication 2.2.4 Se ramener à la situation : $(x_0,y_0)=(0,0)$, $f(0,0)=0$ et utiliser la formule de Taylor-Young, remarquer que les intégrales de x, de y et de xy sur D_r sont nulles et montrer que le reste de Young donne $\iint_{D_r}(x^2+y^2)\varepsilon(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=o(r^4)$. Conclure alors.

De même, on trouve $m_r(f)-f(x_0,y_0)=\left(\frac{r}{2}\right)^2\Delta f(x_0,y_0)+o(r)$.

Indication 2.2.5

(1) Faire le changement de variable $x\to Rx$.

(2) Écrire $\omega_{n+1}=\int_{-1}^{+1}\left(\int_{x_1^2+\ldots+x_n^2=1-x_{n+1}^2}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\right)\mathrm{d}x_{n+1}$ puis utiliser les intégrales de Wallis.

(3) Si σ_n désigne la surface de la sphère de rayon 1 alors $\sigma_n=n\omega_n$.

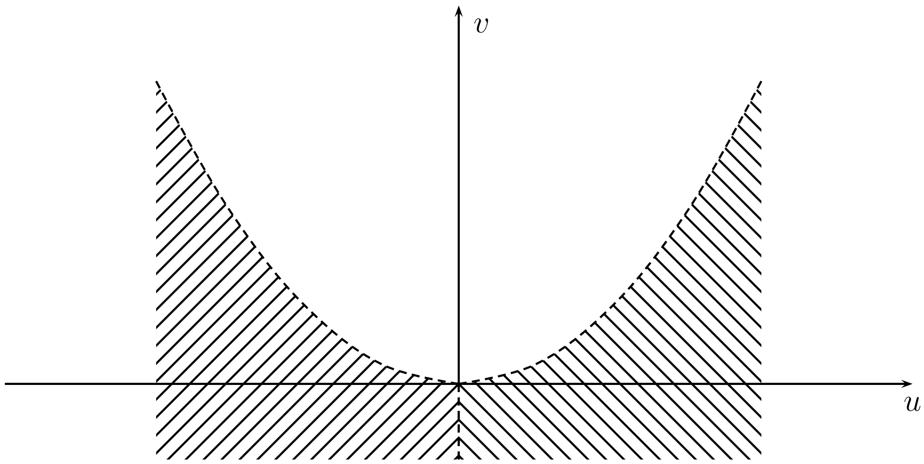
1. Solutions

Solution 1.1.1 f est une fonction polynomiale des n^2 coefficients de M donc f est différentiable.
On prouve alors que $f'(M)(H) = \sum_{i=1}^{n} \det(M_1, \ldots, H_i, \ldots, M_n)$ où M_j désigne la $j^{\text{ième}}$ colonne de M, H_i la $i^{\text{ième}}$ colonne de H.
Ceci peut écrire $f'(M)(H) = \operatorname{tr}(H.M')$ où M' désigne la transposée de la matrice des cofacteurs de M.
On peut aussi dire que $\det M = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} B_{ij}$ où B_{ij} est le cofacteur de a_{ij}, on obtient immédiatement $\dfrac{\partial f}{\partial a_{ik}} = B_{ik}$ et ceci fournit le résultat.

Solution 1.1.2

(1) f est différentiable et on a $f'(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$, $J_f(x,y) = x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) $u = x + y \quad u \neq 0$ et $u^2 - 4v > 0$ $v = xy$, V est l'ouvert hachuré :



$V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, u^2 - 4v > 0, u \neq 0\}$ si on pose $f_U^{-1}(u,v) = (x,y)$ on a :

$$x = \frac{u}{2}\left(1 + \sqrt{1 - 4\frac{v}{u^2}}\right),\ y = \frac{u}{2}\left(1 - \sqrt{1 - 4\frac{v}{u^2}}\right).$$

De plus, soit par le calcul, soit en utilisant la *proposition 9.1.5 page 310*, on obtient

$$(f^{-1})'(u,v) = (f'(x,y))^{-1} = \frac{1}{x-y}\begin{pmatrix} x & -1 \\ -y & 1 \end{pmatrix}$$

Solution 1.1.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n. On considère l'ensemble $\Omega_n = \{M \in \mathcal{S}_n | \forall X \in \mathcal{M}_{(n,1)}, X^{\mathrm{T}} M X > 0\}$.

(1) On demande ici de prouver que: Ω_n est un ouvert de $\mathcal{S}_n$ pour la topologie des normes.
Soit $A \in \Omega$, $\lambda_1 = \inf_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} > 0$ alors $X^{\mathrm{T}} A X \geqslant \lambda_1 |\|X\|^2$. Soit $\varepsilon \in \Omega$ telle que $\|\varepsilon\| < \lambda_1$ alors, en prenant la norme subordonnée, $X^{\mathrm{T}}(A + \varepsilon)X \geqslant (\lambda_1 - \|\varepsilon\|)\|X\|^2 > 0$ donc $A + \varepsilon \in \Omega$.
Conclusion : Ω est un ouvert.

(2) On s'intéresse ici à l'application:

$$\varphi\ :\begin{cases} \Omega_n \to \Omega_n \\ A \mapsto A^2 \end{cases}$$

qui est effectivement bien définie car $A^2 = A^{\mathrm{T}}A$ est symétrique définie positive.
Montrons tout d'abord que φ est bijective: pour $B \in \mathcal{S}_n$, comme toutes les matrices symétriques sont diagonalisables et ont des valeurs propres réelles, si $\exists A \in \mathcal{S}_n | \varphi(A) = B$, alors $B = A^2$ et A et B commutent. Elles sont donc simultanément diagonalisables. Soit $(\lambda_i)_i \in \mathbb{R}_+^*$ les valeurs propres de A, et $(E_i)_{i\in[|1;n|]}$ les sous espaces associés. Nécessairement, les E_i sont les sous espaces propres de B associés aux valeurs propres λ_i^2, ce qui prouve que la matrice A existe et est définie de manière unique et que $A \in \Omega_n$ (les valeurs propres sont toutes strictement positives). On a bien la bijectivité de φ.
φ est différentiable et admet pour différentielle $\varphi'(A)(H) = AH + HA$. Pour montrer enfin que φ est un C^1 difféomorphisme, il suffit de prouver que $\varphi'(A)$ est inversible $\forall A \in \Omega_n$ (et même seulement injective).
Soit $A \in \Omega_n$ et $H \in \mathcal{S}_n$ une matrice symétrique telle que $AH + HA = 0$. Alors $AH = -HA$. Si X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda > 0$, on a $A(HX) = -\lambda HX$. Comme $-\lambda < 0$, $HX = 0$ car il ne peut être vap de A.
On a donc $HX = 0$ pour tout vep de A, donc $H = 0$ CQFD.

Solution 1.1.4

(1) On utilise la différentiabilité de f' en a.
Pour la 2ième majoration, on utilise l'inégalité des accroissements finis (cf. *théorème 6.3 page 258*) appliquée à la fonction $\Phi(t) = f(t) - tf'(a) - \dfrac{1}{2}(t-a)^2 f''(a)$. On a alors $\Phi'(t) = f'(t) - f'(a) - (t-a)f''(a)$ et à l'aide de la première question, on a $\|\Phi'(t)\| \leqslant \varepsilon |t-a|$.
On obtient alors

$$\|f(y) - f(x) - (y-x)f'(a) - \frac{1}{2}(y-a)^2 f''(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)\| \leqslant \varepsilon |y-x| \max(|x-a|, |y-a|)$$

(2) Conséquence immédiate du 1.
(3) F est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
- Si $x = y$, $F(x,x) = \dfrac{1}{x}$.
- Si $x \neq y$: on écrit

$$(x-y)\frac{e^t}{(xe^t+1)(ye^t+1)} = \frac{-xe^t}{xe^t+1} + \frac{ye^t}{ye^t+1}$$

d'où, en intégrant, $F(x,y) = \dfrac{1}{y-x}\left[-\ln(1+xe^t) + \ln(1+ye^t)\right]_{-\infty}^{+\infty}$, ce qui donne $F(x,y) = \dfrac{\ln x - \ln y}{x-y}$.

On utilise alors le 2. pour conclure à la continuité et à la différentiabilité de F.
Remarque : on aurait pu aussi utiliser le théorème de dérivation sous le signe intégral (cf. *théorème 6.26 page 268*) pour justifier l'existence des dérivées partielles de F. En effet, si on pose $f(x,y,t) = \dfrac{e^t}{(xe^t+1)(ye^t+1)}$ alors, si $x \geqslant a > 0$ et $y \geqslant a > 0$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,t)\right| \leqslant \frac{e^t}{(ae^t+1)^3}$$
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,t)\right| \leqslant \frac{e^t}{(ae^t+1)^3}$$

d'où la domination par une fonction intégrable, la continuité des dérivées partielles étant immédiate.

Solution 1.2.1

(1) $f = w \circ v \circ u$ où $u\ : x \mapsto a \wedge x$, $v\ : y \mapsto \|y\|^2$ et $w\ : t \mapsto \sqrt{t}$; u et v sont de classe C^1 et w est C^1 sur $]0, +\infty[$: f est donc C^1 sur $E \setminus \mathrm{Vect}(a)$ (cf. *théorème 9.4 page 311*) et

$$(\mathrm{grad}\, f(x)|h) = \frac{[(a \wedge x)|(a \wedge h)]}{\|a \wedge x\|} = \frac{(x|h) - (x|a)(h|a)}{\|a \wedge x\|} \text{i.e. } \mathrm{grad}\, f(x) = \frac{x - (x|a)a}{\|a \wedge x\|}.$$

(2) Si $H = \mathrm{Vect}(a)^\perp$: $(x|a) = 0$, g est différentiable sur $H \setminus \{0\}$ et $\mathrm{grad}\, g'(x) = \dfrac{x)}{\|x\|}$.

Remarque : ces résultats deviennent évidents si on prend la base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{a})$ de E et qu'on exprime $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

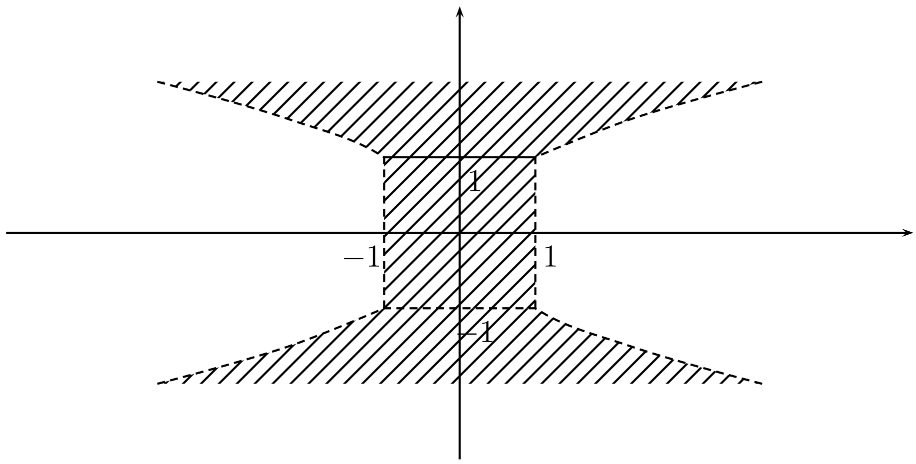
Solution 1.2.2 $F(x, .)$ est paire, on se limite au cas où $y \geqslant 0$.
On considère la série comme une série entière par rapport à x.

- Si $y \leqslant 1$ $R = 1$.
- Si $y > 1$, $R = y^2$.

Comme on a divergence de chacune des séries pour $|x| = R$ on a le domaine de convergence suivant (en tenant compte des symétries) :

$$\mathcal{D} = \begin{cases} |y| \leqslant 1 & |x| < 1 \\ |y| > 1 & |x| < y^2. \end{cases}$$

Le domaine $\mathcal{D}$ correspond à la partie hachurée ci-dessous



- Si $a < 1$ on a convergence normale sur $\mathcal{D}_a = [-a, a] \times [-1, 1]$ car $\left|\dfrac{x^n}{1 + y^{2n}}\right| \leqslant a^n$.
- Si $b > 1$ on a convergence normale sur $\mathcal{D}'_b = \{(x, y) \mid |y| \geqslant b\sqrt{|x|}\}$ car $\left|\dfrac{x^n}{1 + y^{2n}}\right| \leqslant \left|\dfrac{x^n}{y^{2n}}\right| \leqslant \dfrac{1}{b^n}$.

F est donc continue sur $\mathcal{D}_a$ et $\mathcal{D}'_b$. Comme ceci est vrai pour tout $a < 1$ et tout $b > 1$, on en déduit que F est continue sur $\mathcal{D}$.

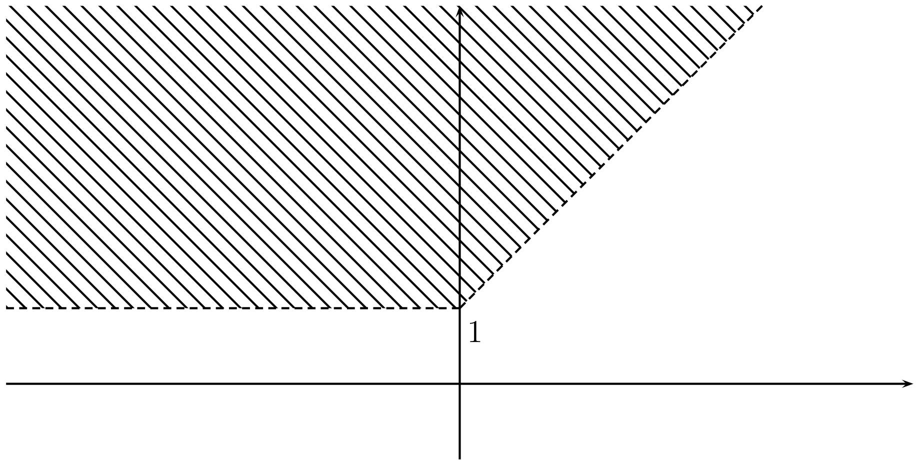
Solution 1.2.3 On pose $u_n(x,y) = \dfrac{1+n^x}{1+n^y}$: en distinguant les différents cas

- $x \leqslant 0$ alors la série converge ssi $y > 1$,
- $x > 0$ alors la série converge ssi $y > x+1$,

on obtient que f est définie sur

$$\mathcal{D} = \{(x,y), x \leqslant 0, y > 1 \text{ ou } x > 0, y > x+1\}$$

que l'on peut représenter par la partie hachurée :



Soit $\mathcal{D}_a = \{x \leqslant 0,\ y \geqslant a > 1\}$ et $\mathcal{D}'_b = \{0 < x,\ y \geqslant x+b,\ b > 1\}$. On a $\dfrac{\partial u_n}{\partial x}(x,y) = \ln n \dfrac{n^x}{1+n^y}$ et $\dfrac{\partial u_n}{\partial y}(x,y) = -\ln n \dfrac{n^y(1+n^x)}{(1+n^y)^2}$ que l'on peut majorer en valeur absolue par $\ln n \dfrac{1+n^x}{1+n^y}$. Les séries $\sum \dfrac{\partial u_n}{\partial x}$ et $\sum \dfrac{\partial u_n}{\partial y}$ convergent normalement les ensembles $\mathcal{D}_a$ et $\mathcal{D}'_b$, en effet

- sur $\mathcal{D}_a$,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \frac{\ln n}{1+n^a} \text{ et } \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \frac{2\ln n}{1+n^a}$$

- et sur $\mathcal{D}'_b$,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant \ln n \frac{n^x}{1+n^{x+b}} \leqslant \frac{\ln n}{n^b}$$
$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant \ln n \frac{1+n^x}{1+n^{x+b}} \leqslant \frac{2\ln n}{n^b}.$$

On reconnaît des séries de Bertrand (cf. *question (i) page 244*) qui convergent. Grâce au théorème de dérivation des séries (cf. *corollaire 5.59 page 254*) f admet des dérivées partielles par rapport à x et y sur tous les ensembles $\mathcal{D}_a$ et D'_b donc f est de classe C^1 sur ces ensembles (cf. *théorème 9.1 page 309*). On peut donc conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}$.

Solution 1.2.4

(1) Soit $S(x,y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}} x^n \cos ny$. On a donc: $S(x,y) = \Re\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}(xe^{iy})^n\right)$, et on reconnaît une série entière de rayon 1. D'où $\Delta \supset [-1,1] \times \mathbb{R}$ ($[-1,1]$ est fermé car $\sum \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ est convergente).

Si $|x| > 1$: la suite $(\cos ny)$ n'a pas de limite si $y \neq 0 \mod \pi$. En effet, si l'on raisonne par l'absurde alors $\sin(ny) = \dfrac{\cos(2n-2)y - \cos 2ny}{2\sin y} \to 0$ donc la suite (e^{iny}) a une limite. Or $|e^{i(n+1)y} - e^{iny}| = |e^{iy} - 1| \not\to 0$ ce qui est contradictoire. La cas $y = 0 \mod \pi$

ne pose pas de problème donc la suite $\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}x^n\cos ny\right)$ ne tend pas vers 0, la série diverge.

Conclusion : $\Delta = [-1,1]\times\mathbb{R}$.

(2) On a : $\dfrac{\partial S}{\partial x}(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}x^{n-1}\cos ny$ par la dérivabilité d'une série entière.

Pour tout a de $[0,1[$, $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}}x^{n-1}\cos ny\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}a^{n-1}$ sur $[-a,a]\times\mathbb{R}$, donc la série converge normalement sur tout compact de]-1,1[, donc $\dfrac{\partial S}{\partial x}$ est continue sur l'intérieur de Δ (cf. *corollaire 5.59 page 254*).

Pour $\dfrac{\partial S}{\partial y}(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\dfrac{1}{\sqrt{n}}x^n\sin ny$, on montre de même la convergence uniforme sur tout compact $[-a,a]$, $\dfrac{\partial S}{\partial y}$ est donc continue sur l'intérieur de Δ.

Les dérivées partielles étant continues, S est ce classe C^1 sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$ (cf. *théorème 9.1 page 309*).

Solution 1.2.5 On dérive la relation (1) par rapport à λ et on prend $\lambda = 1$.

Réciproquement : si $g(\lambda) = f(\lambda x, \lambda y)$ alors (1) $\Leftrightarrow g'(\lambda) = \alpha\lambda^{-1}g(\lambda) \Leftrightarrow g(\lambda) = \lambda^\alpha g(1)$.

Solution 1.2.6

(1) On s'inspire de la *question (ii) page 313* et on fait le changement de variables $\begin{cases} u = \lambda x + y \\ v = \mu x + y \end{cases}$ avec $\lambda \neq \mu$. Ce changement est licite car $(x,y)\mapsto(u,v)$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On pose $f(x,y) = g(u,v)$ (g est aussi de classe $\mathcal{C}^1$). En utilisant la règle de la chaîne (cf. *remarque 5.2.1 (ii) page 94*), on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lambda\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \mu\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

soit $(\lambda-3)\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + (\mu-3)\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$, et, en prenant $\lambda = 3$, $\mu \neq 3$, on obtient l'équation $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$ sur $\mathbb{R}^2$ donc $g(u,v) = F(u)$ où F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (cf. *question (i) page 313*) et, en conclusion : $f(x,y) = F(3x+y)$.

(2) On pose comme indiqué $u = \dfrac{y}{x}$, $v = x^2+y^2$. $\varphi : (x,y)\mapsto(u,v)$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$. En effet $\varphi^{-1}(u,v) = (x,y)$ où $x = \sqrt{\dfrac{v}{1+u^2}}$ et $y = u\sqrt{\dfrac{v}{1+u^2}}$ donc φ est bien une bijection et comme φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$, on peut conclure.

En utilisant la règle de la chaîne (cf. *remarque 5.2.1 (ii) page 94*) on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -\dfrac{y}{x^2}\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + 2x\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + 2y\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

et en reportant dans l'équation (2), on en déduit que $2vg(u,v)\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) = v$. Comme $v \neq 0$ alors ceci s'écrit encore $\dfrac{\partial}{\partial v}g^2(u,v) = 1$ qui s'intégre en $g^2(u,v) = v + F(u)$ (cf. *question (iii) page 313*).

Conclusion : on cherchera f sous la forme $f^2(x,y) = x^2 + y^2 + F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ où F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Remarque : on aurait pu passer en coordonnées polaires (cf. *question (iv) page 313*).

Solution 1.3.1 On a $J_\Phi(x,y,z) = 1 + 8xyz \neq 0$, pour appliquer le théorème d'inversion globale (cf. *théorème 9.6 page 311*, il suffit de prouver que Φ est une injection de $\mathcal{D} =]0,+\infty[^3$ sur $\Phi(\mathcal{D})$.

Supposons donc que $\Phi(x,y,z) = \Phi(x',y',z')$ alors, en faisant la différence deux à deux de chaque équation obtenue, on obtient les équations

$$\begin{cases} x - x' &= (y'-y)(y+y') \\ y - y' &= (z'-z)(z+z') \\ z - z' &= (x'-x)(x+x') \end{cases}$$

soit, en combinant ces équations, $(x - x') = (x'-x)(x+x')(y+y')(z+z')$ ce qui donne

$$(x-x')[\underbrace{1 + (x+x')(y+y')(z+z')}_{\neq 0}] = 0$$

donc $x = x'$. On obtient de même $y = y'$ et $z = z'$ d'où l'injectivité de Φ.

La matrice jacobienne de Φ est $\begin{pmatrix} 1 & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 2z \\ 2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui s'inverse en $\dfrac{1}{1+8xyz}\begin{pmatrix} 1 & -2y & 4yz \\ 4zx & 1 & -2z \\ -2x & 4xy & 1 \end{pmatrix}$ d'où $\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{1}{1+8xyz}$ (on lit les dérivées partielles de x par rapport à u, v, w sur la première ligne. On utilise ensuite les formules

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{\partial z}{\partial v}$$

soit, après calculs,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{8}{(1+8xyz)^3}[-yz - 4x^2z^2 + 2x^2y]$$
$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{8}{(1+8xyz)^3}[2y^2z - xz - 4x^2y^2]$$

Remarque : on n'a pas $\varphi(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$ comme on pourrait le penser, il suffit de prendre $u = v = 1$, $w = 2$ alors $x + y^2 = 1 \Rightarrow x < 1,\ y < 1$ et $y + z^2 = 1 \Rightarrow y < 1,\ z < 1$ et $z + x^2 = 2$ est impossible.

Solution 1.3.2 Après calcul, on trouve : $f(x,y) = \phi(\frac{y}{x})x + \psi(\frac{y}{x})$.

Solution 1.3.3 On écrit $f(x,y) = f(x,0) + \displaystyle\int_0^y h(x,t)\,\mathrm{d}t = y\int_0^1 h(x,yu)\,\mathrm{d}u$ où $h = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ (c'est la formule de Taylor à l'ordre 1). Comme $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est C^∞ alors $g(x,y) = \displaystyle\int_0^1 h(x,yu)\,\mathrm{d}u$ est C^∞ grâce au théorème de continuité et dérivabilité sous le signe intégral (cf. *théorème 6.28 page 271*).
En effet, la continuité est immédiate, puis, comme $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,yu)$ et $u\dfrac{\partial h}{\partial y}(x,yu)$ sont continues pour $(x,y,u) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1]$ donc g admet des dérivées partielles par rapport à x et y :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x}(x,yu)\,\mathrm{d}u,\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \int_0^1 u\frac{\partial h}{\partial y}(x,yu)\,\mathrm{d}u$$

qui sont continues. La récurrence est alors immédiate (en fait, c'est une propriété générale due au fait que h est $\mathcal{C}^\infty$).

Solution 1.3.4 $f(-x,-y) = f(x,y)$ et donc on se limite au demi-plan $x \geqslant 0$.
Recherche des points critiques : on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4(x-y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4(x-y) = 0$$

d'où $x = -y$ et $x^3 - 2x = 0$ et sur le demi-plan étudié on aura les points critiques $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(0,0)$.
Étude aux points critiques, on fait le calcul préalable suivant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 4.$$

- En $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ on a un minimum : $r = t = 20$, $s = 4$ donc $rt - s^2 > 0$ et on applique le *théorème 9.14 page 315*.
- En (0,0) on n'a pas d'extremum : $r = t = -4$, $s = 4$ donc $rt - s^2 = 0$. Le *théorème 9.14 page 315* ne s'applique pas mais on peut remarquer que $f(x,x) = 2x^4 > 0$ et $f(x,-x) = -2x^2(4-x^2) < 0$ pour $x \in]0,2[$.

Solution 1.3.5 On utilise la recherche pratique d'extrema donnée *page 315*.
Δ est un compact, f est C^∞ donc f est bornée et atteint ses bornes. Le seul point critique de f sur l'intérieur de Δ est le point $(-1/2, +1/2)$ et f présente un minimum relatif strict en ce point ($rt - s^2 > 0$ et $r > 0$). La borne supérieure est alors atteinte sur la frontière de Δ.
On fait alors une étude de f sur cette frontière.
En conclusion,

- le minimum de f est atteint en $(-1/2, +1/2)$ et il vaut $\dfrac{1}{4}$,
- f atteint son maximum 6 en deux points : $(1,1)$ et $(-1,-1)$.

Solution 1.3.6 En cylindriques, on a $U(x,y,z) = f\left(\dfrac{r^2}{z^2}\right)$ donc, en utilisant par exemple l'expression du laplacien en cylindriques :

$$\Delta U(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

(en notant abusivement les dérivées partielles). Or $\dfrac{\partial f}{\partial r}\left(\dfrac{r^2}{z^2}\right) = \dfrac{2r}{z^2} f'\left(\dfrac{r^2}{z^2}\right)$ et, en dérivant à nouveau, en faisant la même chose avec z, $\Delta U = 0$ donne l'équation

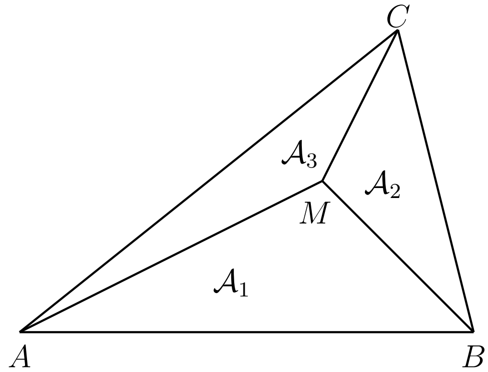
$$\left(\frac{4}{z^2} + \frac{6r^2}{z^4}\right) f'\left(\frac{r^2}{z^2}\right) + 4\left(\frac{r^2}{z^4} + \frac{r^4}{z^6}\right) f''\left(\frac{r^2}{z^2}\right) = 0$$

soit, en posant $t = \dfrac{r^2}{z^2}$ et en multipliant par z^2, f vérifie $(2+3t)f'(t) + 2t(1+t)f''(t) = 0$. Après intégration on trouve :

$$f(t) = \lambda \ln \frac{\sqrt{1+t}-1}{\sqrt{1+t}+1} + \mu$$

qui est bien une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$.
Le raisonnement que l'on vient de faire donne en fait des équivalences donc on a bien répondu à la question.

Solution 1.3.7 Appelons $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ les aires respectives des triangles AMB, BMC, CMA alors $pAB = 2\mathcal{A}_1$, $qBC = 2\mathcal{A}_2$ et $rCA = 2\mathcal{A}_3$. Comme M est intérieur au triangle ABC, on a $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}$ aire du triangle ABC. Posons $\mathcal{A}_1 = x\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_2 = y\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_3 = z\mathcal{A}$ alors $pqr = 8xyz\mathcal{A}^3$ et le problème est de rechercher le maximum de $f(x,y,z) = xyz$ sachant que $x+y+z=1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.



C'est un problème d'extrema liés, on peut s'en tirer en ramenant le problème à deux variables (en remplaçant z en fonction de x et y). La réponse de toutes façons est $x = y = z = \dfrac{1}{3}$. Le maximum est atteint lorsque les 3 aires sont égales. Le point M sera alors l'isobarycentre du triangle ABC.

Solution 1.3.8 S devient le $1/8^{\text{ième}}$ de la sphère d'équation : $u^2+v^2+w^2 = 1$, $u,v,w \geqslant 0$ et $f = a^2u + b^2v + c^2w$ i.e. $f = \overrightarrow{OM}.\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ où M a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix}$.

- f est maximale ssi $\overrightarrow{OM}$ et $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ sont colinéaires et de même sens, i.e. $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}} \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 \\ c^2 \end{pmatrix}$ ce qui donne les 8 points de coordonnées x, y, z vérifiant
$$x^2 = \frac{a^4}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}},\ y^2 = \frac{b^4}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}},\ z^2 = \frac{c^4}{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}$$
et un maximum qui vaut $\sqrt{a^4+b^4+c^4}$.
- f est minimale ssi l'angle $(\overrightarrow{OM}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix})$ est maximal, i.e. si on suppose $a^2 = \inf(a^2, b^2, c^2)$, alors $u = 1$, $v = w = 0$ ce qui donne les 2 points de coordonnées $(a, 0, 0)$ et $(-a, 0, 0)$ et un minimum qui vaut a^2.

Solution 1.3.9 Grâce au développement en série entière $\sin z$ fourni, on a :
$$\sin\left(re^{i\theta}\right) = re^{i\theta} - \frac{r^3 e^{3i\theta}}{6} + \cdots + (-1)^n \frac{r^{2n+1} e^{(2n+1)i\theta}}{(2n+1)!} + \cdots$$
donc $\left|\sin\left(re^{i\theta}\right)\right| \leqslant r + \dfrac{r^3}{6} + \cdots + \dfrac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \operatorname{sh} r$. On a alors l'inégalité $M(r) \leqslant \operatorname{sh} r$ mais, en prenant $z = ir$, $\sin z = i \operatorname{sh} r$ donc $M(r) \geqslant \operatorname{sh} r$ soit $M(r) = \operatorname{sh} r$ qui est une fonction croissante.
Conclusion : $M(1) = \operatorname{sh} 1$.
Remarque : on pourrait prouver d'une manière plus générale que, si $f(z)$ est la somme d'une série entière alors la fonction $M(r)$ est croissante. C'est le principe du maximum.

Solution 1.3.10

(1) On a $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) x_i x_j \right) \mathrm{d}t$. Soit $q(x) = \sum\limits_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ (forme quadratique de matrice A) alors en se plaçant sur la sphère unité, on prouve l'existence de a tel que $q(x) \leqslant -2a\|x\|^2$ (appliquer le *théorème 4.9 page 205* à $-q$). En utilisant la continuité de chaque fonction $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ on peut trouver $r > 0$ tel que
$$\|x\| < r \Rightarrow \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(tx) - a_{ij} \right| \leqslant \frac{a}{n^2}$$
et donc
$$\begin{aligned} g(x) = g(x) - q(x) + q(x) &\leqslant \frac{a}{n^2} \sum_{i,j} |x_i x_j| - 2a\|x\|^2 \\ &\leqslant -a\|x\|^2. \end{aligned}$$

(2) On a $g(u(t)) = (u(t)|u'(t)) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2$. En posant $A = \{\alpha \in \mathbb{R}_+ | \forall t \in [0, \alpha], u'(t).u(t) \leqslant 0\}$ on prouve que $A = \mathbb{R}_+$.
En effet, A est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ par définition. Ensuite, comme u est continue, il existe $\eta > 0$ tel que $0 \leqslant t \leqslant \eta$ entraîne $u(t) \in B(0, r)$ donc $g(u(t)) \leqslant 0$, et par conséquent $A \supset [0, \eta]$. Comme $t \mapsto (u(t)|u'(t))$ est continue, A est fermé. Si $A \neq \mathbb{R}_+$, soit β sa borne

supérieure. On applique le résultat de la question 1 à $x = u(\beta)$, en effet $t \mapsto \|u(t)\|$ est décroissante sur A donc $u(\beta) \in B(0, r)$. En reprenant la démonstration ci-dessus, il existe $\eta > 0$ tel que $[\beta, \beta + \eta] \subset A$ ce qui contredit le fait que β est borne supérieure de A.

$t \mapsto \|u(t)\|$ est décroissante et admet donc une limite en $+\infty$. On utilise alors le 1. en écrivant que $\|u(t)\|^2 - \|u(0)\|^2 = 2\int_0^t g(u(x))\,\mathrm{d}x$ pour obtenir le résultat demandé.

En effet

$$\begin{aligned}\|u(t)\|^2 - \|u(0)\|^2 &\leqslant -2a\int_0^t \|u(x)\|^2\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant -2at\|u(t)\|^2\end{aligned}$$

Solution 1.4.1

En fait toutes ces courbes peuvent se définir explicitement d'une manière ou d'une autre :

a) On met y^2 en facteur et on trouve $Ox \cup \mathcal{H}$ où $\mathcal{H}$ est l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 + y = 0$.

b) On résout l'équation du $2^{\text{ième}}$ degré en y : $(1 - x^4)y^2 + (x^2 - 2)y + 1 = 0$.

On trouve $y = \dfrac{2 - x^2 \pm x\sqrt{5x^2 - 4}}{2(1 - x^4)}$ (et on rajoute le point isolé $(0, 1)$). On trouve la courbe

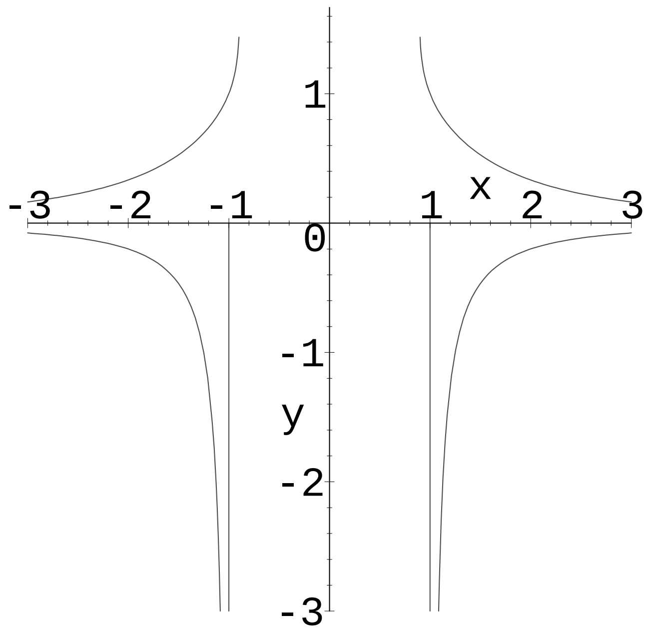


FIGURE 1. Courbe $-x^4y^2 + x^2y + y^2 - 2y + 1 = 0$

c) On passe en polaires : $r = \pm\dfrac{1}{\cos 2\theta}$.

d) On pose $X = x - 2, Y = y - 2$ et on obtient : $(X + Y)(X^2 + Y^2 - XY - 1) = 0$, réunion d'une droite et d'une ellipse

---

Solution 1.4.2 On pose $X = x + 2y + 1$, $Y = y + 2x + 1$; pour que la relation (1) soit définie, on aura nécessairement $X \neq 0$, $Y \neq 0$. Avec $t = \dfrac{Y}{X}$ (1) s'écrit

$$g(t) = f(\operatorname{Arctan} t, \operatorname{Arctan} \frac{1}{t}) = 0. \tag{2}$$

S'il existe une fonction ϕ définie implicitement par la relation (1), l'équation $g(t) = 0$ admet une solution t_0 et dans ce cas $Y = t_0 X$ donne $y(1 - 2t_0) = (t_0 - 2)x + t_0 - 1$. On en déduit déjà que $t_0 \neq \dfrac{1}{2}$, puis, en vertu de l'unicité locale de la fonction implicite (cf. *théorème 9.15 page 317*), que

$$\phi(x) = \frac{t_0 - 2}{1 - 2t_0} x + \frac{t_0 - 1}{1 - 2t_0}$$

d'où $\phi'(x) = \dfrac{t_0 - 2}{1 - 2t_0}$.

Solution 1.4.3

(1) En prenant l'intersection des plans tangents (distincts) aux deux surfaces, on obtient la direction de la tangente en M_0 à (C) :

$$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$$

(cf. *proposition 9.1.10 page 320*).
Ensuite, le théorème des fonctions implicites permet d'affirmer que l'on peut exprimer y et z au voisinage de M_0 en fonction d'x (cf. ***c)*** *page 318*) : on dérive alors les relations donnant (C) :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}x} = \overrightarrow{M'} = \overrightarrow{T},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}x^2} = \overrightarrow{M''} = -3\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}$$

d'où l'équation du plan osculateur P en M_0 : $4x - y + z - 9 = 0$.

(2) Le centre de courbure I en M_0 à (C) est caractérisé par $\overrightarrow{M_0 I}.\overrightarrow{M'} = 0$, $\overrightarrow{M_0 I}.\overrightarrow{M''} = \|\overrightarrow{M'}\|^2$ et $I \in P$, on obtient alors directement les coordonnées de I : $(2, -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2})$.

Solution 1.4.4 La projection de Γ sur le plan xOy donne le cercle de centre $(1/2, 0)$, de rayon $1/2$.
Γ se paramètre en cylindriques par :

$$r = \cos\theta,\ z = \sin\theta,\ \theta \in [-\pi, +\pi].$$

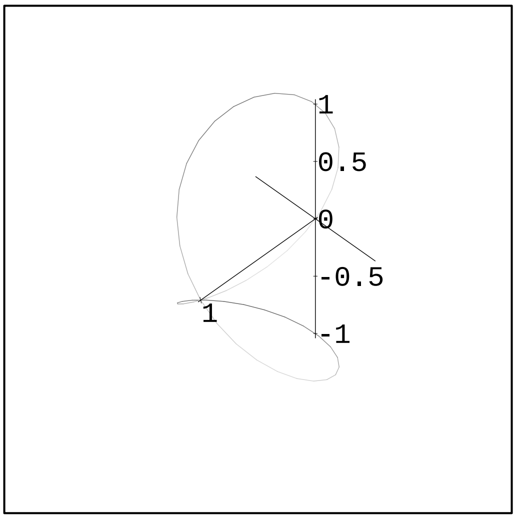
Dans l'espace, on obtient la courbe suivante :

Solution 1.4.5 On obtient les plans d'équations :

$$z = 0 \text{ ou } az\sin\theta\cos\theta = R(x\cos\theta + y\sin\theta - R),\ \theta \in]-\pi, \pi[\setminus\{-\pi/2, 0, \pi/2\}.$$

En effet, l'équation du plan tangent à la surface S au point (x_0, y_0, z_0) s'écrit $y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) = a(z - z_0)$ où $az_0 = x_0 y_0$ (cf. *remarque 9.1.13 page 317*). Si on écarte le cas où $x_0 = y_0 = 0$, le plan obtenu n'est ni parallèle ni confondu avec le plan $z = 0$. Son intersection avec le plan xOy est la droite d'équation

$$D\ :\ y_0(x - x_0) + x_0(y - y_0) = -x_0 y_0.$$



En projection sur yOz on obtient :

$$y = \frac{1}{2}\sin 2\theta,\ z = \sin\theta,$$

en projection sur xOz, on obtient :

$$x = \cos^2\theta,\ z = \sin\theta$$

ce qui correspond à un arc de parabole.

FIGURE 2. Fenêtre de Viviani

On veut que cette droite soit tangente au cercle d'équation $x^2+y^2 = R^2$ donc il existe $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que cette droite admette l'équation $Rx\cos\theta + Ry\sin\theta = R^2$. On a donc l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $y_0 = \lambda R\cos\theta$, $x = \lambda R\sin\theta$ et en reportant dans l'équation de D on arrive à

$$\lambda(Rx\cos\theta + Ry\sin\theta) = \lambda^2 R^2\cos\theta\sin\theta.$$

En simplifiant par $\lambda \neq 0$ on obtient $\lambda\cos\theta\sin\theta = 1$.
On vérifie que $cos\theta = 0$ ou $\sin\theta = 0$ ne donne pas de plan tangent solution d'où la conclusion annoncée.

Solution 1.4.6 Π, le plan tangent en $(a, b, \frac{8}{ab})$ a pour équation :

$$a^2b^2z + 8ay + 8bx = 24ab\ (\Leftrightarrow bcx + acy + abz = 24 \text{ avec } c = ab/8)$$

(cf. *remarque 9.1.13 page 317*).

La droite D est parallèle au vecteur $\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ et contient le point $A = (-18, 24, 0)$. Π contient D ssi :

- $b(6 + a) = 8a$ (en exprimant que Π est parallèle à $\overrightarrow{V}$),
- $40b - 48a + a^2b^2 = 0$ (en exprimant que A appartient à Π).

De la première équation, on tire $b = \dfrac{8a}{6 + a}$ et en reportant dans la deuxième équation, on a

$$4a^4 - 3a^3 - 16a^2 + 12a = 0$$

ce qui donne les solutions $a \in \{2, -2, 3/4\}$, $b = \dfrac{8a}{6 + a}$ qui correspondent aux points $(2, 2, 2)$, $(-2, -4, 1)$ et $(3/4, 8/9, 12)$.

Solution 1.4.7 Le plan tangent en M à S a pour équation :

$$\frac{x}{a^2}X + \frac{y}{b^2}Y + \frac{z}{c^2}Z = 1$$

(cf. *théorème 9.16 page 318* adapté aux quadriques).

Les points d'intersection A, B, C sont alors donnés par $\overrightarrow{OA} = \dfrac{a^2}{x}\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{OB} = \dfrac{b^2}{y}\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{OC} = \dfrac{c^2}{z}\overrightarrow{k}$

($xyz \neq 0$ est la condition pour que ce plan coupe les axes de coordonnée en un seul point). En exprimant la condition $OA = OB = OC$, on trouve $\overrightarrow{OM} = \pm \dfrac{a^2\overrightarrow{i} + b^2\overrightarrow{j} + c^2\overrightarrow{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ et les plans tangents correspondants sont $x + y + z = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Solution 1.4.8 Il suffit que
$$\frac{\partial F}{\partial y}(ab, c-2a) \neq 0$$
en un point (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ tel que $F(ab, c-2a) = 0$ (hypothèses du théorème des fonctions implicites, cf. *théorème 9.15 page 317*).
Au voisinage de (a, b), on a $z - 2x = f(xy)$ où f est de classe $\mathcal{C}^1$ ce qui s'écrit $z = 2x + f(xy)$. En dérivant, on a alors
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 + yf'(xy), \frac{\partial z}{\partial y} = xf'(xy)$$
d'où $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x$.

Solution 1.4.9 Équation d'une droite passant par Oz : $D\ : x = \lambda\alpha, y = \lambda\beta, z = t + \lambda\gamma, \lambda \in \mathbb{R}$.
D coupe P et P' ssi : $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda_1\beta^2 = 2p\alpha, t + \lambda_1\gamma = h, \lambda_2\beta^2 = 2q\alpha, t + \lambda_2\gamma = -h \Rightarrow t = -h\dfrac{p+q}{p-q}$ (t est constant) : (S) est un cône de sommet : $(0, 0, t)\ : 2px(z-t) - (h-t)y^2 = 0$ privé des droites $x = y = 0$ et $z = t$, $y = 0$.

Solution 1.4.10 On pose $m = \operatorname{cotan}\alpha$ et D définie par : $\begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} m \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ et on cherche une C.N.S. pour que D rencontre Γ : $\lambda^2\cos 2\theta + 2a\lambda\cos\theta = 0$ et $\lambda(m + \cos\theta + \sin\theta) = a - u$; 2 cas :
$\lambda = 0, u = a$ cône de sommet $A(a, 0, 0)$, d'axe Ox, de 1/2 angle α
$\lambda = -\dfrac{2a\cos\theta}{\cos 2\theta}, u = a\dfrac{1 + \sin 2\theta + 2\cos 2\theta + 2m\cos\theta}{\cos 2\theta}$
équation cartésienne : $(y+z)^2(xy - xz - 3ay + az)^2 - m^2(y^2+z^2)(y^2 - z^2 + 2ay)^2 = 0$.

Solution 2.1.1 Si $\overrightarrow{V} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} + R\overrightarrow{k}$ alors la matrice jacobienne de $\overrightarrow{V}$ s'écrit
$$M(\overrightarrow{V}) = \begin{pmatrix} \partial P/\partial x & \partial P/\partial y & \partial P/\partial z \\ \partial Q/\partial x & \partial Q/\partial y & \partial Q/\partial z \\ \partial R/\partial x & \partial R/\partial y & \partial R/\partial z \end{pmatrix} = M.$$
Si $\overrightarrow{V}_0 = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j} + \gamma\overrightarrow{k}$ alors le vecteur cherché s'écrit $\overrightarrow{W} = M.\overrightarrow{V}_0$.
Comme $\overrightarrow{W}.\overrightarrow{i} = \alpha\dfrac{\partial P}{\partial x} + \beta\dfrac{\partial P}{\partial y} + \gamma\dfrac{\partial P}{\partial z}$. On vérifie par un calcul facile que
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V}_0).\overrightarrow{i} + (\text{div}\,\overrightarrow{V})\overrightarrow{V}_0.\overrightarrow{i} = \overrightarrow{W}.\overrightarrow{i}.$$
Par symétrie, on aura le même résultat avec $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ d'où la relation
$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V}_0) + \text{div}(\overrightarrow{V}).\overrightarrow{V}_0.$$

Solution 2.1.2

(1) Étudions la différentielle de $f_A(M) = \dfrac{\overrightarrow{MA}}{\|MA\|^2} = \dfrac{-1}{x^2+y^2+z^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec A comme origine. $\dfrac{\partial f_A}{\partial x} = \dfrac{-1}{x^2+y^2+z^2} + \dfrac{2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$, donc

$$f'_A(M)(h) = \left(2\frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{h}}{\|MA\|^2}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{h}\right)\frac{1}{\|MA\|^2}$$

car $f'_A(M)(h) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(M)h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(M)h_2\dfrac{\partial f}{\partial z}(M)h_3$.

Comme $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f}_A + \overrightarrow{f}_B$, $\overrightarrow{f}$ est différentiable sur $E \setminus \{A, B\}$.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$: alors $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, g$ où $g = -\ln\|MA\| - \ln\|MB\|$.

Solution 2.1.3 Dans le cas général, si (e_i) est un repère orthonormé tel que e_n donne la direction, alors l'hypothèse se traduit par

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(u)$$

où $u = \dfrac{x_n}{r}$ et $r = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, g étant une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On remarque que $|u| < 1$.

L'expression du laplacien donne

$$\Delta F = \frac{(n-1)x_n}{r^3}(-g'(u)) + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{x_n^2}{r^4}\right)g''(u).$$

On a donc $\Delta f = 0 \Leftrightarrow -(n-1)ug'(u) + (1-u^2)g''(u) = 0$ qui s'intègre en $g'(u) = \dfrac{\lambda}{(1-u^2)^{(n-1)/2}}$ ($|u| < 1$). On peut primitiver g dans les cas $n = 2$, $n = 3$ et l'on obtient

- $n = 2 \Rightarrow F(x, y) = \lambda \operatorname{Arcsin} \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mu = \lambda\theta + \mu$ (en polaires) ;
- $n = 3 \Rightarrow F(x, y, z) = \dfrac{\lambda}{2} \ln \dfrac{1 + \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{1 - \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}} + \mu = \lambda \ln|\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}|$ (en sphériques).
- $n = 4 \Rightarrow F(x, y, z, t) = \lambda\dfrac{t}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \mu$.

Solution 2.2.1

(1) On passe en cylindriques : $I = \pi a^3$.

(2) On écrit : $J = \displaystyle\int_0^a \mathrm{d}z \left(\iint_{D_z} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+a^2)^3}\right)$ où $D_z \begin{cases} x^2+y^2-ax \leqslant 0 \\ z = h \in [0, a] \end{cases}$ puis on passe en polaires : $J = \dfrac{\pi}{2a^3} - \dfrac{1}{a^3}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\cos^2\theta)^2}$ et après calculs : $J = \dfrac{(8-3\sqrt{2})\pi}{16a^3}$.

(3) On a $K = \displaystyle\int_0^1 f(z)\,\mathrm{d}z$ avec $f(z) = \displaystyle\iint_{D_z} |x^2-y^2|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où D_z est le cercle $x^2+y^2 = z$ et donc (après un passage en polaires) $f(z) = \dfrac{z^2}{8}\displaystyle\int_0^{4\pi} |\cos u|\,\mathrm{d}u = z^2$, d'où $K = \dfrac{1}{3}$.

(4) On passe en cylindriques et on trouve : $L = \pi \left[\ln 2 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right]$.

Solution 2.2.2

(1) On pose $u = \dfrac{y}{x^2},\ v = xy \Rightarrow D' \begin{cases} a \leqslant u \leqslant b \\ c \leqslant v \leqslant d \end{cases}$ et $J(u,v) = \dfrac{1}{3u}$ donc

$$A = \frac{1}{3}\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u}\int_c^d \mathrm{d}v = \frac{d-c}{3}\ln\frac{b}{a}.$$

(2) On pose $x = au\cos t,\ y = bu\sin t$, le calcul de l'aire se ramène au calcul de $I = \iint_{\mathcal{D}} ab|u|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$ où $\mathcal{D} = \{(u,t) \in \mathbb{R}^2 | -\pi/2 \leqslant t \leqslant +\pi/2, 0 \leqslant |u| \leqslant \inf(1, v(t))\}$ où $v(t) = \dfrac{ab}{\sqrt{a^4\cos^2 t + b^4\sin^2 t}}$.
$I = ab\displaystyle\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\inf(1, v^2(t))\,\mathrm{d}t = I_1 + I_2$ où $I_1 = 2ab\displaystyle\int_0^{\varphi} v^2(t)\,\mathrm{d}t$, $I_2 = 2ab(\pi/2 - \varphi)$ où $\varphi = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{a}{b}$ (on suppose que $b \leqslant a$). On obtient $I_1 = I_2 = 2ab\mathrm{Arctan}\,\dfrac{b}{a}$.

Solution 2.2.3 On a $\displaystyle\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = [(x-1/2)f(x,y)]_0^1 - \int_0^1 (x-1/2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x$ (en faisant une intégration par parties) donc

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= -\iint_{[0,1]^2}(x-1/2)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^1 (x-1/2)\left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \iint_{[0,1]^2}(x-1/2)(y-1/2)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

(en faisant une intégration par parties par rapport à y). On recommence :

$$\int_0^1 (x-1/2)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(x^2-x)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x)\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

On trouve enfin :

$$\iint_{[0,1]^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\iint_{[0,1]^2}(x^2-x)(y^2-y)\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

On peut donc majorer cette dernière intégrale par $\dfrac{M}{144}$ car $\dfrac{1}{4}\displaystyle\iint_{[0,1]^2}(x^2-x)(y^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{144}$.
On a égalité ssi $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}(x,y)$ est constante, prendre par exemple $f(x,y) = (x^2-x)(y^2-y)$.

Solution 2.2.4 Par translation et grâce à la linéarité de l'intégrale, on se ramène à la situation : $(x_0, y_0) = (0,0)$, $f(0,0) = 0$ alors

$$f(x,y) = xp + yq + \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + (x^2+y^2)\varepsilon(x,y)$$

où $\varepsilon(x,y) \to 0$ quand $(x,y) \to (0,0)$.
Les intégrales de x, de y et de xy sont nulles (pour des raisons de symétrie) et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe r tel que $\|(x,y)\| \leqslant r$ entraîne $|\varepsilon(x,y)| \leqslant \varepsilon$ donc

$$\left|\iint_{D_r} (x^2+y^2)\varepsilon(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \varepsilon \iint_{D_r} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \varepsilon\frac{\pi}{2}r^4$$

soit $\displaystyle\iint_{D_r} (x^2+y^2)\varepsilon(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = o(r^4)$.
Comme $\displaystyle\iint_{D_r} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_r} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_{D_r} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi r^4}{4}$ on en déduit que

$$\iint_{D_r} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi r^4}{4}\Delta f(0,0)$$

ce qui donne le résultat.
De même, on trouve $m_r(f) - f(x_0,y_0) = \left(\dfrac{r}{2}\right)^2 \Delta f(x_0,y_0) + o(r)$.
En effet, comme $\mathrm{d}M = \mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\theta$ on a $\displaystyle\int_C x\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} r\cos\theta r\,\mathrm{d}\theta = 0$, de même avec $\displaystyle\int_C y\,\mathrm{d}s = \int_C xy\,\mathrm{d}s = 0$.
Ensuite $\displaystyle\int_C x^2\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} r^3\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi r^3$ et $\displaystyle\left|\int_C (x^2+y^2)\varepsilon(x,y)\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \varepsilon\int_C r^3\,\mathrm{d}\theta = \varepsilon\pi r^4$ ce qui donne la formule annoncée.
Conclusion : on obtient

$$\lim_{r\to 0}\frac{4}{r^2}(m_r(f) - f(x_0,y_0)) = \Delta f(x_0,y_0).$$

Solution 2.2.5

(1) On fait le changement de variable $x \to Rx$.
(2) On écrit

$$\omega_{n+1} = \int_{B_{n+1}} \mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n+1} = \int_{-1}^{+1}\left(\int_{x_1^2+\ldots+x_n^2=1-x_{n+1}^2} \mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n\right)\mathrm{d}x_{n+1}$$
$$= \int_{-1}^{+1} \omega_n(1-x_{n+1}^2)^{n/2}\,\mathrm{d}x_{n+1}$$

On obtient alors les formules demandées à l'aide des intégrales de Wallis.
Remarque : à l'aide de la fonction d'Euler on trouve une expression simplifié et générale qui est

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

(3) Pour avoir la surface de la sphère en dimension n, on remarque tout d'abord que la surface d'une sphère de rayon R vaut $R^{n-1}\sigma_n$ où σ_n désigne la surface de la sphère de rayon 1. Ensuite, le volume ω_n est donné par la formule : $\displaystyle\omega_n = \int_0^1 \sigma_n x^{n-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\sigma_n}{n}$ i.e. $\sigma_n = n\omega_n$.