

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

1. CALCUL DIFFÉRENTIEL

1.1. Applications continûment différentiables.

EXERCICE 1.1.1. F

Dans $\mathbb{R}^3$ on note S_2 la sphère unité pour la norme euclidienne. À $z \in \mathbb{C}$ on associe $\sigma(z)$ et $\tau(z)$ éléments de S_2 définis par

$$\sigma(z) = \left(\frac{2\Re(z)}{1+|z|^2}, \frac{2\Im(z)}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right), \quad \tau(z) = \left(\frac{2\Re(z)}{1+|z|^2}, \frac{2\Im(z)}{1+|z|^2}, \frac{1-|z|^2}{|z|^2+1} \right)$$

Montrer que σ (resp. τ) est un homéomorphisme de $\mathbb{C}$ sur $S_2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ (resp. $S_2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$). Vérifier que $\sigma(\bar{z}) = \tau(1/z)$. Interprétation géométrique.

EXERCICE 1.1.2. F

Calculer le jacobien de la transformation $(x, y) \mapsto (u, v)$ avec

$$\begin{cases} 3x - y &= u^2 - 4v \\ 2x + y &= 2u - 2v^2 \end{cases}.$$

EXERCICE 1.1.3. F

Étudier la différentiabilité de $g(x, y, z) = \frac{x^3 + y^4 + z^5}{|x| + |y|^2 + |z|^3}$ sur $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 1.1.4. I

- (1) Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, E l'e.v.n. des fonctions continues sur $[a, b]$ muni de la norme de la convergence uniforme. On considère l'application

$$F : f \in E \mapsto \int_a^b \varphi(f(x)) \, dx.$$

Montrer que F est différentiable et calculer sa différentielle.

- (2) Même question en supposant que φ n'est que de classe $\mathcal{C}^1$ (on utilisera la continuité uniforme de φ' sur le compact $f([a, b])$).

EXERCICE 1.1.5. I C

- (1) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(2) Soit $\varphi : M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue et différentiable. Déterminer sa différentielle.

EXERCICE 1.1.6. I

Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det M \in \mathbb{R}$.

Montrer que f est différentiable. Exprimer sa différentielle.

EXERCICE 1.1.7. I

Soit $\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (X, Y) \in \mathbb{R}^2$ où

$$\begin{cases} X = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} \\ Y = (x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) \end{cases}.$$

Montrer que φ est différentiable et trouver l'image de $\mathbb{R}^2$ par φ . Si $A \in \varphi(\mathbb{R}^2)$, déterminer l'image réciproque de A par φ .

EXERCICE 1.1.8. D

Soit E un espace de Banach, $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes continus de E muni de la norme attachée à la norme sur E . On définit $\text{GL}_c(E)$ comme étant l'ensemble des automorphismes continus de E dont l'inverse est continu (cf sujet numéro 4.2 sur les e.v.n.).

- (1) Montrer que $\mathcal{L}(E)$ est un espace de Banach.
 - (2) L'identité appartient-elle à l'intérieur de $\text{GL}_c(E)$? Peut-on dire la même chose si l'on prend $a \in \text{GL}_c(E)$?
 - (3) Montrer que l'application $I : a \in \text{GL}_c(E) \mapsto a^{-1} \in \text{GL}_c(E)$ est différentiable et exprimer sa différentielle.
-

EXERCICE 1.1.9. D

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times I, I)$. On note $F_t(x) = G(t, x)$ et on suppose que les F_t vérifient

$$\begin{cases} F_t \circ F_u = F_{t+u} \\ (\forall x \in I) (\exists t \in \mathbb{R}) F_t(x) \neq x \end{cases}.$$

- (1) Montrer que la fonction $\frac{\partial G(t, x)/\partial x}{\partial G(t, x)/\partial t}$ ne dépend pas de t , on note $H(x)$ la fonction de x ainsi définie.
- (2) Prouver que $H(G(u, x)) = \frac{1}{\partial G(u, x)/\partial t}$.
- (3) En choisissant une primitive de H , trouver une application $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ bijective de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R} \times I : F_t(x) = \varphi^{-1}(t + \varphi(x)).$$

EXERCICE 1.1.10. D

Soit Σ_n^+ l'ensemble des matrices symétriques réelles d'ordre n , définies positives. On appelle E le $\mathbb{R}$ -e.v. des matrices symétriques.

- (1) Montrer que Σ_n^+ est un ouvert de E .
 - (2) Soit $f : S \in \Sigma_n^+ \mapsto S^2 \in \Sigma_n^+$. Montrer que f est différentiable et bijective. Montrer que f est un difféomorphisme de Σ_n^+ .
-

1.2. Fonctions numériques continûment différentiables.

EXERCICE 1.2.1. I

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto ye^x \in \mathbb{R}$; écrire la formule des accroissements finis au voisinage de $(0,0)$ pour f . Vérifier l'existence et l'unicité éventuelle de $\theta \in]0, 1[$ associé à un couple (x, y) dans cette formule.

EXERCICE 1.2.2. I

Soit, dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, E un fermé non vide. On pose

$$f : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x) = d(x, E) \in \mathbb{R}.$$

- (1) Étudier, pour x donné, l'existence de $y \in E$ tel que : $d(x, E) = d(x, y)$.
- (2) On suppose f différentiable en x et $\text{grad } f(x) \neq 0$. Montrer alors que $x \notin E$.
- (3) Montrer que $\text{grad } f(x) = \frac{x - y}{\|x - y\|}$ ($y \in E$ vérifie toujours que $f(x) = d(x, E)$). Que peut-on en déduire concernant y ?

1.3. Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$.EXERCICE 1.3.1. F

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telle que $f(a) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$ où $a = (0, 1, 1)$.

On suppose $\frac{\partial f}{\partial z}(a) \neq 0$, calculer alors $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, \cos t, \text{ch } t)}{f(t^2, \text{ch } t, e^t)}$.

Que dire si $\frac{\partial f}{\partial z}(a) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a) \neq 0$.

EXERCICE 1.3.2. F

Soit $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ et $U' =]-\infty, 0[\times \mathbb{R}$. Résoudre l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$$

sur $U \cup U'$.

EXERCICE 1.3.3. F

(1) Résoudre l'équation :

$$(E) \quad \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

(où $y(t, x)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$).

$$(2) \text{ On définit } y_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 - \cos x & \text{sur } [0, 2\pi] \\ \cos x - 1 & \text{sur } [-2\pi, 0] \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R} \setminus [-2\pi, 2\pi] \end{cases}.$$

Trouver y solution de (E) telle que : (i) $\frac{\partial y}{\partial t}(0, t) = 0$, (ii) $y(x, 0) = y_0(x)$.

EXERCICE 1.3.4. F

Soient φ et ψ définies sur $\mathbb{R}$, continues en x_0 et y_0 et g présentant un extremum local en $(\varphi(x_0), \psi(y_0))$.

Montrer que $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto g(\varphi(x), \psi(y)) \in \mathbb{R}$ présente un extremum local en (x_0, y_0) .

EXERCICE 1.3.5. F

Extrema de

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$$

sur $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 1.3.6. I

Soit

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}.$$

Étudier les extrema de f et préciser si ces extrema sont locaux ou globaux.

EXERCICE 1.3.7. I

Quel sont les extrema de f qui à tout point M du plan affine euclidien associe

$$f(M) = AM + BM - OM$$

où A et B sont des points fixes du plan situés à une distance $2a$, O étant leur milieu ?

EXERCICE 1.3.8. I T

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \int_{-1}^{+1} |x - t| \cdot |y - t| dt$.

- (1) Étudier la continuité et la différentiabilité de f .
 - (2) Quels sont les extrema de f ?
-

EXERCICE 1.3.9. I T

On se place dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé. On considère les points A et B de coordonnées $(a, 0)$ et $(-a, 0)$, où $a > 0$.

Au point M du demi-plan supérieur $y > 0$, on associe le couple (u, v) des distances de M à A et B .

- (1) Montrer qu'on obtient ainsi un C^1 -difféomorphisme de $U = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$ sur une certaine partie de $\mathbb{R}^2$ à préciser.
 - (2) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $\hat{f}$ la fonction définie par $\hat{f}(u, v) = f(x, y)$.
Exprimer $\Delta f(x, y)$ à l'aide des dérivées partielles de $\hat{f}$.
 - (3) Quelles sont les fonctions f telles que $\Delta f = 0$, $\hat{f}$ étant de la forme $A(u) + B(v)$?
-

EXERCICE 1.3.10. I

Soit $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, à toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$, on associe $Ef = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$. On dit que f est homogène de degré α ssi $Ef = \alpha f$.

- (1) Prouver que f est homogène de degré α ssi $\forall \lambda > 0, f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$.
 - (2) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$, calculer $E^2 f$.
 - (3) Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$ telle que $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f$ est somme de deux fonctions homogènes de degrés à préciser.
-

EXERCICE 1.3.11. I

Dans le plan euclidien, 2 cercles (C) et (C') de rayons $R > 0$ et $R' > 0$ sont tangents extérieurement en 0. Un point M décrit (C) et un point M' décrit (C') ; déterminer le maximum de l'aire du triangle OMM' .

EXERCICE 1.3.12. I

Soient $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $V = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} g(V) &= \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{10} + \frac{z^2}{25} - 1, \\ h(V) &= x + y - z, \\ f(V) &= x^2 + y^2 + z^2 + \lambda g(V) + \mu h(V) \end{aligned}$$

où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

- (1) Étudier les extrema de f .
 - (2) Caractériser l'ensemble E d'équation : $g(V) = 0$ et F d'équation $h(V) = 0$. Étudier les extrema de f sur $E \cap F$.
-

EXERCICE 1.3.13. D T

- (1) Soit $P(x, y) = \frac{\sin x}{\operatorname{ch} y - \cos x}$, $x \in]0, 2\pi[, y \in \mathbb{R}$. Calculer le laplacien de P (on montrera qu'il est nul).
 - (2) Pour $x \in]0, 2\pi[, \text{calculer } I = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, y) dy$ (poser $t = e^y$ ou dériver sous le signe intégral).
 - (3) Soit $\varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $t \mapsto \varphi(t)e^{-|t|}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction $F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x, t-y)\varphi(t) dt$ est bien définie sur $]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$.
 - (4) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ et calculer son laplacien.
-

EXERCICE 1.3.14. D

Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\alpha > 0$. On considère $J \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que

- (1) $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (J'(v) - J'(u))(v - u) \geq \alpha \|v - u\|^2.$

(1) Montrer que

$$(2) \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad J(v) - J(u) \geq \frac{\alpha}{2} \|v - u\|^2 + J'(u)(v - u).$$

Soit K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, J_K la restriction de J à K .

(2) Montrer que $\inf_{u \in K} J_K(u)$ existe et que cette borne inférieure est atteinte.

(3) Montrer que $u_0 \in K$ réalise le minimum de J_K sur K ssi

$$\forall u \in K, \quad J'_K(u_0)(u - u_0) \geq 0.$$

EXERCICE 1.3.15. F

Soit l'équation

$$(E) \quad x^2 + y^2 = e^{2 \operatorname{Arctan} y/x}.$$

Chercher les conditions sur (x_0, y_0) pour que, dans un voisinage de (x_0, y_0) , cette relation définisse implicitement $y = \varphi(x)$.

Calculer φ' , φ'' , $\frac{(1 + \varphi'^2)^3}{\varphi''^2}$: interprétation.

1.4. Notions sur les courbes et les surfaces.

EXERCICE 1.4.1. I

Soit S la surface paramétrée

$$\begin{cases} x = e^{-t} \cos \theta \\ y = e^{-t} \sin \theta \\ z = e^{-t} \end{cases}.$$

Trouver les courbes tracées sur S telles qu'en tout point, le plan osculateur soit perpendiculaire à la surface S .

EXERCICE 1.4.2. I C T

Dans un repère orthonormé soit $\mathcal{T}$ le tore engendré par la rotation autour de Oz du cercle $\mathcal{C}$: $x^2 + z^2 - 4x + 3 = 0$, $y = 0$.

- (1) Trouver les plans tangents à $\mathcal{T}$ passant par O .
- (2) Étudier la projection sur xOy de l'intersection Γ de $\mathcal{T}$ et d'un des plans tangents. Quelle est la nature de cette intersection ?

EXERCICE 1.4.3. D

Soit E un ellipsoïde d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, on considère 3 points M_1 , M_2 et M_3 de E . Montrer que le volume du tétraèdre (O, M_1, M_2, M_3) est indépendant du choix des points si le plan tangent en M_i est parallèle au plan OM_jM_k pour tous les triplets (i, j, k) de $\{1, 2, 3\}$.

EXERCICE 1.4.4. D

Nature de la surface $S : x^2 + 2y^2 - 2z = 0$.

Montrer que les plans tangents qui coupent S suivant un cercle sont parallèles au plan $y + z = 0$ ou au plan $y - z = 0$.

Déterminer le lieu des centres de ces cercles.

2. INTÉGRALES CURVILIGNES

2.1.

EXERCICE 2.1.1. F

Soit Γ la courbe intersection de $x^2 + y^2 + z^2 - 2ay = 0$ et de $x^2 + y^2 - 2by = 0$, $z > 0$ et $0 < b < a$; on suppose que, en projection sur xOy , Γ est parcourue dans le sens positif.

Calculer $\int_{\Gamma} (y^2 + z^2) dx$.

EXERCICE 2.1.2. F

Calculer $\int_{\gamma} xy dx + (x^2 + y^2) dy$ sur le cercle $\gamma : x^2 + y^2 - 2Rx = 0$ parcouru dans le sens direct, en faisant intervenir des différentielles exactes.

EXERCICE 2.1.3. I

Soit $\omega = P dx + Q dy$ avec $P(x, y) = y + \frac{yz^2}{x^2 + y^2}$ et $Q(x, y) = -x - \frac{xz^2}{x^2 + y^2}$ où $z = f(x, y)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-$.

- (1) Chercher une C.N.S. (donnée sous forme d'une équation (E)) portant sur f pour que ω soit une différentielle fermée.
- (2) Donner une expression de f^2 en se plaçant en coordonnées polaires.
- (3) Chercher une primitive de ω lorsque $z^2 = -(x^2 + y^2) + \frac{4x^2}{x^2 + y^2}$.

Indication 1.1.1 σ est continue car les applications coordonnées le sont, de même pour τ . σ^{-1} : poser $\sigma(z) = (x', y', z')$, $\Im z = \frac{y'}{1-z'}$ et $\Re z = \frac{x'}{1-z'}$. On a même $\sigma(z) = -\tau(-z)$.

Interprétation géométrique : si $\Omega = (0, 0, 1)$, σ à M fait correspondre le point d'intersection de la droite ΩM avec la sphère S_2 .

Indication 1.1.2 On trouve $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \frac{5}{8(1-uv)}$

Indication 1.1.3 Prendre la norme $\|(x, y, z)\| = \sup(|x|, |y|, |z|)$ et $|x^3 + y^4 + z^5| \leq (|x| + y^2 + |z|^3) \cdot \|(x, y, z)\|^2$.

Indication 1.1.4

- (1) On écrit $\int_a^b [\varphi(f(t) + h(t)) - \varphi(f(t))] dt = \int_a^b h(t) \varphi'(f(t)) dt + \frac{1}{2} \int_a^b \varphi''(f(t) + \theta(t)h(t)) dt$.
- (2) Utiliser le fait que φ' est uniformément continue sur tout compact.

Indication 1.1.5 Utiliser le déterminant puis écrire

$$(M + H)^{-1} = M^{-1}(I + HM^{-1})^{-1} = M^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} [-HM^{-1}]^n.$$

Indication 1.1.6 f est une fonction polynomiale des coefficients de M donc différentiable, puis $f'(M)(H) = \text{Tr}(BH)$ où B est la transposée de la comatrice de M .

Indication 1.1.7 Calculer les dérivées partielles, poser $x = \operatorname{sh} u$, $y = \operatorname{sh} v$. Selon les cas, on trouve une branche d'hyperbole ou la droite $x + y = 0$.

Indication 1.1.8

- (1) $\mathcal{LC}(E)$ est complet : si (f_n) une suite de Cauchy, poser $g_n = f_n|_{S(0,1)}$, $g(x)$ sa limite et définir f sur E par $f(x) = 0$ si $x = 0$, $\|x\|g\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ si $x \neq 0$.
- (2) Montrer que Id_E est intérieur à $\operatorname{GL}_c(E)$ à l'aide de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} h^n$ pour $\|h\| < 1$. Pour $a \in \operatorname{GL}_c(E)$, écrire $(a - h)^{-1} = (\sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}h)^n)a^{-1}$.
- (3) Écrire $(a + h)^{-1} - a^{-1} = -a^{-1}ha^{-1} + o(h)$.

Indication 1.1.9

- (1) L'hypothèse $F_t \circ F_u = F_{t+u}$ donne $G(t, G(u, x)) = G(t+u, x)$ (1). Dérivée par rapport à u : $\frac{\partial G}{\partial t}(u, x) \frac{\partial G}{\partial x}(t, G(u, x)) = \frac{\partial G}{\partial t}(t+u, x)$. (2) puis en déduire que $G(t, x)$ ne dépend pas de t et obtenir une contradiction. En déduire que $\frac{\partial G}{\partial t}(u, x)$ ne s'annule jamais. Dérivée (1) par rapport à x et obtenir que $\frac{\partial G(\cdot, x)/\partial x}{\partial G(\cdot, x)/\partial t}$ est une fonction constante.
- (2) Prendre $t = 0$ dans la relation (2) et utiliser la relation $\frac{\partial G}{\partial t}(0, G(u, x)) = \frac{\partial G}{\partial t}(u, x)$.
- (3) Si φ est une primitive de H alors $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(G(t, x)) = 1$ et $\frac{\partial}{\partial x}\varphi(G(t, x)) = H(x)$ et obtenir $\varphi(G(t, x)) = t + \varphi(x)$. (4) Montrer ensuite que φ est bijective de I sur $\mathbb{R}$.

Indication 1.1.10

- (1) Montrer que $N(A) = \max_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} |\lambda|$ est une norme sur E puis prendre λ la plus petite valeur propre strictement positive de $M \in \Sigma_n^+$, choisir H dans E tel que les valeurs propres de H sont dans $] -\lambda, +\lambda[$.
- (2) On trouve immédiatement $f'(S)(H) = HS + SH$. Prouver que $f'(S)$ est injective en prenant X un vecteur propre de S , associé à $\lambda > 0$ et montrer que $HX = 0$. Montrer ensuite que f est bijective : si $S^2 = T^2$ alors $S = T$. Ensuite, à $S \in \Sigma_n^+$ s'écrivant $P^{-1}D^2P$ on fait correspondre $S' = P^{-1}DP$.

Indication 1.2.1 $ye^x = x(\theta ye^{\theta x}) + ye^{\theta x}$, puis distinguer les cas x ou y nul et $x \cdot y \neq 0$, on a unicité uniquement dans le dernier cas.

Indication 1.2.2

- (1) Se ramener à un compact et étudier la fonction $f(z) = d(x, z)$.
- (2) Par l'absurde, si $x \in E$ alors $\operatorname{grad} f(x) = 0$.
- (3) Utiliser l'inégalité $|d(x+h, E) - d(x, E)| \leq \|h\|$ et la différentiabilité de f en x , on obtient $\|\operatorname{grad} f\| \leq 1$. Prendre $x_t = (1-t)x + ty$, $t \in [0, 1]$ et $\varphi : t \mapsto f(x_t)$, en calculant de deux manières $\varphi'(0)$, obtenir $\operatorname{grad} f(x) \cdot u = 1$ où $u = \frac{x-y}{\|x-y\|}$. Conclure alors que $\operatorname{grad} f(x)$ est un vecteur de norme 1 et $\operatorname{grad} f(x) = \frac{x-y}{\|x-y\|}$. y est unique.

Indication 1.3.1 Poser $b = (t^2, \operatorname{ch} t - 1, e^t - 1)$, $c = (t, \cos t - 1, \operatorname{ch} t - 1)$ et écrire $f(a+b) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(e^t - 1) + o(t)$, $f(a+c) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(\operatorname{ch} t - 1) + o(t)$ d'où $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+c)}{f(a+b)} = 0$.

Si $\frac{\partial f}{\partial z}(a) = 0$ on trouve $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+b)}{f(a+c)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) / \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)$.

Indication 1.3.2 Poser $u = x$, $v = \frac{y}{x}$ et définir $g(u, v) = f(x, y)$, g vérifie $u \frac{\partial g}{\partial u} = v$ d'où $f(x, y) = \frac{y}{x} \ln |x| + h\left(\frac{y}{x}\right)$.

Indication 1.3.3

- (1) y se met sous la forme : $y(x, t) = A(x + vt) + B(x - vt)$.
- (2) En exprimant les conditions demandées, on trouve :
 $y = \frac{1}{2}[y_0(x + vt) + y_0(x - vt)] + A_p(x + vt) - A_p(x - vt)$.

Indication 1.3.4 Si g a un maximum en (x_0, y_0) alors $g(\varphi(x_0) + X, \psi(y_0) + Y) \leq g(\varphi(x_0), \psi(y_0))$ soit $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ce qui signifie que f présente un extremum local en (x_0, y_0) .

Indication 1.3.5 f ne présente pas d'extremum sur $\mathbb{R}^3$.

Indication 1.3.6 $f'(A) = 0 \Leftrightarrow A = (-1, 0, 0)$, puis poser $x = -1 + X$, $y = Y$, $z = Z$ et $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$. A est un minimum global.

Indication 1.3.7 La fonction $f : M \mapsto AM + BM - OM$ est continue sur le plan et différentiable en dehors des points O , A et B , puis $\text{grad } f(M) = \frac{\overrightarrow{AM}}{AM} + \frac{\overrightarrow{BM}}{BM} - \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$. On se ramène à un compact et f atteint son minimum sur ce compact. Les points qui vérifient $\text{grad } f(M) = 0$ sont les deux points tel que les triangles OAM et OBM soient des demi-triangles équilatéraux de hauteurs AO et BO mais ils ne conviennent pas. Le minimum global est obtenu en A et B .

Indication 1.3.8

- (1) On peut faire le calcul direct de l'expression de f : si $|x| \geq 1$, $|y| \geq 1$: $f(x, y) = 2|xy + \frac{1}{3}|$, si $|x| \leq 1$, $|y| \geq 1$: $f(x, y) = |x^2y - \frac{x^3}{3} + x + y|$, si $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$: $f(x, y) = \frac{1}{3}|x - y|^3 + 2xy + \frac{2}{3}$, (on remarque que $f(x, y) = f(y, x)$).
Pour la différentiabilité, faire le changement de variables $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$ et montrer que les dérivées partielles sont continues pour $v \neq 0$ puis étudier le cas $(u, 0)$.
 f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, différentiable sur $\mathbb{R}^2$ où Δ est la première bissectrice.
- (2) Les extrema de f sont à chercher parmi les points $(0, 0)$, $\pm(1/2, -1/2)$, en $(1/2, -1/2)$, f présente un minimum global (ainsi qu'en $(-1/2, 1/2)$ cas symétrique).

Indication 1.3.9

- (1) Exprimer u et v et inverser les relations pour trouver
 $x = \frac{v^2 - u^2}{4a}$, $y = \frac{1}{4a} \sqrt{(u + 2a + v)(u + 2a - v)(v + u - 2a)(v - u + 2a)}$.
On a $\varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*) = \Omega$ où $\Omega = \{(u, v) \in]0, +\infty[^2 \mid u + v > 2a, |u - v| < 2a\}$. et on calcule le jacobien de φ , il vaut $-\frac{2ay}{uv}$.
- (2) Après calculs, on trouve $\Delta f = \Delta \hat{f} + \frac{u^2 + v^2 - 4a^2}{uv} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial u \partial v} + \frac{1}{u} \frac{\partial \hat{f}}{\partial u} + \frac{1}{v} \frac{\partial \hat{f}}{\partial v}$.
- (3) Si $\hat{f}(u, v) = A(u) + B(v)$ alors on obtient l'équation différentielle $A''(u) + \frac{1}{u}A'(u) = -[B''(v) + \frac{1}{v}B'(v)]$ qui s'intègre en $A(u) = \alpha \frac{u^2}{4} + \beta \ln |u| + \gamma$ et

Indication 1.3.10

- (1) Dérivée $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$ par rapport à λ ; réciproque : si f est homogène de degré α , alors $\varphi(\lambda) = f(\lambda x, \lambda y)$ vérifie une équation différentielle.
- (2) $E^2 f = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + Ef$.
- (3) Il faut résoudre l'équation $E^2 f - Ef - f = 0$, avec α et β les racines de l'équation $X^2 - X - 1 = 0$, on arrive à la conclusion que f est la somme d'une fonction homogène de degré α et d'une fonction homogène de degré β .

Indication 1.3.11 Prendre un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ tel que les cercles soient centrés sur l'axe Ox et paramétrer (C) par : $\begin{cases} x = R(1 + \cos \theta) \\ y = R \sin \theta \end{cases}$ et (C') : $\begin{cases} x = -R'(1 - \cos \varphi) \\ y = R' \sin \varphi \end{cases}$. On

a Aire $(OM(\theta)M'(\varphi)) = \frac{1}{2}|f(\theta, \varphi)|$ où $f(\theta, \varphi) = RR'(\sin \theta + \sin \varphi + \sin(\varphi - \theta))$. Le maximum est atteint pour $(\theta, \varphi) \in \{(\pi/3, 2\pi/3), (-\pi/3, -2\pi/3)\}$ et dans ce cas : $\frac{1}{2}|f(\theta, \varphi)| = \frac{3\sqrt{3}}{4}RR'$.

Indication 1.3.12

- (1) Montrer que si Q est une forme quadratique et L une forme linéaire tq $\forall x$, $Q(x) + L(x) \geq 0$ alors $L = 0$ et $Q \geq 0$. Si f présente en extremum en $A(a, b, c)$ alors $\forall V$, $f(A+V) - f(A)$ a un signe constant d'où si A est un extremum $2a(1 + \frac{\lambda}{4}) + \mu = 0$, $2b(1 + \frac{\lambda}{10}) + \mu = 0$, $2c(1 + \frac{\lambda}{25}) - \mu = 0$; un minimum si $\lambda \geq -4$, un maximum si $\lambda \leq -25$.
Réciproquement, si $\lambda > -4$, f est minimum au point $A(-\frac{2\mu}{4+\lambda}, -\frac{5\mu}{10+\lambda}, \frac{25\mu}{2(25+\lambda)})$, si $\lambda = -4$, $\mu = 0$, f est minimum en tout point $(a, 0, 0)$, si $\lambda = -25$, $\mu = 0$, f est maximum en tout point $(0, 0, c)$, si $\lambda < -25$, f est maximum au point A .

- (2) $E \cap F$ est une ellipse de centre O . Sur $E \cap F$, $f(V) = \|V\|^2$, les extrema de f sont les sommets de cette ellipse et valent $d = \frac{100}{13 \pm \sqrt{39}}$.

Indication 1.3.13

- (1) Calcul.
- (2) On trouve $I = 2(\pi - x)$ pour $x \in]0, 2\pi[$.
- (3) Pour t tendant vers $+\infty$, on a $|P(x, t - y)| \sim \frac{|\sin x|e^y}{2}e^{-t}$.
- (4) Pour $x \in [a, 2\pi - a]$, $y \in [-b, b]$, écrire $F(x, y) = \int_{|t| \leq b+2} P(x, t - y)\varphi(t) dt (= F_1(x, y)) + \int_{|t| \geq b+2} P(x, t - y)\varphi(t) dt (= F_2(x, y))$ et montrer que F_1 et F_2 sont continues en exploitant le théorème de continuité sous le signe intégral. Montrer de même que F_1 est de classe $\mathcal{C}^2$. Pour F_2 , on fait de même avec les dérivées partielles de P par rapport à x et en appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégral.
On a alors $\Delta F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta P(x, y - t)\varphi(t) dt = 0$.

Indication 1.3.14

- (1) Considérer $\varphi : t \in [0, 1] \mapsto J(u + t(v - u))$ et écrire que $\varphi(1) - \varphi(0) \geq \int_0^1 [t\alpha \|v - u\|^2 + J'(u)(v - u)] dt$.
- (2) Montrer que $F = \{v \in K \mid J(v) \leq J(v_0)\}$ est un compact où $v_0 \in K$.
- (3) $(\Leftarrow)$: utiliser l'inégalité du 2.
 $(\Rightarrow)$: montrer que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_K(u_0 + t(u - u_0)) - J_K(u_0)}{t} = J'(u_0)(u - u_0) \geq 0$.

Indication 1.3.15 Les conditions sont $x_0 \neq y_0$ et $f(x_0, y_0) = 0$, on a ensuite $\varphi'(x) = \frac{x+y}{x-y}$, $\varphi''(x) = 2\frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}$, $\frac{(1+\varphi'^2)^3}{\varphi''^2} = 2(x^2 + y^2)$.

Indication 1.4.1 On obtient $t = t_0 + \ln \cos\left(\frac{\theta_0 - \theta}{\sqrt{2}}\right)$. Les courbes solutions se déduisent toutes par similitude d'axe Oz de la courbe paramétrée correspondant à $t_0 = \theta_0 = 0$.

Indication 1.4.2 La méridienne de $\mathcal{T}$ en cylindriques a pour équation : $(r^2 + z^2 + 3)^2 - 16r^2 = 0$.

- (1) Se placer dans le plan xOz : $M_0(3/2, 0, \sqrt{3}/2)$ et son symétrique par rapport à xOy sont les points de contacts : $\Pi_{M_0} : z = \frac{x}{\sqrt{3}}$ et $\Pi_{M'_0} : z = -\frac{x}{\sqrt{3}}$.
- (2) On obtient $z = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $(4\frac{x^2}{3} + y^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0$, Γ est la réunion de 2 cercles.

Indication 1.4.3 Soit $\vec{u}_i = \overrightarrow{OM_j} \wedge \overrightarrow{OM_k}$, la condition s'écrit $\exists \lambda_i$ tel que $\vec{u}_i = \lambda_i \vec{n}_i$. Le volume du tétraèdre est donné par $V = \frac{|\lambda_3|}{6}$ et par raison de symétrie, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 6V$.

Soit g tel que $\vec{n}_i = g(\overrightarrow{OM_i})$ alors $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = (6V)^2 = \lambda_1^3 \det g \cdot 6V$, en déduit que $V = \frac{abc}{6}$ et donc V est bien indépendant du choix des points M_i .

On peut aussi utiliser une astuce...

Indication 1.4.4 S est un paraboloïde elliptique. Si P un plan qui coupe S selon un cercle, s'arranger pour que dans un nouveau repère orthonormé, l'équation de P s'écrive : $Z = h$.

L'équation de S s'écrit $X^2 + Y^2 + Z^2 + \underbrace{(aX + bY + cZ + 1)}_{=y-z} \underbrace{(a'X + b'Y + c'Z - 1)}_{=y+z} + 1 = 0$, et

l'intersection avec $P : Z = h$, $X^2 + Y^2 + Z^2 + (aX + bY + ch + 1)(a'X + b'Y + c'h - 1) + 1 + h^2 = 0$.

Le centre a pour coordonnées : $(0, -1/2, \alpha + 1/2)$ avec $\alpha > -1/4$ qui décrit une demi-droite.

On rajoute à cet ensemble l'ensemble symétrique par rapport à xOz .

Indication 2.1.1 En simplifiant on a $\int_{\Gamma} (y^2 + z^2) dx = 2a \int_{\Gamma} y dx = -2\pi ab^2$.

Indication 2.1.2 Après quelques simplifications on a $\int_{\gamma} xy dx + (x^2 + y^2) dy = \pi R^3$.

Indication 2.1.3

- (1) La C.N.S. s'écrit $z \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) = -r^2$.
- (2) En polaires, $z = f(x, y) = g(r, \theta)$ donne $z^2 = -r^2 + h(\theta)$.
- (3) Si U est une primitive de ω alors $U(x, y) = -2\frac{xy}{x^2 + y^2} - 2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}$.

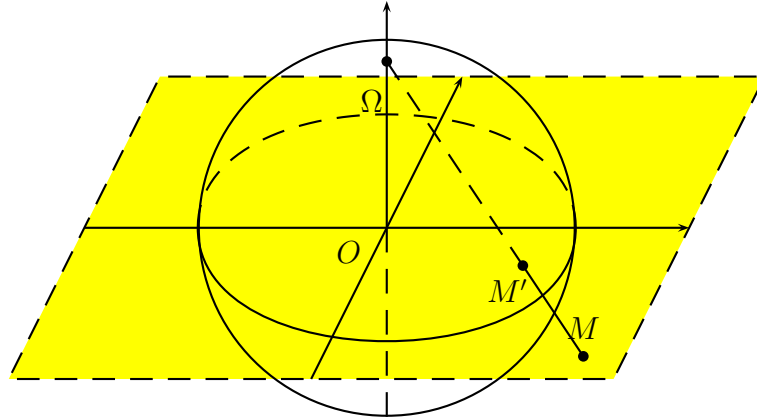
1. SOLUTIONS :

Solution 1.1.1 σ est bien continue car les applications coordonnées le sont. Il en est de même pour τ .

Recherche de σ^{-1} : si on pose $\sigma(z) = (x', y', z')$ alors $\Im z = \frac{y'}{1 - z'}$ et $\Re z = \frac{x'}{1 - z'}$ donc σ^{-1} est continue de $S_2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ sur $\mathbb{C}$.

On a même $\sigma(z) = -\tau(-z)$.

Interprétation géométrique : on note Ω le point de coordonnées $(0, 0, 1)$, M' le point $\sigma(z) = (x', y', z')$ et M le point du plan xOy d'affixe z . L'application σ n'est autre que l'application qui à M fait correspondre le point d'intersection de la droite ΩM avec la sphère S_2 .



Pour τ , on prend Ω' le symétrique de Ω par rapport au plan xOy , $\tau(M)$ sera l'intersection de la droite $\Omega'M$ avec S_2 .

Solution 1.1.2 On peut calculer effectivement x et y en fonction de u et v . On peut aussi procéder de la manière suivante :

soit $f(x, y) = (X, Y) = (3x - y, 2x + y)$ et $g(u, v) = (X, Y) = (u^2 - 4v, 2u - 2v^2)$ alors $(x, y) = f^{-1} \circ g(u, v)$ et donc $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{8(1 - uv)}{5}$ en utilisant le *théorème 9.2 page 309*.

Sur chacun des ouverts suivants

$\Omega_1 : uv > 1, u > 0, v > 0, \Omega_2 : uv > 1, u < 0, v < 0, \Omega_3 : uv < 1$, on obtient :

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{5}{8(1 - uv)} \text{ (en application de la proposition 9.1.5 page 310).}$$

Solution 1.1.3 L'idée ici est de choisir une bonne norme, or, en prenant la norme $\|(x, y, z)\| = \sup(|x|, |y|, |z|)$ on a

$$|x^3 + y^4 + z^5| \leq (|x| + y^2 + |z|^3) \cdot \|(x, y, z)\|^2.$$

Cette inégalité permet de conclure directement à la différentiabilité de g en $(0, 0, 0)$ (cf. *définition 9.1.1 page 307*).

Solution 1.1.4

(1) On a

$$\int_a^b [\varphi(f(t) + h(t)) - \varphi(f(t))] dt = \int_a^b h(t) \varphi'(f(t)) dt + \frac{1}{2} \int_a^b \varphi''(f(t) + \theta(t)h(t)) dt.$$

La première intégrale fournit la différentielle, la deuxième est effectivement un $o(h)$ (on vérifie que $h \mapsto \int_a^b h(t)\varphi'(f(t)) dt$ est bien une application linéaire continue).

- (2) On fait de même, si on prend $\varepsilon > 0$ alors, comme φ' est uniformément continue sur tout compact, on peut choisir $\eta > 0$ tel que

$$\|h\| \leq \eta \Rightarrow |\varphi'(f(t) + h(t)) - \varphi'(f(t))| \leq \varepsilon$$

pour tout $t \in [a, b]$, le reste de la démonstration se fait comme ci-dessus.

Solution 1.1.5

- (1) $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par l'application déterminant qui est continue.

- (2) On a $M^{-1} = \frac{1}{\det M} M'^T$ (cf. *proposition 8.5.11 page 157*), toutes les applications intervenant sont continues (ce sont des fonctions polynomiales des coefficients de M), il en est de même de φ . La différentiabilité s'obtient de la même façon.

Calcul de la différentielle : on exprime

$$(M + H)^{-1} = M^{-1}(I + HM^{-1})^{-1} = M^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} [-HM^{-1}]^n$$

à condition que H soit suffisamment petite pour que $\|HM^{-1}\| < 1$ (cf. *théorème 5.44 page 246*).

En écrivant $(M + H)^{-1} - M^{-1} = -M^{-1}HM^{-1} + M^{-1} \sum_{n=2}^{+\infty} [-HM^{-1}]^n$, on obtient immédiatement $\varphi'(M)(H) = -M^{-1}HM^{-1}$ car

$$\begin{aligned} M^{-1} \sum_{n=2}^{+\infty} [-HM^{-1}]^n &= M^{-1} [HM^{-1}]^2 \sum_{n=0}^{+\infty} [-HM^{-1}]^n \\ &= M^{-1} [HM^{-1}]^2 (I + HM^{-1})^{-1} = O(H^2). \end{aligned}$$

Remarque : on pouvait directement avoir cette relation sans passer par les séries mais il aurait fallu intuitionner que l'on pouvait écrire :

$$(M + H)^{-1} = M^{-1} - M^{-1}HM^{-1} + M^{-1}[HM^{-1}](I + HM^{-1})^{-1}.$$

Solution 1.1.6 f est une fonction polynomiale des coefficients de M , elle est donc différentiable.

$$\text{On a } \frac{\partial f}{\partial a_{ij}} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & 1 & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij} \text{ cofacteur de } a_{ij} \text{ de } M. \text{ Donc}$$

$$f'(M)(H) = \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}(M) h_{ij} = \text{Tr}(BH)$$

où B est la transposée de la comatrice de M .

Solution 1.1.7 Le calcul des dérivées partielles donne :

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \sqrt{1+y^2} + \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \sqrt{1+x^2} + \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{Y}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{Y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

X et Y sont $\mathcal{C}^1$ donc φ est $\mathcal{C}^1$ et on remarque que $J_\varphi = 0$ (jacobien de φ). On s'attend donc à ce que φ ne soit pas bijective et même qu'il existe une relation entre X et Y .

En posant $x = \operatorname{sh} u$, $y = \operatorname{sh} v$, on a : $X = \operatorname{sh}(u+v)$ et $Y = e^{u+v}$ i.e. $X = \frac{1}{2}(Y - \frac{1}{Y}) = f(Y)$.

$\varphi(\mathbb{R}^2)$ est une branche d'hyperbole ($Y > 0$).

Si $A = (X_0, Y_0) = (f(Y_0), X_0)$:

$$\varphi(x, y) = A \Leftrightarrow u + v = \ln Y = \lambda$$

ce qui donne une paramétrisation de la courbe recherchée

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh} u \\ y = \operatorname{sh}(\lambda - u) = -\operatorname{sh} u \operatorname{ch} \lambda + \operatorname{ch} u \operatorname{sh} \lambda \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

ce qui donne, en éliminant λ entre ces équations :

- Si $\lambda \neq 0$, $x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{ch} \lambda = \operatorname{sh}^2 \lambda$ et $(y + x \operatorname{ch} \lambda) \operatorname{sh} \lambda > 0$ qui correspond à une branche d'hyperbole.
- Si $\lambda = 0$: on trouve la droite $x + y = 0$.

Solution 1.1.8

- (1) $\mathcal{LC}(E)$ est complet : soit (f_n) une suite de Cauchy, on pose $g_n = f_n|_{S(0,1)}$ restriction de f_n à la sphère unité. On sait que pour tout x , $(g_n(x))$ converge, soit $g(x)$ sa limite. On prend la limite quand $p \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité $\|g_n(x) - g_{n+p}(x)\| \leq \varepsilon$ alors (g_n) converge

uniformément vers g . On définit alors f sur E par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \|x\|g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$

alors $(f_n(x))$ converge pour tout x de E vers $f(x)$. f est linéaire et continue. Vu que $\|f_n(x) - f_{n+p}(x)\| \leq \varepsilon$ pour $x \in S(0,1)$ alors, quand $p \rightarrow +\infty$, $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$.

- (2) Montrons que Id_E est intérieur à $\operatorname{GL}_c(E)$:

si $\|h\| < 1$, comme $\|h^n\| \leq \|h\|^n$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} h^n$ est absolument convergente donc convergente dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E)$. Or, par passage à la limite, en utilisant la continuité de la norme, $\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} h^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|h\|^n = \frac{1}{1 - \|h\|}$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} h^n = (\operatorname{Id}_E - h)^{-1} \in \operatorname{GL}_c(E)$ ce qui permet de conclure.

Pour $a \in \operatorname{GL}_c(E)$, on écrit de même

$$(a - h)^{-1} = (\operatorname{Id}_E - a^{-1}h)^{-1}a^{-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}h)^n \right) a^{-1}$$

qui appartient bien à $\operatorname{GL}_c(E)$ pour $\|h\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$.

- (3) De même, on écrit que

$$(a + h)^{-1} - a^{-1} = -a^{-1}ha^{-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (a^{-1}h)^n a^{-1} = -a^{-1}ha^{-1} + o(h)$$

ce qui permet d'affirmer que I est différentiable et de donner l'expression de sa différentielle. On pourra voir pour l'occasion l'exercice 1.1.5.

Solution 1.1.9

(1) Traduisons l'hypothèse $F_t \circ F_u = F_{t+u}$:

$$(1) \quad G(t, G(u, x)) = G(t + u, x)$$

d'où en dérivant par rapport à u :

$$(2) \quad \frac{\partial G}{\partial t}(u, x) \frac{\partial G}{\partial x}(t, G(u, x)) = \frac{\partial G}{\partial t}(t + u, x).$$

Si $\frac{\partial G}{\partial t}(u, x) = 0$ alors grâce à cette relation, on a $\frac{\partial G}{\partial t}(t, x) = 0$ pour tout t réel. Donc $G(t, x)$ ne dépend pas de t , ce que l'on note $G(., x) = g(x)$. En reportant dans la première relation :

$$G(t, G(u, x)) = G(t, g(x)) = G(t + u, x) = g(x)$$

ce qui est contraire à l'hypothèse $F_t(x) = G(t, x) \neq x$.

Conclusion : $\frac{\partial G}{\partial t}(u, x)$ ne s'annule jamais et on peut dire que, grâce à la relation (2),

$\frac{\partial G}{\partial x}(t, G(u, x))$ ne s'annule pas.

En dérivant (1) par rapport à x on obtient la relation

$$(3) \quad \frac{\partial G}{\partial x}(u, x) \frac{\partial G}{\partial x}(t, G(u, x)) = \frac{\partial G}{\partial x}(t + u, x).$$

et en faisant le rapport (3) sur (2) (car $\frac{\partial G}{\partial t}(u, x)$ ne s'annule pas), on en déduit que

$$\frac{\partial G(u, x)/\partial x}{\partial G(u, x)/\partial t} = \frac{\partial G(t + u, x)/\partial x}{\partial G(t + u, x)/\partial t}$$

soit $\frac{\partial G(., x)/\partial x}{\partial G(., x)/\partial t}$ est une fonction constante.

(2) En faisant $t = 0$ dans la relation (2) (ou dans (3)), on obtient $\frac{\partial G}{\partial x}(0, G(u, x)) = 1$ d'où

$$\begin{aligned} H(G(u, x)) &= \frac{\partial G(0, x)/\partial x}{\partial G(0, x)/\partial t} = \frac{\partial G(0, G(u, x))/\partial x}{\partial G(0, G(u, x))/\partial t} \\ &= \frac{1}{\partial G(0, G(u, x))/\partial t} \\ &= \frac{1}{\partial G(u, x)/\partial t} \end{aligned}$$

car en dérivant $G(t, G(u, x)) = G(t + u, x)$ par rapport à t et en faisant $t = 0$ on obtient $\frac{\partial G}{\partial t}(0, G(u, x)) = \frac{\partial G}{\partial t}(u, x)$.

(3) On choisit pour φ une primitive de H , φ' ne s'annule pas donc φ est une bijection de I sur $\varphi(I)$. Le calcul des dérivées partielles donne

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi(G(t, x)) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x} \varphi(G(t, x)) = H(x)$$

donc, on a $\varphi(G(t, x)) = t + \varphi(x) + \mu$. Or

$$\begin{aligned}\varphi(G(t, G(u, x))) &= \varphi(G(t + u, x)) = t + u + \varphi(x) + \mu \\ &= t + \varphi(G(u, x)) + \mu = t + u + \varphi(x) + 2\mu\end{aligned}$$

donc $\mu = 0$ et on a

$$(4) \quad \varphi(G(t, x)) = t + \varphi(x).$$

Il suffit de montrer maintenant que φ est bijective de I sur $\mathbb{R}$:

$\varphi'(G(u, x)) = \frac{1}{\partial G(u, x)/\partial t}$ et $G(\mathbb{R} \times I) = J$ est un connexe par arc qui ne contient pas 0 (image continue d'un connexe par arc, cf. *théorème 5.31 page 237*), donc φ est strictement monotone sur J (qui est bien entendu un intervalle). En faisant varier t dans la relation (4), x fixé, on a $\varphi(J) = \mathbb{R}$. Or φ' ne s'annulant pas sur I , φ est strictement monotone, puis $J \subset I$ et $\varphi(J) = \mathbb{R} \subset \varphi(I)$ donc $\varphi(I) = \varphi(J)$ soit $J = I$.

En effet $J \subset I$ et $\mathbb{R} = \varphi(J) \subset \varphi(I) \subset \mathbb{R}$ donc on en déduit que $\varphi(I) = \mathbb{R}$ et comme φ est injective, $I = J$.

On reprend l'égalité (4) et on compose par φ^{-1} pour obtenir la relation demandée.

Solution 1.1.10 On sait que toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthogonale (cf. *corollaire 4.8 page 204*).

(1) Montrons que $N(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$ est une norme sur E :

- Si $N(A) = 0$ alors toutes les valeurs propres de A sont nulles et comme A est diagonalisable alors $A = 0$.
- $N(kA) = |k|N(A)$ (propriété des bornes supérieures).
- Comme $N(A) = \sup_{\|X\|=1} |X^T A X|$ (conséquence du *théorème 4.7 page 204*) alors

$$\begin{aligned}|X^T(A + B)X| &\leq |X^T A X| + |X^T B X| \\ &\leq N(A) + N(B)\end{aligned}$$

en prenant $\|X\| = 1$ et on en déduit l'inégalité triangulaire.

Soit λ la plus petite valeur propre strictement positive de $M \in \Sigma_n^+$, on sait alors que $X^T M X \geq \lambda X^T X$ (conséquence du *théorème 4.7 page 204*). Choisissons H dans E tel que les valeurs propres de H sont dans $]-\lambda, +\lambda[$, l'ensemble des matrices H ainsi définies forment un voisinage ouvert de 0 (en fait, c'est la boule ouverte de centre 0, de rayon λ). Or $X^T(M + H)X > 0$ donc $M + H \in \Sigma_n^+$ ce qui signifie que Σ_n^+ est un ouvert.

(2) On trouve immédiatement $f'(S)(H) = HS + SH$ (en revenant à la définition). Il suffit maintenant de prouver que $f'(S)$ est inversible, i.e. injective vu que l'on est en dimension finie. Il suffit donc de montrer que $HS + SH = 0 \Rightarrow H = 0$.

Soit X un vecteur propre de S , associé à $\lambda > 0$ alors $S(HX) = -\lambda HX$ et comme S n'a que des valeurs propres > 0 , on en déduit que $HX = 0$ et ceci pour tout vecteur propre de S donc $H = 0$ car les vecteurs propres de S engendrent $\mathbb{R}^n$ (on sait en effet que S est diagonalisable).

Montrons maintenant que f est bijective (ce qui achèvera la démonstration) : si $S^2 = T^2$ alors les valeurs propres de S et T sont les mêmes (ce sont les racines carrées de S^2 et T^2). Les sous-espaces propres sont aussi les mêmes donc $S = T$. Ensuite, à $S \in \Sigma_n^+$ s'écrivant $P^{-1}D^2P$ (ce qui est possible, S étant diagonalisable et ayant des valeurs propres > 0) on fait correspondre $S' = P^{-1}DP$, ce qui prouve la surjectivité.

Conclusion : f est bien un difféomorphisme de Σ_n^+ en application du *théorème 9.6 page 311*.

Solution 1.2.1 Pour f , la formule des accroissements finis s'écrit :

$$(1) \quad ye^x = x(\theta ye^{\theta x}) + ye^{\theta x}.$$

- Si $x = 0$ (1) s'écrit $y = y$, tout θ convient ; de même pour $y = 0$.
 - Si $x \cdot y \neq 0$ (1) s'écrit $\theta x + 1 = e^{x(1-\theta)}$: il suffit d'étudier, pour $x \in \mathbb{R}^*$: $\varphi_x(\theta) = \theta x + 1 - e^{x(1-\theta)}$. On distingue les cas $x > 0$ et $x < 0$ et on prouve l'unicité de θ dans chaque cas.
-

Solution 1.2.2

- (1) Soit $y_0 \in E$, on pose $A = E \cap \overline{B}(x, \|x - y_0\|)$ qui est un compact de $\mathbb{R}^2$. La fonction $f(z) = d(x, z)$ est continue, elle atteint son minimum sur A (cf. *théorème 5.22 page 234*). Ceci justifie l'existence de $y \in E$ tel que $d(x, E) = d(x, y)$.
- (2) Si $x \in E$, f passe par un minimum en x , toutes ses dérivées partielles s'annulent (cf. *théorème 9.10 page 312*) et $\text{grad } f(x) = 0$. On a alors la propriété annoncée en prenant la contraposée.
- (3) On a tout d'abord $|d(x + h, E) - d(x, E)| \leq \|h\|$ (propriété classique de la fonction distance à un ensemble). On exploite alors la différentiabilité de f en x :

$$|(\text{grad } f(x)|h) + \|h\|\varepsilon(h)| \leq \|h\|$$

et ceci pour tout h dans un voisinage de 0.

On applique cette propriété à $h = \lambda \text{grad } f$ et en faisant tendre λ vers 0, on obtient $\|\text{grad } f\| \leq 1$.

Soit $x_t = (1 - t)x + ty$, $t \in [0, 1]$. On a $f(x_t) = d(x_t, y) = (1 - t)\|x - y\|$ (si $f(x_t) \leq d(x_t, y)$ alors, avec l'inégalité triangulaire, on montrerait que $f(x) < d(x, y)$, ce qui est impossible par hypothèse).

$\varphi : t \mapsto f(x_t)$ est dérivable comme composée de fonctions différentiables, et en calculant de deux manières $\varphi'(0)$, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \text{grad } f(x) \cdot (y - x) && \text{en dérivant } f(x_t) \\ &= -\|x - y\| && \text{en dérivant } (1 - t)\|x - y\|. \end{aligned}$$

On a alors : $\text{grad } f(x) \cdot u = 1$ où $u = \frac{x - y}{\|x - y\|}$. On déduit de ceci deux choses

- $\|\text{grad } f(x)\| \geq 1$, donc $\text{grad } f(x)$ est un vecteur de norme 1,
- $\text{grad } f(x)$ et u sont deux vecteurs de norme 1 qui ont un produit scalaire égal à 1, ils sont donc égaux i.e. $\text{grad } f(x) = \frac{x - y}{\|x - y\|}$.

Grâce à ce résultat, on peut affirmer que y est unique car $y = x - d(x, E) \cdot \text{grad } f(x)$.

Solution 1.3.1 On pose $b = (t^2, \text{ch } t - 1, e^t - 1)$, $c = (t, \cos t - 1, \text{ch } t - 1)$ et on cherche

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + b)}{f(a + c)}.$$
 Or :

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(e^t - 1) + o(t) \sim t \frac{\partial f}{\partial z}(a) \\ f(a + c) &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial z}(a)(\text{ch } t - 1) + o(t) \sim \frac{t^2}{2} \frac{\partial f}{\partial z}(a) \end{aligned}$$

en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 1 (cf. *corollaire 9.13 page 314*). On a donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + b)}{f(a + c)} = 0.$$

Si $\frac{\partial f}{\partial z}(a) = 0$ on trouve : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+b)}{f(a+c)} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) / \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)$ en appliquant la formule de Taylor à l'ordre 2.

Solution 1.3.2 Soit $(x, y) \in U$, on pose $u = x$, $v = \frac{y}{x}$ et on définit $g(u, v) = f(x, y)$ (l'application $(x, y) \mapsto (u, v)$ est un C^∞ difféomorphisme de U sur U).

g vérifie $u \frac{\partial g}{\partial u} = v$ d'où : $g(u, v) = v \ln u + h(v)$ où h est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Sur U' , le raisonnement est le même d'où $f(x, y) = \frac{y}{x} \ln |x| + h_i\left(\frac{y}{x}\right)$ où les fonctions h_i , $i = 1, 2$ sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ choisies indépendamment selon que (x, y) est dans U ou dans U' .

Remarque : si on avait fait un changement de variable pour passer en polaires, on aurait trouvé

$$f(x, y) = \frac{y}{2x} \ln(x^2 + y^2) + k\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} \ln |x| + \frac{y}{2x} \ln \left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] + k\left(\frac{y}{x}\right)$$

ce qui est bien compatible avec le résultat trouvé précédemment.

Solution 1.3.3

- (1) y se mettra sous la forme : $y(x, t) = A(x+vt) + B(x-vt)$ où A et B sont deux fonctions de classe C^2 . En effet on cherche $y(t, x) = g(p, q)$ où $p = x + vt$, $q = x - vt$. g est de classe C^2 et vérifie $\frac{\partial^2 g}{\partial p \partial q} = 0$ soit $g(p, q) = A(p) + B(q)$ (cf. *question (i) page 315*).

- (2) En exprimant les conditions demandées, on trouve : $\begin{cases} A'(t) - B'(-t) = 0 \\ A(x) + B(x) = y_0(x) \end{cases}$. On

intègre la première condition, $A(t) + B(-t) = \alpha$ et en prenant la valeur en 0 dans la deuxième condition, on obtient $\alpha = 0$. On décompose ensuite A et B en leur partie paire et impaire $A = A_i + A_p$ et $B = B_i + B_p$. Finalement on arrive à $A_p = -B_p$ et $A_i = B_i = \frac{1}{2}y_0(x)$ et pour conclure

$$y = \frac{1}{2}[y_0(x+vt) + y_0(x-vt)] + A_p(x+vt) - A_p(x-vt).$$

Solution 1.3.4 Supposons que g présente un maximum en (x_0, y_0) . On peut écrire

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \varepsilon_1(x - x_0) \text{ et } \psi(y) = \psi(y_0) + \varepsilon_2(y - y_0)$$

où, pour $i = 1, 2$, $\varepsilon_i(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$.

Or, on sait par hypothèse qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $\max(|X|, |Y|) \leq \alpha$, on a

$$g(\varphi(x_0) + X, \psi(y_0) + Y) \leq g(\varphi(x_0), \psi(y_0)).$$

Comme il existe $\eta > 0$ commun tel que $|\varepsilon_1(x - x_0)| \leq \alpha$ et $|\varepsilon_2(y - y_0)| \leq \alpha$ pour $|x - x_0| \leq \eta$ et $|y - y_0| \leq \eta$ alors $g(\varphi(x), \psi(y)) \leq g(\varphi(x_0), \psi(y_0))$ soit $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ce qui signifie que f présente un extremum local en (x_0, y_0) .

Solution 1.3.5 Le seul point critique de f est le point $(1, 1, -1)$ donc c'est en ce point que l'on a la seule possibilité d'avoir un extremum.

Au voisinage de ce point, on écrit

$$\Delta = f(1+h, 1+k, -1+l) - f(1, 1, -1) = kl + hl - hk + hkl$$

et comme la forme quadratique $Q(h, k, l) = hl + kl - kh$ n'est pas définie, f ne présente pas d'extremum sur $\mathbb{R}^3$. En effet,

- si on prend $k = l$ alors $\Delta = l^2 + hl^2 > 0$ si $h > 0$,
- si on prend $k = h = -l > 0$ alors $\Delta = -3l^2 + l^3 < 0$

donc D ne garde pas un signe constant au voisinage de $(1, 1, -1)$.

Solution 1.3.6 Le calcul nous donne

$$f'(A) = 0 \Leftrightarrow A = (-1, 0, 0).$$

En effet

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 1 + (x + z^2)(y^2 + z^2 + 1) = 0 \\ (2) \quad & \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow (x + z^2)xy = 0 \\ (3) \quad & \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow z[1 + x(x + z^2)] = 0 \end{aligned}$$

On prend l'équation (2) : on a $(x + z^2)xy = 0$

- Si $x = 0$ alors (1) $\Rightarrow 1 + z^2(y^2 + z^2 + 1) = 0$ ce qui est impossible.
- Si $x + z^2 = 0$ alors (1) $\Rightarrow 1 = 0$ ce qui est aussi impossible

On a donc $y = 0$ et (1) devient $1 + (x + z^2)(1 + z^2) = 0$ soit $x = -z^2 - \frac{1}{1 + z^2}$. On a donc

$1 + x(x + z^2) = 1 + \left(z^2 + \frac{1}{1 + z^2}\right) \left(\frac{1}{1 + z^2}\right) > 0$ et en reportant dans (3), on obtient $z = 0$ et en revenant à (1), $x = -1$.

En posant $x = -1 + X$, $y = Y$, $z = Z$ et $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ alors

$$f(x, y, z) = -\frac{1}{e} + \frac{1}{e} \left(\frac{X^2}{2} + Y^2 + 2Z^2 \right) + o(r^2)$$

donc, en A , on a un minimum relatif : $f(A) = -\frac{1}{e}$.

A est un minimum global car $f(x, y, z) < 0 \Leftrightarrow x + Z^2 < 0 \Rightarrow x < 0$ et $f(x, y, z) \geq xe^x$; et, en étudiant $x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}^-$ on prouve que $xe^x \geq -\frac{1}{e}$ c.q.f.d.

Solution 1.3.7 La fonction $f : M \mapsto AM + BM - OM$ est continue sur le plan et différentiable en dehors des points 0 , A et B car, quel que soit le point Ω du plan, la fonction $\varphi : M \mapsto \Omega M$ est différentiable sur le plan privé de Ω .

En effet,

- soit on prend un repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $\varphi(M) = \sqrt{x^2 + y^2}$ qui admet des dérivées partielles continues et on utilise le théorème fondamental (cf. *théorème 9.1 page 309*),
- soit on écrit que $\Omega M = \sqrt{\Omega M^2}$ et on utilise la différentiabilité des applications composées (cf. *théorème 9.4 page 311*).

Comme $\text{grad } \varphi(M) = \frac{\overrightarrow{\Omega M}}{\Omega M}$ on a

$$\text{grad } f(M) = \frac{\overrightarrow{AM}}{AM} + \frac{\overrightarrow{BM}}{BM} - \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}.$$

Soit M_0 un point quelconque du plan, montrons que $F = \{M \mid f(M) \leq f(M_0)\}$ est un ensemble compact du plan :

- Comme f est continue, F est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue (cf. *remarque 5.1.15 page 230*).
- Vu que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM})$ alors, grâce à l'inégalité triangulaire, on a $f(M) \geq \frac{1}{2}(AM + BM)$ et comme l'ensemble $E_k = \{M \mid AM + BM \leq k\}$ est l'intérieur d'une ellipse, $F \subset E_{2f(M_0)}$ est borné.

Conclusion : F étant fermé borné est compact (cf. *corollaire 5.26 page 236*).

Comme f est continue sur ce compact, elle y atteint son minimum qui sera en fait le minimum de f sur le plan (cf. *théorème 5.22 page 234*).

On cherche pour quels points $\text{grad } f(M) = 0$ i.e. $\frac{\overrightarrow{AM}}{AM} + \frac{\overrightarrow{BM}}{BM} - \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} = \vec{0}$. Les seuls points vérifiant ceci sont les deux points tel que les triangles OAM et OBM soient des demi-triangles équilatéraux de hauteurs AO et BO (une somme de trois vecteurs normés du plan ne peut être nulle que si les extrémités de ces vecteurs forment un triangle équilatéral). Or, en ces points, on a $f(M) = \sqrt{3}a > a = f(A) = f(B)$ donc, le minimum global est obtenu en A et B .

Solution 1.3.8

(1) Le calcul direct de l'expression de f nous donne :

- si $|x| \geq 1, |y| \geq 1$: $f(x, y) = 2 \left| xy + \frac{1}{3} \right|$,
- si $|x| \leq 1, |y| \geq 1$: $f(x, y) = \left| x^2 y - \frac{x^3}{3} + x + y \right|$,
- si $|x| \leq 1, |y| \leq 1$: $f(x, y) = \frac{1}{3} |x - y|^3 + 2xy + \frac{2}{3}$,

(on remarque que $f(x, y) = f(y, x)$).

La continuité de f peut se traiter avec le théorème de continuité sous le signe intégral (cf. *théorème 6.24 page 267*).

Pour la différentiabilité, on va faire un changement de variables :

$$u = \frac{x + y}{2}, v = \frac{x - y}{2}$$

$$\text{d'où } f(x, y) = g(u, v) = \int_{-1-u}^{1-u} |t^2 - v^2| dt.$$

$\frac{\partial g}{\partial u} = |(1+u)^2 - v^2| - |(1-u)^2 - v^2|$ est continue, il reste à étudier l'autre dérivée partielle :

soit $O = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v \neq 0\}$, pour $(u, v) \in O$ à l'aide d'un changement de variable on peut écrire :

$$g(u, v) = v^3 \int_{(-1-u)/v}^{(1-u)/v} |t^2 - 1| dt = v^3 \left[h\left(\frac{1-u}{v}\right) - h\left(\frac{-1-u}{v}\right) \right]$$

où $h(x) = \int_0^x |t^2 - 1| dt$. On a alors

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 3v^2 \left[h\left(\frac{1-u}{v}\right) - h\left(\frac{-1-u}{v}\right) \right] - v \left[(1-u)h'\left(\frac{1-u}{v}\right) + (1+u)h'\left(\frac{-1-u}{v}\right) \right]$$

qui est une fonction continue de (u, v) .

Ceci permet d'affirmer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur O (cf. *théorème 9.1 page 309*).

Étudions enfin la différentiabilité de g en $(u, 0)$:

$$\left| \frac{1}{h} [g(u, h) - g(u, 0)] \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{-1-u}^{1-u} [|t^2 - h^2| - t^2] dt \right| \leq 2|h|$$

donc $\frac{\partial g}{\partial v}(u, 0) = 0$.

Soit $\Delta(h, k) = g(u+h, k) - g(u, 0) - h \frac{\partial g}{\partial u}(u, 0) - k \frac{\partial g}{\partial v}(u, 0)$ alors

$$\Delta_{h,k} = \int_{-1-u-h}^{1-u-h} [|t^2 - k^2| - t^2] dt + \int_{-1-u-h}^{1-u-h} t^2 dt - \int_{-1-u}^{1-u} t^2 dt - 4hu.$$

En prenant la norme du sup, on a $|\Delta(h, k)| \leq 2\|(h, k)\|^2 + 2(1+u^2)\|(h, k)\|^2$ ce qui permet de conclure que g est différentiable en $(u, 0)$ donc sur $\mathbb{R}^2$.

Finalement, grâce au théorème de changement de variables (cf. *théorème 9.2 page 309*), on peut en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$, différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

- (2) Comme f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$, ses extrema sont à chercher parmi les points critiques i.e. les points $(0, 0)$, $\pm(1/2, -1/2)$.

- En $(0, 0)$, $f(x, y) = \frac{2}{3} + 2xy + o(x^2 + y^2)$ donc $r = t = 0$ et $s = 2$, f ne présente pas d'extremum (cf. *théorème 9.14 page 315*).
- En $(1/2, -1/2)$, en posant $x = 1/2 + h$, $y = -1/2 + k$, on a $f(x, y) = \frac{1}{2} + h^2 + k^2 + o(h^2 + k^2)$ soit $r = t = 2$, $s = 0$, et f présente un minimum relatif (ainsi qu'en $(-1/2, 1/2)$ cas symétrique) (cf. *théorème 9.14 page 315*).

Remarque : la formule de Taylor permet de trouver les dérivées partielles d'une fonction par identification.

Lorsque (x, y) tend vers l'infini, f tend vers l'infini, ce minimum est donc global.

Solution 1.3.9

- (1) On a $u = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ et $v = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$ or u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U donc $\varphi(x, y) = (u, v)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Ces relations peuvent s'inverser en

$$x = \frac{v^2 - u^2}{4a} \text{ et } y = \frac{1}{4a} \sqrt{(u+2a+v)(u+2a-v)(v+u-2a)(v-u+2a)}.$$

En effet, la formule donnant x est immédiate puis, en remarquant que $x - a = \frac{v^2 - u^2 - 4a^2}{4a}$ on a

$$\begin{aligned} y^2 &= [u - (x - a)][u + (x - a)] \\ &= \frac{1}{(4a)^2} [(u+2a)^2 - v^2][v^2 - (u-2a)^2] \end{aligned}$$

qui donne la deuxième formule si l'on tient compte de l'hypothèse $y > 0$.

On écrit $\varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*) = \Omega$ où $\Omega = \{(u, v) \in]0, +\infty[^2 \mid u+v > 2a, |u-v| < 2a\}$. En effet, $2a$, u , v sont les longueurs des côtés d'un vrai triangle ssi $u+v > 2a$ et $|u-v| < 2a$. Ω est un ouvert et φ ainsi définie est une bijection (vu que l'on effectivement déterminé

φ^{-1} .

Le jacobien de φ vaut $-\frac{2ay}{uv}$, il ne s'annule jamais, on peut donc affirmer que φ est un C^1 -difféomorphisme (cf. *théorème 9.6 page 311*).

(2) Après calculs, on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{(x-a)^2}{u^2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial u^2} + \frac{2(x^2-a^2)}{uv} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{(x+a)^2}{v^2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial v^2} + \frac{y^2}{u^3} \frac{\partial \hat{f}}{\partial u} + \frac{y^2}{v^3} \frac{\partial \hat{f}}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{u^2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial u^2} + \frac{2y^2}{uv} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{y^2}{v^2} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial v^2} + \frac{(x-a)^2}{u^3} \frac{\partial \hat{f}}{\partial u} + \frac{(x+a)^2}{v^3} \frac{\partial \hat{f}}{\partial v}\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\Delta f = \Delta \hat{f} + \frac{u^2 + v^2 - 4a^2}{uv} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial u \partial v} + \frac{1}{u} \frac{\partial \hat{f}}{\partial u} + \frac{1}{v} \frac{\partial \hat{f}}{\partial v}.$$

(3) Si $\hat{f}(u, v) = A(u) + B(v)$ alors on obtient l'équation différentielle

$$A''(u) + \frac{1}{u}A'(u) = -[B''(v) + \frac{1}{v}B'(v)]$$

d'où l'existence d'un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} A''(u) + \frac{1}{u}A'(u) = \alpha \\ B''(v) + \frac{1}{v}B'(v) = -\alpha \end{cases}$ qui s'intègre en $A(u) =$

$\alpha \frac{u^2}{4} + \beta \ln |u| + \gamma$ et $B(v) = \alpha \frac{v^2}{4} + \beta' \ln |v| + \gamma'$ ce qui donne finalement

$$f(x, y) = \alpha ax + \beta \ln[(x-a)^2 + y^2] + \beta' \ln[(x+a)^2 + y^2] + \gamma + \gamma'.$$

(C'est le potentiel produit par deux fils électriques parallèles).

Solution 1.3.10

(1) Si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$ alors, en dérivant cette relation par rapport à λ et en prenant $\lambda = 1$ on prouve que f est homogène de degré α .

Réciproquement : si f est homogène de degré α , alors $\varphi(\lambda) = f(\lambda x, \lambda y)$ vérifie l'équation différentielle $\lambda \varphi'(\lambda) = \alpha \varphi(\lambda)$ donc $\varphi(\lambda) = \varphi(1)\lambda^\alpha$ ce qui termine la démonstration.

(2) On trouve immédiatement $E^2 f = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + Ef$.

(3) Il faut résoudre l'équation $E^2 f - Ef - f = 0$.

Soit α et β les racines de l'équation $X^2 - X - 1 = 0$ alors, avec $g = Ef - \alpha f$, l'équation à résoudre s'écrit :

$$Eg = \beta g.$$

g est donc homogène de degré β .

Soit $g_0 = \frac{1}{\beta - \alpha}g$, on a $Eg_0 - \alpha g_0 = g$ donc $E(f - g_0) = \alpha(f - g_0)$ donc $f - g_0$ est une fonction homogène de degré α .

Conclusion : f est la somme d'une fonction homogène de degré α et d'une fonction homogène de degré β .

Solution 1.3.11 On prend un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ tel que les cercles soient centrés sur l'axe Ox .

$$(C) \text{ a pour équations : } \begin{cases} x = R(1 + \cos \theta) \\ y = R \sin \theta \end{cases} \quad \text{et } (C') : \begin{cases} x = -R'(1 - \cos \varphi) \\ y = R' \sin \varphi \end{cases}.$$

En utilisant la *question (i) page 27*, on a :

$$\text{Aire } (OM(\theta)M'(\varphi)) = \frac{1}{2}|f(\theta, \varphi)|$$

où $f(\theta, \varphi) = RR'(\sin \theta + \sin \varphi + \sin(\varphi - \theta))$. La fonction $\frac{1}{2}|f(\theta, \varphi)|$ est continue sur le compact $[-\pi, +\pi]^2$ et atteint son maximum ; on remarque de plus que f est 2π -périodique par rapport à θ et φ donc le maximum de f sur $[-\pi, \pi]^2$ est aussi le maximum sur $\mathbb{R}^2$. Si f atteint son maximum en un point alors sa différentielle est nulle (cf. *théorème 9.10 page 312*).

$$\text{grad } f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \pm(\varphi - \theta)[2\pi] \\ \cos \varphi + \cos(\varphi - \theta) = 0 \end{cases}.$$

- $\theta = \theta - \varphi$ pas de solution,
- $\theta = \varphi - \theta \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = \pi + \theta & \text{impossible} \\ 2\theta = \pi - \theta & \Rightarrow \theta = \pm\pi/3 \end{cases}$ le maximum est atteint pour $(\theta, \varphi) \in$

$$\{(\pi/3, 2\pi/3), (-\pi/3, -2\pi/3)\} \text{ et dans ce cas : } \frac{1}{2}|f(\theta, \varphi)| = \frac{3\sqrt{3}}{4}RR'.$$

Solution 1.3.12

- (1) On peut montrer dans un premier temps que si Q est une forme quadratique et L une forme linéaire telles que $Q(x) + L(x) \geq 0$ pour tout x alors $L = 0$ et $Q \geq 0$ (immédiat, prendre $(Q + L)(\lambda x)$ et considérer le polynôme du second degré en λ).

Si f présente en extremum en $A(a, b, c)$, $V = (x, y, z)$ alors

$$\begin{aligned} f(A + V) - f(A) &= \left(1 + \frac{\lambda}{4}\right)x^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{10}\right)y^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{25}\right)z^2 + \\ &\quad \left[2a\left(1 + \frac{\lambda}{4}\right) + \mu\right]x + \left[2b\left(1 + \frac{\lambda}{10}\right) + \mu\right]y + \left[2c\left(1 + \frac{\lambda}{25}\right) - \mu\right]z \end{aligned}$$

garde un signe constant. D'où :

- si A est un minimum, $\lambda \geq -4$ et (1) $\begin{cases} 2a\left(1 + \frac{\lambda}{4}\right) + \mu = 0 \\ 2b\left(1 + \frac{\lambda}{10}\right) + \mu = 0 \\ 2c\left(1 + \frac{\lambda}{25}\right) - \mu = 0 \end{cases}$,
- si A est un maximum, $\lambda \leq -25$ et (1).

Réciproquement, si $\lambda > -4$, f est minimum au point $A\left(-\frac{2\mu}{4+\lambda}, -\frac{5\mu}{10+\lambda}, \frac{25\mu}{2(25+\lambda)}\right)$,

- si $\lambda = -4$, $\mu \neq 0$, f n'a pas d'extremum,
- si $\lambda = -4$, $\mu = 0$, f est minimum en tout point $(a, 0, 0)$,
- si $-25 < \lambda < -4$, f n'a pas d'extremum,
- si $\lambda = -25$, $\mu \neq 0$, f n'a pas d'extremum,
- si $\lambda = -25$, $\mu = 0$, f est maximum en tout point $(0, 0, c)$,
- si $\lambda < -25$, f est maximum au point A .

- (2) E est un ellipsoïde de centre O , F un plan passant par O donc $E \cap F$ est une ellipse de centre O . Sur $E \cap F$, $f(V) = \|V\|^2$, les extrema de f sont les sommets de cette ellipse.

On pose
$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{6}}(x + y + 2z) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ Z = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y - z) \end{cases}$$
 et dans la nouvelle base ainsi mise en évidence, l'ellipse a pour équations

$$\frac{17}{200}X^2 + \frac{\sqrt{3}}{20}XY + \frac{7}{40}Y^2 = 1, \quad Z = 0.$$

La matrice de la forme quadratique est

$$A = \frac{1}{200} \begin{pmatrix} 17 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 35 \end{pmatrix}$$

qui admet les valeurs propres : $\frac{13 \pm \sqrt{39}}{100}$ d'où les extrema cherchés :

$$d = \frac{100}{13 \pm \sqrt{39}}.$$

Solution 1.3.13

- (1) Par le calcul (utiliser un programme de calcul formel par exemple) on trouve

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\sin x (\operatorname{ch}^2 y + \operatorname{ch} y \cos x - 2)}{(\cos x - \operatorname{ch} y)^3}$$

et $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, y)$ soit $\Delta P(x, y) = 0$.

Remarque : comme $P(x, y) = \Im \left(\frac{2}{1 - e^{iz}} \right)$ où $z = x + iy$. C'est une fonction harmonique, son laplacien est nul (sans calcul).

- (2) On trouve $I = 2 \sin x \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t - \cos x)^2 + \sin^2 x}$ en posant $t = e^y$. D'où $I = 2(\pi - x)$ pour $x \in]0, 2\pi[$.

On peut aussi dériver sous le signe intégral en écrivant $I = I(x)$ pour $x \in [a, 2\pi - a]$ pour $a \in]0, \pi[$. On a

- $|P(x, y)| \leq \frac{1}{\operatorname{ch} y - \cos a}$ intégrable sur $\mathbb{R}$,
- $\left| \frac{\partial P}{\partial x}(x, y) \right| = \left| \frac{\operatorname{ch} y \cos x - 1}{(\operatorname{ch} y - \cos x)^2} \right| \leq \frac{\operatorname{ch} y + 1}{(\operatorname{ch} y - \cos a)^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$,
- $\left| \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, y) \right| = \left| \frac{\sin x (\operatorname{ch}^2 y + \operatorname{ch} y \cos x - 2)}{(\cos x - \operatorname{ch} y)^3} \right| \leq \frac{\operatorname{ch}^2 y + \operatorname{ch} y}{(\operatorname{ch} y - \cos a)^3}$ intégrable sur $\mathbb{R}$

d'où, en utilisant le théorème de Lebesgue de dérivabilité sous le signe intégral, les fonctions qui interviennent étant bien entendu continues pour $x \in]0, 2\pi[$, $y \in \mathbb{R}$, (cf.

théorème 6.26 page 268 et corollaire 6.27 page 268) alors, en utilisant le 1.,

$$\begin{aligned} I''(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, y) dy \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x, y) dy \\ &= - \left[\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right]_{y=-\infty}^{y=+\infty} = 0 \end{aligned}$$

car $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 0$. Cette relation est valable pour tout $x \in [a, 2\pi - a]$ donc sur $]0, 2\pi[$. On remarque ensuite que $I(\pi) = 0$ (immédiat) et $I(\pi/2) = \pi$.

(3) Pour t tendant vers $+\infty$, on a

$$|P(x, t - y)| \sim \frac{|\sin x|}{\text{ch}(t - y)} \sim \frac{|\sin x|e^y}{2}e^{-t}$$

donc $t \mapsto P(x, y - t)\varphi(t)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Il en est de même au voisinage de $-\infty$.

Ceci permet de conclure à l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $t \mapsto P(x, y - t)\varphi(t)$ et donc $F(x, y)$ est bien définie.

(4) La fonction $(x, y) \mapsto P(x, y - t)\varphi(t)$ est une fonction continue sur $]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$. Pour $x \in [a, 2\pi - a]$, $y \in [-b, b]$, on écrit

$$F(x, y) = \underbrace{\int_{|t| \leq b+2} P(x, t - y)\varphi(t) dt}_{=F_1(x, y)} + \underbrace{\int_{|t| \geq b+2} P(x, t - y)\varphi(t) dt}_{=F_2(x, y)}.$$

$F_1(x, y)$ est continue sur $[a, 2\pi - a] \times [-b, b]$ en application du théorème 6.24 page 267. Pour F_2 on reprend la majoration du 2. ce qui donne

$$|P(x, y - t)| \leq \frac{1}{\text{ch}(y - t) - \cos a} = \frac{1}{2[\text{sh}^2(y - t)/2 + \sin^2 a/2]} \leq \frac{1}{2 \text{sh}^2(y - t)/2}.$$

Or $|\text{sh } u| = \left| \frac{e^u - e^{-u}}{2} \right| \geq \frac{e^{|u|}}{4}$ car $|u| \geq 1$ donc

$$\begin{aligned} |P(x, y - t)\varphi(t)| &\leq \frac{8}{e^{|y-t|}}\varphi(t) \\ &\leq 8e^b e^{-|t|} |\varphi(t)| \end{aligned} \quad (1)$$

en remarquant que $|y - t| \geq |t| - b$ pour $|t| \geq b + 1$ et $|y| \leq b$. La majoration (1) nous donne $|P(x, y - t)\varphi(t)| \leq 8e^b e^{-|t|}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce qui permet de conclure à la continuité de F_2 en exploitant le théorème de continuité sous le signe intégral (cf. théorème 6.24 page 267).

F est donc continue sur $[a, 2\pi - a] \times [-b, b]$ pour tout $a \in]0, \pi[$ et tout $b > 0$ donc F est continue sur $]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$.

On montre de même que F_1 est de classe $\mathcal{C}^2$. Pour F_2 , on fait de même avec les dérivées partielles de P par rapport à x et en appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégral et son corollaire (cf. théorème 6.26 page 268 et corollaire 6.27 page 268).

En effet, on a les majorations

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial P}{\partial x}(x, y - t)\varphi(t) \right| &\leq \frac{\text{ch}(y - t) + 1}{(\text{ch}(y - t) - 1)^2} |\varphi(t)| \\ &\leq (e^{|y-t|} + 1)64e^{-2|y-t|} |\varphi(t)| \leq 128e^{-|y-t|} |\varphi(t)| \end{aligned}$$

en majorant 1 par $e^{|y-t|}$

$$\begin{aligned} &\leq 128e^b e^{-|t|} |\varphi(t)| \\ \left| \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, y-t) \varphi(t) \right| &\leq \frac{\text{ch}^2(y-t) + \text{ch}(y-t)}{(\text{ch}(y-t) - 1)^3} |\varphi(t)| \\ &\leq 2^{10} e^b |\varphi(t)| e^{-|t|} \end{aligned}$$

et on fait de même avec les autres dérivées partielles...

Les dérivées partielles de F_1 et F_2 jusqu'à l'ordre 2 sont ainsi continues, on en déduit qu'il en est de même pour F et ce sur $]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$.

F est bien de classe $\mathcal{C}^2$ car ses dérivées partielles sont continues (cf. *définition 9.1.10 page 313*).

On aura alors

$$\Delta F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta P(x, y-t) \varphi(t) dt = 0.$$

Solution 1.3.14

(1) Soit $\varphi : t \in [0, 1] \mapsto J(u + t(v-u))$, φ est $\mathcal{C}^1$ et $\varphi'(t) = J'(u + t(v-u))(v-u)$. Or

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt \geq \int_0^1 [t\alpha \|v-u\|^2 + J'(u)(v-u)] dt$$

en appliquant l'inégalité (1). En effet, on a écrit

$$\begin{aligned} J'(u + t(v-u))(v-u) &= [J'(u + t(v-u)) - J'(u)](v-u) + J'(u)(v-u) \\ &\geq \frac{\alpha}{t} \|t(v-u)\|^2 + J'(u)(v-u). \end{aligned}$$

On obtient alors directement l'inégalité demandée.

(2) On a donc

$$J(u) \geq J(0) + \frac{\alpha}{2} \|v\|^2 - \|J'(0)\| \cdot \|v\| \rightarrow +\infty \text{ quand } \|v\| \rightarrow +\infty$$

donc $\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty$.

Soit $F = \{v \in K \mid J(v) \leq J(v_0)\}$. F est un compact (fermé borné) donc J atteint son minimum en un point $u_0 \in F$ et ceci est bien entendu le minimum de J sur K .

(3) • ($\Leftarrow$) : en utilisant l'inégalité 2, on a :

$$\begin{aligned} J(u) &\geq J(u_0) + \frac{\alpha}{2} \|u - u_0\|^2 + J'(u_0)(u - u_0) \\ &\geq J(u_0) + \frac{\alpha}{2} \|u - u_0\|^2 \geq J(u_0) \end{aligned}$$

donc u_0 réalise bien le minimum de J sur K .

• ($\Rightarrow$) : comme $J_K(u_0 + t(u - u_0)) - J_K(u_0) \geq 0$ pour $t \in [0, 1]$ (K est un convexe) alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{J_K(u_0 + t(u - u_0)) - J_K(u_0)}{t} = J'(u_0)(u - u_0) \geq 0$$

c.q.f.d.

Solution 1.3.15 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2(y_0 - x_0)$: il suffit donc que $x_0 \neq y_0$ et $f(x_0, y_0) = 0$ (cf. remarque 5.2.2 page 95).

On a ensuite

$$\varphi'(x) = \frac{x+y}{x-y}, \quad \varphi''(x) = 2 \frac{x^2+y^2}{(x-y)^3}$$

$$\text{d'où } \frac{(1+\varphi'^2)^3}{\varphi''^2} = 2(x^2+y^2).$$

L'interprétation est immédiate si on passe en polaires : $r = \pm e^\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Solution 1.4.1 La surface S est un demi-cône d'équation cartésienne $z^2 = x^2 + y^2$. Soit $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$. Le vecteur normal au point $M(t, \theta)$ est donné par $\vec{n} = \vec{u} - \vec{k}$.

Cherchons les courbes données par une paramétrisation t fonction de θ telles que le vecteur $\vec{n}$ appartienne au plan vectoriel $\text{Vect} \left(\frac{d\vec{M}}{d\theta}, \frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2} \right)$.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{d\theta} &= e^{-t} \vec{u}' - t' e^{-t} (\vec{u} + \vec{k}), \\ \frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2} &= -e^{-t} \vec{v} - 2t' e^{-t} \vec{v} + (t'^2 - t'') e^{-t} (\vec{u} + \vec{k}). \end{aligned}$$

En écrivant que le produit mixte $\left(\vec{n}, \frac{d\vec{M}}{d\theta}, \frac{d^2\vec{M}}{d\theta^2} \right)$ est nul, on obtient

$$\frac{2t''}{1+2t'^2} = -1$$

$$\text{d'où } t' = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan \frac{\theta_0 - \theta}{\sqrt{2}} \text{ où } \theta \in [\theta_0 + \sqrt{2}, \theta_0 - \pi/\sqrt{2}] \cup [\theta_0 + \pi/\sqrt{2}, \theta_0 - \sqrt{2}].$$

On obtient finalement $t = t_0 + \ln \cos \left(\frac{\theta_0 - \theta}{\sqrt{2}} \right)$. Les courbes solutions se déduisent toutes par similitude d'axe Oz de la courbe paramétrée correspondant à $t_0 = \theta_0 = 0$.

Solution 1.4.2 $((x^2+z^2+3)-4x)((x^2+z^2+3)+4x) = (x^2+z^2+3)^2 - 16x^2 = 0$ est l'équation de la méridienne de $\mathcal{T}$ et, en cylindriques, $\mathcal{T}$ a pour équation : $(r^2+z^2+3)^2 - 16r^2 = 0$.

(1) Par symétrie cylindrique, plaçons nous dans le plan xOz : $M_0(3/2, 0, \sqrt{3}/2)$ et son symétrique par rapport à xOy sont les points de contacts : $\Pi_{M_0} : z = \frac{x}{\sqrt{3}}$ et $\Pi_{M'_0} :$

$$z = -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

(2) On obtient comme équation : $z = \frac{x}{\sqrt{3}}, (4\frac{x^2}{3} + y^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2) = 0$; sur xOy , on

a la réunion de 2 ellipses : $\frac{4x^2}{3} + y^2 + 2\epsilon y - 3 = 0$. En fait Γ est la réunion de 2 cercles :

en effet dans le plan $x = z\sqrt{3}$ on a $\frac{4x^2}{3} = x^2 + z^2$ donc Γ est l'intersection des 2 sphères $x^2 + y^2 + 2\epsilon y + z^2 - 3 = 0$ avec le plan $x = z\sqrt{3}$.

Solution 1.4.3 Soit $f(M) = f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$, le plan tangent à E en M_i est orthogonal au vecteur

$$\text{grad } f(M_i) = \vec{n}_i = \frac{x_i}{a^2} \vec{i} + \frac{y_i}{b^2} \vec{j} + \frac{z_i}{c^2} \vec{k}$$

(cf. *théorème 9.16 page 318*).

Le plan $OM_j M_k$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}_i = \overrightarrow{OM_j} \wedge \overrightarrow{OM_k}$, la condition s'écrit donc :

$$\exists \lambda_i \text{ tel que } \vec{u}_i = \lambda_i \vec{n}_i.$$

Le volume du tétraèdre est donné par (cf. *question (ii) page 27*)

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}) \cdot \overrightarrow{OM_3}| = \frac{1}{6} |\lambda_3| \cdot |\vec{n}_3 \cdot \overrightarrow{OM_3}| = \frac{|\lambda_3|}{6}$$

car $\vec{n}_3 \cdot \overrightarrow{OM_3} = \frac{x_3^2}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 1$. Par raison de symétrie, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 6V$.

Soit g tel que $\vec{n}_i = g(\overrightarrow{OM_i})$ alors, avec les produits mixtes,

$$\begin{aligned} (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) &= (\overrightarrow{OM_2} \wedge \overrightarrow{OM_3}, \overrightarrow{OM_3} \wedge \overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{OM_2}) \\ &= (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, \overrightarrow{OM_3})^2 = (6V)^2 \end{aligned}$$

cf. *question (ii) page 27*

$$\begin{aligned} &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) \\ &= \lambda_1^3 \det g \cdot 6V \end{aligned}$$

car $\det(g(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)) = \det g \det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (cf. *proposition 8.5.13 page 158*).

Comme $\det g = \frac{1}{a^2 b^2 c^2}$ on en déduit que $V = \frac{abc}{6}$ et donc V est bien indépendant du choix des points M_i .

Remarque : on peut aussi se ramener par affinités au cas d'une sphère, le problème se traite alors de manière triviale ! On peut prendre un repère orthonormé dans lequel $M_1 = (a, 0, 0)$, $M_2 = (0, a, 0)$, $M_3 = (0, 0, a)$.

Solution 1.4.4 S est un paraboloïde elliptique (cf. *page 209*).

Soit P un plan qui coupe S selon un cercle, on peut s'arranger pour que dans un nouveau repère orthonormé, obtenu en changeant la base mais pas l'origine, l'équation de P s'écrit : $Z = h$. L'équation de S qui se met sous la forme $(x^2 + y^2 + z^2) + (y - z + 1)(y + z - 1) + 1 = 0$ va s'écire :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + \underbrace{(aX + bY + cZ + 1)}_{=y-z} \underbrace{(a'X + b'Y + c'Z - 1)}_{=y+z} + 1 = 0$$

en effet, la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2$ est invariante par changement de base orthonormée et on ne touche qu'aux formes linéaires.

L'intersection avec P s'écrit

$$\begin{cases} Z = h \\ X^2 + Y^2 + Z^2 + (aX + bY + ch + 1)(a'X + b'Y + c'h - 1) + 1 + h^2 = 0 \end{cases}$$

et pour que ce soit un cercle, il est nécessaire que $X^2 + Y^2 + (aX + bY)(a'X + b'Y) = \lambda(X^2 + Y^2)$ i.e. $\lambda = 1$ et $aX + bY = 0$ ou $a'X + b'Y = 0$ et donc l'une des formes linéaires $y - z$ ou $y + z$ doit être constante.

Compte tenu de la symétrie de S par rapport au plan xOz , il suffit d'étudier l'intersection de S avec les plans $P_\alpha : y + z = \alpha$.

En projection sur xOy (obtenue en éliminant z entre les équations) on obtient : $x^2 + 2y^2 + 2y -$

$2\alpha = 0$ et pour que cette intersection soit non vide, il faut et il suffit que $\alpha > -\frac{1}{4}$, le centre a alors pour coordonnées : $O_\alpha(0, -1/2, \alpha + 1/2)$ qui décrit une demi-droite. On rajoute à cet ensemble l'ensemble symétrique par rapport à xOz .

Solution 2.1.1 Sur Γ : $y^2 + z^2 = 2ay - x^2$ or $\int_\Gamma x^2 dx = 0$ car Γ est une courbe fermée et $x^2 dx = \frac{1}{3} dx^3$ (cf. *remarque 9.2.4 (ii) page 321*), donc

$$\int_\Gamma (y^2 + z^2) dx = 2a \int_\Gamma y dx = 2a \int_0^{2\pi} b(1 + \sin \theta) d(b \cos \theta) = -2\pi ab^2$$

Solution 2.1.2 $y^2 dy = \frac{1}{3} dy^3$ et $xy dx + \frac{x^2}{2} dy = \frac{1}{2} d(x^2 y)$ donc

$$\int_\gamma y^2 dy = 0 \text{ et } \int_\gamma xy dx + \frac{x^2}{2} dy = 0$$

(cf. *remarque 9.2.4 (ii) page 321*) d'où

$$\begin{aligned} \int_\gamma xy dx + (x^2 + y^2) dy &= \frac{1}{2} \int_\gamma x^2 dy \\ &= R \int_\gamma x dy = R \underbrace{\pi R^2}_{\text{aire du disque}}. \end{aligned}$$

Avec $x = R(1 + \cos \theta)$, $y = R \sin \theta$ on trouve : $\int_\gamma xy dx + (x^2 + y^2) dy = \pi R^3$ (rien de surprenant).

Solution 2.1.3

(1) On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= 1 + z^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + 2z \frac{\partial z}{\partial y} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= -1 + z^2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2z \frac{\partial z}{\partial x} \frac{x}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

et donc la C.N.S. va s'écrire

$$z \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right) = -r^2.$$

(2) En polaires, $z = f(x, y) = g(r, \theta)$ donne $z^2 = -r^2 + h(\theta)$.

(3) On cherche U primitive de ω .

Or $\frac{x^2}{x^2 + y^2} = \cos^2 \theta = h(\theta)$, on écrit ensuite $P(x, y) = \frac{4x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial U}{\partial x}$ d'où

$$U(x, y) = -2 \frac{xy}{x^2 + y^2} - 2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} + k(y)$$

(pour $x \neq 0$).

$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) \Rightarrow k' = 0$ d'où, à une constante additive près :

$$U(x, y) = -2 \frac{xy}{x^2 + y^2} - 2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}.$$

Remarque : on peut donner une expression valable de U pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}$ qui est la suivante :

$$U(x, y) = -2 \frac{xy}{x^2 + y^2} - 4 \operatorname{Arctan} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

(on s'est inspiré de la formule $\operatorname{Arg} u = 2 \operatorname{Arctan} \frac{y}{1+x}$ utilisée pour démontrer le *théorème 6.39 page 279*).

On pouvait aussi passer en polaires, on obtenait alors

$$P(x, y) = \frac{4}{r} \cos^2 \theta \sin \theta, \quad Q(x, y) = \frac{4}{r} \cos^3 \theta$$

puis

$$\frac{\partial U}{\partial r} = P \cos \theta + Q \sin \theta = 0 \text{ et } \frac{\partial U}{\partial \theta} = -2(\cos 2\theta + 1)$$

d'où $U = -2(\theta + \sin \theta \cos \theta)$.
