CHAPITRE 3

Réduction des endomorphismes

Dans ce chapitre, le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ qui servira de référence.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on cherche une base de E ou une décomposition de E en somme directe $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ avec $f(E_i) \subset E_i$ telle que les $f_{||E_i}$ soient simples, par exemple $\operatorname{mat}(f_{||E_i}) = \lambda_i I_{n_i}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$.

3.1 Sous-espaces stables, polynômes d'un endomorphisme

3.1.1 Sous-espaces stables

Définition 3.1.1. ***Sous-espace stable par un endomorphisme***
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u ssi$_{déf}$ $u(F) \subset F$ (on dit aussi que u stabilise F).

***Remarque* 3.1.1.** *On peut alors définir un endomorphisme de F par $u_{||F}$ que l'on appelle endomorphisme induit par u sur F.*

Proposition 3.1.1. *Si u et v sont deux endomorphismes de $\mathcal{L}(E)$ qui commutent alors $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.*

Dém :

- Soit $y \in \operatorname{Im} u$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On obtient

$$v(y) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u[v(x)] \in \operatorname{Im} u$$

donc $\operatorname{Im} u$ est stable par v.

- Si $x \in \operatorname{Ker} u$ alors $u(x) = 0$ donc $v \circ u(x) = u \circ v(x) = 0$ donc $v(x) \in \operatorname{Ker} u$ ■

PROPOSITION 3.1.2. *Si E est de dimension finie alors F est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ ssi, pour toute base de E adaptée à F, la matrice de u s'écrit* $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Dém : Par double implication :

- Si F est stable par u et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base adaptée à F ($(e_1, \dots, e_p)$ étant une base de F) alors, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $u(e_j) \in F$ par hypothèse soit $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_j$ (les a_{ij} sont nuls pour $i \geqslant p+1$). Ceci se traduit matriciellement par $M(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} & a_{1p+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} & a_{pp+1} & \dots & a_{pn} \\ & & & a_{p+1p+1} & \dots & a_{p+1n} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{np+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ce qui est bien la forme annoncée.
- Réciproque : on reprend l'écriture de la matrice de u ci-dessus, il est immédiat que $u(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = F$ donc, par linéarité, $u(x) \in F$ pour tout vecteur $x \in F$ ■

***Remarque* 3.1.2.** *On a vu que* $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \det D$ *si A et D sont des matrices carrées (cf. cours de première année en 8.5.4.). Ceci justifie partiellement l'intérêt des sous-espaces stables (cf. proposition 3.2.7).*

PROPOSITION 3.1.3. *Soit $(E_1, \dots, E_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E de somme directe égale à E. $u \in \mathcal{L}(E)$ stabilise les sous-espaces E_i ssi dans toute base adaptée à la décomposition de E en somme directe, la matrice de u s'écrit*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}.$$

où les A_i sont les matrices de $u_{||E_i}$.

Dém : On fait une récurrence sur p en commençant par $p = 2$:
Soit $(e_{i,j})$ une base adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ (on reprend les notations de la définition 2.1.5 page 188) : $(e_{i,j})_{j \in [\![1, m_i]\!]}$ est une base de E_i pour $i \in [\![1, 2]\!]$.

- Si u stabilise les espaces E_1 et E_2 alors d'après la proposition 3.1.2, on sait que la matrice de u s'écrit $\begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$. Mais comme u stabilise E_2 alors $C = 0$.
- Réciproque immédiate.

On suppose que la propriété est vraie au rang p alors, au rang $p+1$, en écrivant que $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_{p-1} \oplus (E_p \oplus E_{p+1})$ (somme de p sous-espace vectoriels), en appliquant l'hypothèse de récurrence à la somme de ces p sous-espaces vectoriels puis la propriété à l'ordre 2 à $E_p \oplus E_{p+1}$ on obtient bien le résultat ■

***Remarque* 3.1.3.**

(i) *Dans le cas de la proposition ci-dessus, on dit que u admet une matrice diagonale par blocs. Le déterminant de u vaut alors* $\det A_1 \ldots \det A_p$.

(Immédiat par récurrence sur p).

(ii) *Si les espaces E_i sont de dimension 1, la matrice de u est diagonale, la restriction de u à chaque* $\mathrm{Vect}(e_i)$ *est une homothétie.*

PROPOSITION 3.1.4. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$, A sa matrice dans $\mathcal{B}$, on pose $E_i = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_i)$. On a l'équivalence suivante :*

$$A \text{ est triangulaire supérieure ssi } \forall i \in [\![1, n-1]\!],\ u(E_i) \subset E_i.$$

Dém : Par double implication :

($\Rightarrow$) Par hypothèse on a $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_j) = \sum_{k=1}^{j} a_{kj} e_i$ par conséquent $u(e_j) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_j) = E_j$. On obtient donc

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \forall j \in [\![1, i]\!],\ u(e_j) \in E_j \subset E_i$$

soit $u(e_i) \subset E_i$.

($\Leftarrow$) On sait ici que $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $u(e_i) \in E_i$ ce qui se traduit par $u(e_i) = \sum_{k=1}^{i} a_{ki} e_k$ donc la matrice de u est bien triangulaire supérieure ■

3.1.2 Polynôme d'un endomorphisme

DÉFINITION 3.1.2. ***Polynôme d'endomorphisme***
Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p \in \mathbb{K}[X]$ et u un endomorphisme de E alors on définit $P(u) = a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 u + \cdots + a_p u^p$ (où $u^p = u \circ u \circ \ldots \circ u$ p fois) est appelé polynôme de l'endomorphisme u (on peut de même parler de polynôme matriciel).

PROPOSITION 3.1.5. ***Morphisme d'algèbre***
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application $\varphi_u : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto P(u)$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Dém : On vérifie facilement que φ_u est une application linéaire :

- On a $\varphi_u(P+Q) = (P+Q)(u) = P(u)+Q(u)$: en effet, on pose $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ quitte à compléter par des 0 si les degrés ne sont pas égaux,

$$\begin{aligned}(P+Q)(u) &= \sum_{k=0}^{p} (a_k + b_k) u^k = \sum_{k=0}^{p} a_k u^k + \sum_{k=0}^{p} b_k u^k \\ &= P(u) + Q(u)\end{aligned}$$

en notant $u^0 = \operatorname{Id}_E$.

- $\varphi_u(\lambda P) = (\lambda P)(u) = \sum_{k=0}^{p} \lambda a_k u^k = \lambda P(u)$.

Pour montrer que $\varphi_u(PQ) = \varphi_u(P)\varphi_u(Q)$ on le prouve d'abord dans le cas où P et Q sont des monômes :
$P = X^p$ et $Q = X^q$ alors $(PQ)(u) = X^{p+q}(u) = u^{p+q} = u^p \circ u^q = P(u) \circ Q(u)$.
Puis, par linéarité, on l'étend au cas où P est un polynôme quelconque :

$$\begin{aligned}(PX^q)(u) &= \left(\sum_{k=0}^{p} a_k X^{k+q}\right)(u) = \sum_{k=0}^{p} a_k u^{k+q} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{p} a_k u^k\right) \circ u^q = P(u) \circ u^q.\end{aligned}$$

Finalement, avec le même argument, on généralise ce résultat au cas d'un polynôme quelconque Q :

$$\begin{aligned}(PQ)(u) &= \left(P\sum_{k=0}^{q} b_k X^k\right)(u) = \left(\sum_{k=0}^{q} Pb_k X^k\right)(u) \\ &= \sum_{k=0}^{q} P(u) \circ (b_k u^k) = P(u) \circ \left(\sum_{k=0}^{q} b_k u^k\right) \\ &= P(u) \circ Q(u).\end{aligned}$$

Enfin on a $\varphi_u(1) = \mathrm{Id}_E$ ■

***Remarque* 3.1.4.** *On a donc : $P_1P_2(u) = P_1(u) \circ P_2(u) = P_2(u) \circ P_1(u)$ (dans ce cas la loi $\circ$ est commutative) et il ne faut pas oublier que $P(u)$ va s'écrire sous la forme $P(u) = a_0\underline{\mathrm{Id}_E} + a_1 u + \cdots + a_p u^p$.*
Attention : ne pas écrire $P(u(x))$ à la place de $P(u)(x) = a_0x + a_1u(x) + \cdots + a_pu^p(x)$, la première écriture n'ayant pas à priori de signification (sauf si l'espace vectoriel E est muni d'une structure d'anneau).

Proposition 3.1.6. ***Algèbre $\mathbb{K}[u]$, idéal des polynômes annulateurs***

- *$\operatorname{Im}\varphi_u = \{P(u), P \in \mathbb{K}\}$ (noté $\mathbb{K}[u]$) est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.*
- *$\operatorname{Ker}\varphi_u = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ est un idéal appelé idéal des polynômes annulateurs.*

Dém :

- On a prouvé que φ_u est un morphisme d'algèbre donc $\operatorname{Im}\varphi_u$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$. D'après la remarque précédente (remarque 3.1.4), on sait que $\operatorname{Im}\varphi_u = \mathbb{K}[u]$ est commutative.
- $\operatorname{Ker}\varphi_u$ idéal :
  - $0 \in \operatorname{Ker}\varphi_u$ donc $\operatorname{Ker}\varphi_u \neq \emptyset$.
  - Si P et Q sont dans $\operatorname{Ker}\varphi_u$ alors $(P-Q)(u) = P(u) - Q(u) = 0$ donc $P - Q \in \operatorname{Ker}\varphi_u$. On en déduit que $\operatorname{Ker}\varphi_u$ est un sous-groupe de $\mathbb{K}[X]$.

– Si $P \in \operatorname{Ker} \varphi_u$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$ alors $(QP)(u) = Q(u) \circ P(u) = 0$ donc $\operatorname{Ker} \varphi_u$ est absorbant, c'est finalement un idéal ■

PROPOSITION 3.1.7. ***Polynôme minimal***
Si E est de dimension finie n alors $\operatorname{Ker} \varphi_u \neq \{0\}$ et $\operatorname{Ker} \varphi_u = \pi_u \mathbb{K}[X]$.
π_u est appelé polynôme minimal de u.

Dém : On sait que $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel de dimension finie ($\dim \mathcal{L}(E) = n^2$), alors la famille à $n^2 + 1$ éléments : $(\mathrm{Id}, u, \dots, u^{n^2})$ est liée.
Il existe donc une combinaison linéaire de ces éléments avec des λ_i non tous nuls soit

$$\lambda_0 \mathrm{Id} + \lambda_1 u + \cdots + \lambda_{n^2} u^{n^2} = 0.$$

On en déduit que $\operatorname{Ker} \varphi_u \neq \{0\}$ car il contient le polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{n^2} X^{n^2}$.
$\operatorname{Ker} \varphi_u$ est un idéal non réduit à $\{0\}$, on sait alors qu'il est de la forme $\pi_u \mathbb{K}[X]$ avec $\pi_u \neq 0$ ■

PROPOSITION 3.1.8. *On récupère ici une famille de sous-espaces stables par u, ce sont les espaces $\operatorname{Im} P(u)$ et $\operatorname{Ker} P(u)$ pour tout polynôme P.*

Dém : u et $P(u)$ commutent, on applique la proposition 3.1.1 page 201 ■

THÉORÈME 3.1. **Lemme des noyaux**
(appelé aussi théorème de décomposition des noyaux)
Si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux alors

$$\operatorname{Ker} PQ(u) = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u).$$

Dém :

- Montrons l'égalité $\operatorname{Ker}(PQ)(u) = \operatorname{Ker} P(u) + \operatorname{Ker} Q(u)$:
  – Grâce à Bézout : $PA + QB = 1$ donc en passant aux polynômes d'endomorphisme, ceci se traduit par $\mathrm{Id} = P(u) \circ A(u) + Q(u) \circ B(u)$ et, en appliquant cette relation au vecteur x de E, on obtient $x = x_1 + x_2$ où $x_1 = P(u) \circ A(u)(x)$ et $x_2 = Q(u) \circ B(u)(x)$.
  Si $x \in \operatorname{Ker} PQ(u)$ alors

$$\begin{aligned} Q(u)(x_1) &= Q(u)[\underbrace{P(u) \circ A(u)(x)}_{=x_1}] = Q(u) \circ P(u) \circ A(u)(x) \\ &= A(u) \circ P(u) \circ Q(u)(x) = 0 \end{aligned}$$

  car $\mathbb{K}[u]$ est une algèbre commutative. Par conséquent $x_1 \in \operatorname{Ker} Q(u)$.
  De même on a $x_2 \in \operatorname{Ker} P(u)$.
  On a prouvé que $\operatorname{Ker} PQ(u) \subset \operatorname{Ker} P(u) + \operatorname{Ker} Q(u)$.
  – Si $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \operatorname{Ker} Q(u)$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} P(u)$ alors

$$\begin{aligned} (PQ)(u)(x) &= (PQ)(u)(x_1) + (PQ)(u)(x_2) = P(u) \circ \underbrace{Q(u)(x_1)}_{=0} + Q(u) \circ \underbrace{P(u)(x_2)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

  donc $\operatorname{Ker} P(u) + \operatorname{Ker} Q(u) \subset \operatorname{Ker} PQ(u)$.

On a donc prouvé l'égalité.

- Montrons que la somme est directe :
  Si $0 = x_1 + x_2$ (toujours avec $x_1 \in \operatorname{Ker} Q(u)$ et $x_2 \in \operatorname{Ker} P(u)$) alors

$$\begin{aligned} x_1 &= P(u) \circ A(u)(x_1) + Q(u) \circ B(u)(x_1) && \text{avec l'égalité } \mathrm{Id} = P(u) \circ A(u) + Q(u) \circ B(u) \\ &= P(u)A(u)(x_1) && \text{car } Q(u)(x_1) = 0 \\ &= -P(u)A(u)(x_2) && \text{car } x_1 = -x_2 \text{ par hypothèse} \\ &= 0 \end{aligned}$$

  par conséquent $x_1 = x_2 = 0$, la somme est bien directe ■

Corollaire 3.2. Si $P = P_1P_2 \dots P_q$ et si $P_i \wedge P_j = 1$ alors

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{q} \operatorname{Ker} P_i(u)$$

Dém : Se fait par récurrence sur q :

- On vient de faire la démonstration dans le cas $q = 2$.
- On suppose la propriété vraie à l'ordre $q \geqslant 2$: si $P = P_1P_2 \dots P_{q+1}$ se décompose en produit de polynômes premiers entre eux deux à deux alors, en écrivant que $P = P_1 \dots P_{q-1}(\underbrace{P_qP_{q+1}}_{=P'_q})$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} P(u) &= \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_{q-1}(u) \oplus \operatorname{Ker}(P_qP_{q+1})(u) \\ &= \operatorname{Ker} P_1(u) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} P_{q-1}(u) \oplus \operatorname{Ker} P_q(u) \oplus \operatorname{Ker} P_{q+1}(u) \end{aligned}$$

  ce qui assure le résultat à l'ordre $q + 1$ et termine la récurrence ■

***Remarque* 3.1.5.**

(i) *On peut faire une démonstration directe de ce corollaire, il suffit de remarquer que les polynômes* $Q_i = \dfrac{P}{P_i}$ *sont premiers dans leur ensemble et de leur appliquer Bézout comme pour la démonstration du théorème 3.1 (où on s'est limité au cas où* $q = 2$*).*
Dém : Si D *est un polynôme irréductible qui divise tous les* Q_i *alors* D *divise* $\dfrac{P}{P_i} = \prod_{j \neq i} P_j$ *donc il existe* $k \neq i$ *tel que* $D | P_k$*. Mais* $D | \dfrac{P}{P_k}$ *donc il divise un* P_l *avec* $l \neq k$ *ce qui donne* $D = 1$*. Les polynômes* Q_i *sont donc premiers dans leur ensemble et l'égalité de Bézout s'écrit* $A_1Q_1 + \cdots + A_qQ_q = 1$*. On adapte alors la démonstration du lemme des noyaux :*
l'égalité se fait exactement de la même façon avec $x_i = Q_i(u)(x)$ *puis, pour la somme directe, si* $0 = \sum_{i=1}^{q} x_i$ *avec* $x_i \in \operatorname{Ker} P_i(u)$*, alors* $Q_j(u)(x_i) = 0$ *pour*

$j \neq 0$ (en effet $Q_j(u)$ s'écrit $\displaystyle\prod_{k\neq i, k\neq j} P_k(u) \circ P_i(u)$) ce qui permet d'avoir

$$x_i = \sum_{j=1}^{q} Q_j(u)(x_i) = Q_i(u)(x_i)$$
$$= Q_i(u)\left(-\sum_{j\neq i} x_j\right) = 0 \blacksquare$$

(*ii*) *Les projections p_i attachées à la somme directe $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{q} \operatorname{Ker} P_i(u)$ appartiennent à $K[u]$.*
Dém : Cette propriété est vraie pour $q = 2$, la récurrence se fait alors comme dans la démonstration du corollaire précédent. On peut aussi utiliser la technique du premier point de cette remarque, comme les polynômes Q_i sont premiers dans leur ensemble alors il existe des polynômes A_i tels que $A_1Q_1 + \cdots + A_qQ_q = 1$. Les projecteurs cherchés s'écrivent alors sous la forme $p_i = A_i(u) \circ Q_i(u)$ $\blacksquare$

Question : Soit $P = X - a$ et $Q = X - b$ avec $a \neq b$ et $x \in \operatorname{Ker} PQ(u)$, exprimer x_1 et x_2 en fonction de x.

3.2 Réduction d'un endomorphisme

3.2.1 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Proposition 3.2.1. ***Valeurs propres, vecteurs propres***
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, si u stabilise D droite vectorielle de E alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall x \in D$, $u(x) = \lambda x$.

- *λ est une **valeur propre** de u.*
- *Tout vecteur de $D \setminus \{0\}$ est un **vecteur propre** de u.*

Dém : Soit $e \neq 0$ un vecteur de D, (e) est donc une base de D. Si $u(D) \subset D$ alors $u(e) \in D$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(e) = \lambda e$.
Si $x \in D$ alors $x = x_1 e$ donc $u(x) = x_1 u(e) = x_1 \lambda e = \lambda x$ $\blacksquare$

***Remarque* 3.2.1.** *Le vecteur nul n'est pas un vecteur propre !*

Définition 3.2.1. ***Sous-espace propre***
Si λ est une valeur propre le sous-espace $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est appelé sous-espace propre de u attaché à la valeur propre λ.

Proposition 3.2.2. ***Spectre***
En dimension finie, λ est valeur propre de u ssi $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas inversible.
*L'ensemble des valeurs propres de u est appelé **spectre** de u et noté $\operatorname{Sp}(u)$.*

Dém : On peut raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned}\lambda \text{ valeur propre de } u &\Leftrightarrow u - \lambda \operatorname{Id} \text{ non injective} \\ &\Leftrightarrow u - \lambda \operatorname{Id} \text{ non inversible (dim. finie)} \blacksquare\end{aligned}$$

PROPOSITION 3.2.3. *Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent alors les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ de u sont stables par v.*

Dém : Ceci est une conséquence immédiate de la proposition 3.1.1 appliquée à $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ et v ■

THÉORÈME 3.3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ une famille de valeurs propres de u distinctes deux à deux alors la somme $\sum_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(u)$ est directe.
Toute famille de vecteurs propres (x_i) associée aux (λ_i) est libre.

Dém : On utilise le lemme des noyaux : si $P = \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$ alors

$$\operatorname{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \operatorname{Id}_E) = \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(u)$$

donc on en déduit qu'effectivement la somme des $E_{\lambda_i}(u)$ est directe et qu'en plus elle vaut $\operatorname{Ker} P(u)$ ■
On peut aussi donner l'expression des projecteurs sur les $E_{\lambda_i}(u)$ avec les polynômes d'interpolation de Lagrange : $L_i = \prod_{j \neq i} \dfrac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$.
Ces polynômes vérifient $L_1 + \cdots + L_m = 1$ et ils correspondent à un facteur multiplicatif près ($A_i = \prod_{j \neq i} \dfrac{1}{\lambda_i - \lambda_j}$) aux polynômes Q_i de la démonstration du corollaire du lemme des noyaux.
On a donc $p_i = A_i(u) \circ Q_i(u) = \prod_{j \neq i} \dfrac{u - \lambda_j \operatorname{Id}_E}{\lambda_i - \lambda_j}$ (où p_i désigne le projecteur de $\operatorname{Ker} P(u)$ sur $E_{\lambda_i}(u)$).

THÉORÈME 3.4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ alors si λ est une valeur propre de u, $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.
Si $P(u) = 0$ alors toute valeur propre de u est zéro du polynôme P.

Dém :

- Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$, $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$ et $x \neq 0$ un vecteur propre associé alors, en utilisant les propriétés $u^k(x) = \lambda^k x$ (immédiates par récurrence), on a

$$P(u)(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_p u^p(x) = a_0 + a_1 \lambda x + \cdots + a_p \lambda^p x = P(\lambda) x$$

ce qui signifie que x est un vecteur propre de $P(u)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$.

- Toujours avec $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$ mais avec l'hypothèse suivante : $P(u) = 0$ alors le même calcul conduit à $P(u)(x) = P(\lambda)x = 0$ et comme x n'est pas le vecteur nul, $P(\lambda) = 0$ ■

***Remarque* 3.2.2.** *les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas toutes valeurs propres de u (par exemple, si $u^2 = \mathrm{Id}$ alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1, 1\}$ mais on ne peut rien dire de plus à priori).*
les valeurs propres sont nécessairement racines du polynôme minimal (conséquence du théorème précédent).

Exemples :

(i) Si u est une homothétie de rapport λ alors $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$, les vecteurs de $E \setminus \{0\}$ sont tous vecteurs propres (et ceci est une caractérisation des homothéties).
Le polynôme minimal de u est $\pi_u = X - \lambda$ ($u - \lambda\,\mathrm{Id}_E = 0$ et $\deg \pi_u = 1$ est minimal).

(ii) Si p est un projecteur non nul et différent de l'identité alors $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$ et $E_0(p) = \mathrm{Ker}\, p$, $E_1(p) = \mathrm{Im}\, p$.
Ici $\pi_u = X^2 - X$ car $p^2 - p = 0$ et on utilise la remarque précédente.

(iii) Si a est une affinité d'axe E_1, de direction E_2 et de rapport $k \neq 1$ avec $E = E_1 \oplus E_2$ ($a(x_1 + x_2) = x_1 + kx_2$) alors $\mathrm{Sp}(a) = \{1, k\}$ et $E_1(a) = E_1$, $E_k(a) = E_2$.
$\pi_u = (X - 1)(X - k)$ (immédiat).

(iv) Si s est une symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 ($s(x_1+x_2) = x_1-x_2$) alors $\mathrm{Sp}(s) = \{-1, 1\}$ et $E_1(s) = E_1$, $E_{-1}(s) = E_2$.
$\pi_u = X^2 - 1$.

PROPOSITION 3.2.4. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et E' stable par u, si on pose $u' = u_{||E'}$, alors : $\mathrm{Sp}(u') \subset \mathrm{Sp}(u)$ et si λ est une valeur propre de u', $E_\lambda(u') = E_\lambda(u) \cap E'$.*

Dém :

- Si λ est une vap de u' alors il existe $x' \neq 0$ dans E' tel que $u'(x') = \lambda x'$ soit $u(x') = \lambda x'$ donc λ est une vap de u.
- Ensuite, on raisonne par double inclusion :
  - $E_\lambda(u') \subset E_\lambda(u)$ vu le premier point et $E_\lambda(u') \subset E'$ par conséquent on a $E_\lambda(u') \subset E_\lambda(u) \cap E'$.
  - Inclusion dans l'autre sens : si $x \in E_\lambda(u) \cap E'$ alors $u(x) = \lambda x$ et comme $x \in E'$ on a $u'(x) = u(x) = \lambda x$ donc $x \in E_\lambda(u')$ ■

THÉORÈME 3.5.
Soit $a \in \mathrm{GL}(E)$, l'application $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto a \circ u \circ a^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
$\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(a \circ u \circ a^{-1})$ et, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors $a\,(E_\lambda(u)) = E_\lambda(v)$.

Dém :

- Soit $\varphi_a\ : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto a \circ u \circ a^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.
  - φ_a est en endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ (immédiat),
  - $\varphi_a(\mathrm{Id}_E) = a \circ \mathrm{Id}_E \circ a^{-1} = \mathrm{Id}_E$,
  - $\varphi_a(u \circ v) = a \circ u \circ v \circ a^{-1} = (a \circ u \circ a^{-1}) \circ (a \circ v \circ a^{-1}) = \varphi_a(u) \circ \varphi_a(v)$,
  - $\varphi_{a^{-1}} \circ \varphi_a(u) = a^{-1} \circ (a \circ u \circ a^{-1}) \circ a = u$ ce qui signifie que φ_a est inversible et $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{a^{-1}}$.

  Donc φ_a est bien un automorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

- Si λ est une vap de u alors pour tout x de $E_\lambda(u)$, $u(x) = \lambda x$ et, si on pose $y = a(x)$, $v = a \circ u \circ a^{-1}$,
$$v(y) = a \circ u \circ a^{-1}(y) = a \circ u(x) = a(\lambda x) = \lambda y.$$
  Comme $y = a(x) \neq 0$ car $a \in \mathrm{GL}(E)$ alors λ est valeur propre de v soit $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathrm{Sp}(v)$.
  La relation étant symétrique en u et v on en déduit que les spectres sont égaux : $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(aua^{-1})$.

- En outre on a prouvé que $a(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(v)$ et, par symétrie (en remplaçant a par a^{-1} et u par v) $a^{-1}(E_\lambda(v)) \subset E_\lambda(u)$ d'où l'égalité ■

Questions :

(*i*) Chercher les valeurs propres de
$$u\ : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P' \in \mathbb{K}_n[X].$$

(*ii*) Si $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de
$$u\ : f \in E \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } v\ : f \in E \mapsto f'.$$

(*iii*) Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de $u\ : f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mapsto u(f)$ défini par $u(f)(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x - t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

3.2.2 Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée

Définition 3.2.2. ***Éléments propres d'une matrice carrée***
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M.
On définit les valeurs propres de M comme étant celles de u, $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(u)$ et $E_\lambda(M) = E_\lambda(u)$.

Proposition 3.2.5. *Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors M peut être considérée comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et dans ce cas, le spectre de M dans $\mathbb{R}$ ($\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$) est égal au spectre de M dans $\mathbb{C}$ ($\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$).*

Dém :

- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ (supposé non vide) alors il existe X matrice unicolonne non nulle telle que $MX = \lambda X$, comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ alors $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ (en considérant λ comme un nombre complexe), on en déduit que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \cap \mathbb{R}$.

- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \cap \mathbb{R}$ alors il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $MX = \lambda X$. On pose alors $X = X_1 + iX_2$ où X_1 et X_2 sont des matrices unicolonnes réelles. En identifiant parties réelles et parties imaginaires on obtient $MX_1 = \lambda X_1$ et $MX_2 = \lambda X_2$. Comme X_1 et X_2 ne peuvent être simultanément nulles (sinon $X = 0$), on en déduit que $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$.

On obtient finalement l'égalité comme annoncé : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \cap \mathbb{R}$ ■
Dans la partie concernant la première année (cf. section 8.5.5 page 158, on a vu la notion de matrice semblable et comme ci-dessus avec les endomorphismes, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto PMP^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\mathrm{Sp}(M) = \mathrm{Sp}(PMP^{-1})$.
En fait, deux matrices sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

3.2.3 Polynôme caractéristique

On suppose que, pour la suite de ce chapitre, E est un espace vectoriel de dimension finie.

DÉFINITION 3.2.3. ***Polynôme caractéristique***
Ici, $u \in \mathcal{L}(E)$, A est la matrice de u dans une base donnée ; les définitions pour u et A se correspondent.
Le polynôme caractéristique de u (et de A) s'écrit :

$$P_u(x) = \det(u - x\,\mathrm{Id}_E) = \det(A - xI_n)$$

(noté parfois χ_u, écrit parfois sous la forme $\det(x\,\mathrm{Id}_E - u)$).

PROPOSITION 3.2.6. $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Leftrightarrow P_u(\lambda) = 0$.

Dém: On peut raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(u) &\Leftrightarrow u - \lambda\,\mathrm{Id}_E \text{ non injective} \\ &\Leftrightarrow u - \lambda\,\mathrm{Id}_E \text{ non bijective} \\ &\Leftrightarrow \det(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = P_u(\lambda) = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

Ceci est un critère très utile pour trouver les valeurs propres en dimension finie.

DÉFINITION 3.2.4. ***Ordre de multiplicité d'une valeur propre***
On appelle ordre de multiplicité de λ valeur propre de u son ordre de multiplicité dans le polynôme caractéristique.

***Remarque* 3.2.3.**

(*i*) *Le coefficient de* x^{n-1} *dans le polynôme caractéristique est :* $(-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(A)$ *et donc, si le polynôme caractéristique est scindé (ce qui est le cas sur* $\mathbb{C}$*) alors,* $\operatorname{Tr}(A)$ *est égal à la somme des vap comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Le coefficient constant est $\det A$*, il est égal au produit des valeurs propres (toujours dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé).*

Dém : Soit $P_n(x) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$, *montrons par récurrence sur* n *que* $P_n(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x^{n-1} + Q_{n-2}(x)$ *où* $\deg Q_{n-2} \leqslant n-2$.

- *Si* $n = 1$*, c'est immédiat,*
  pour $n = 2$ *aussi :* $P_2(x) = x^2 - (\underbrace{a_{11}+a_{22}}_{\operatorname{Tr} A_2})x + \underbrace{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}_{=\det A}.$
- *On suppose la propriété vraie à l'ordre* n*, on note* A_n *la matrice d'ordre* n*, et on développe* $P_{n+1}(x)$ *par rapport à la dernière colonne :*

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= (a_{n+1\,n+1}-x)P_n(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+n+1}\Delta_{i,n+1}(x)}_{=R_{n+1}(x)} \\ &= (a_{n+1\,n+1}-x)\left((-1)^n x^n + (-1)^{n-1}\operatorname{Tr}(A_n)\right) \\ &\qquad + (a_{n+1\,n+1}-x)Q_{n-2}(x) + R_{n+1}(x) \\ &= (-1)^{n+1}x^{n+1} + (-1)^n \operatorname{Tr}(A_{n+1}) + Q_{n-1}(x). \end{aligned}$$

  Or $\Delta_{i,n+1}(x)$ *s'obtient en supprimant la dernière colonne et la* i*-ième ligne donc on enlève les coefficients* $a_{ii}-x$ *et* $a_{n+1,n+1}-x$*, il ne reste plus que* $n-1$ *termes* $a_{jj}-x$ *et dans le développement du déterminant, on aura un polynôme de degré au plus égal à* $n-1$*. Donc* $R_{n+1} \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$*, de même pour* $(a_{n+1,n+1}-x)Q_{n-2}(x)$ *ce qui achève la récurrence.*

On obtient ainsi le coefficient de x^{n-1} *et, si le polynôme caractéristique est scindé alors les relations entre coefficients et racines nous permettent d'affirmer que* $\operatorname{Tr}(A)$ *est égal à la somme des valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité.*
Pour le coefficient constant, il suffit de prendre $x = 0$ *et on trouve* $\det A$ ■

(*ii*) *A et* A^T *ont même polynôme caractéristique.*

(*iii*) *Si A est triangulaire,* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$ *alors* $P_A(x) = \prod_{i=1}^{n}(a_{ii}-x)$*, les* a_{ii} *sont donc valeurs propres de A.*

Dém : On utilise le développement d'une matrice triangulaire ce qui donne directement le polynôme caractéristique ■

PROPOSITION 3.2.7. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on suppose que E' est stable par u et on appelle $u' = u_{||E'}$ alors $P_{u'}|P_u$.*

Plus généralement, si $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_i$ et si u stabilise cette somme directe alors $P_u = P_{u_1}\dots P_{u_m}$.

Dém :

- On écrit la matrice de u dans une base adaptée : $M(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ (écriture par blocs) alors $P_u(x) = \det(A - xI_p)\det(C - xI_q) = P_{u'}(x)Q(x)$ où u' est l'endomorphisme de matrice A.

- De même, on écrit la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe :
$M(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}$ d'où

$$\begin{aligned} P_u(x) &= \begin{vmatrix} A_1 - xI_{p_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m - xI_{p_m} \end{vmatrix} \\ &= \det(A_1 - xI_{p_1}) \times \dots \times \det(A_m - xI_{p_m}) = P_{u_1}(x)\dots P_{u_m}(x) \blacksquare \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.2.8. *La dimension d'un sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est inférieure ou égale à l'ordre de multiplicité de λ dans P_u.*

Dém : On pose $u' = u_{||E_\lambda(u)}$, u' est donc une homothétie sur $E_\lambda(u)$ donc $P_{u'} = (\lambda - X)^m$ où m est la dimension de $E_\lambda(u)$. Comme $P_{u'}|P_u$ alors $P_u(X) = (\lambda - X)^m Q(X) = (\lambda - X)^{\omega(\lambda)} R(X)$ où $R(\lambda) \neq 0$ ($\omega(\lambda)$ désigne l'ordre de multiplicité de λ, valeur propre). $R(X)$ et $(\lambda - X)$ sont des polynômes premiers entre eux, de même pour $R(X)$ et $(\lambda - X)^m$. Comme $R(X)$ divise le produit $(\lambda - X)^m Q(X)$, il divise donc $Q(X)$ (théorème de Gauss). On a alors $Q(X) = S(X)R(X)$ et on simplifie la relation $(\lambda - X)^m Q(X) = (\lambda - X)^{\omega(\lambda)} R(X)$ par $R(X)$ d'où

$$(\lambda - X)^m S(X) = (\lambda - X)^{\omega(\lambda)}$$

et par conséquent on peut conclure $m \leqslant \omega(\lambda)$ $\blacksquare$

THÉORÈME 3.6. **Théorème de Cayley-Hamilton**
$P_u(u) = 0$ i.e. le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur.

Dém (non exigible) : Soit $B(x) = A - xI_n = \begin{pmatrix} a_{11} - x & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} - x \end{pmatrix}$, chaque cofacteur de B s'obtient en calculant le déterminant d'une matrice obtenue à partir de $B(x)$ en supprimant une ligne et une colonne donc on obtient à chaque fois un polynôme en x de degré au plus égal à $n - 1$.
$B(x)'^{\mathrm{T}}$ transposée de la matrice des cofacteurs de $B(x)$ s'écrit par conséquent sous la forme

$$B(x)'^{\mathrm{T}} = B'_0 + xB'_1 + \dots + x^{n-1}B'_{n-1}$$

en prenant pour matrice B'_i la matrice des coefficients de x^i.
On utilise alors l'égalité

$$\begin{aligned} B(x)B(x)'^{\mathrm{T}} &= \det B(x) I_n = P_u(x) I_n \\ &= (A - xI_n)(B'_0 + xB'_1 + \cdots + x^{n-1}B'_{n-1}) \end{aligned}$$

(la première relation a été établie à la proposition 8.5.11 page 157) et en développant, on obtient les égalités

$$\begin{aligned} AB_0 &= a_0 I_n & & \\ AB_1 - B_0 &= a_1 I_n & & \times A \\ \vdots \quad & \quad \vdots & & \\ AB_k - B_{k-1} &= a_k I_n & & \times A^k \\ \vdots \quad & \quad \vdots & & \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= a_{n-1} I_n & & \times A^{n-1} \\ -B_{n-1} &= (-1)^n I_n & & \times A^n \end{aligned}$$

On multiplie alors à gauche par les matrices A^k indiquées ci-dessus, on ajoute toutes ces égalités, on a les simplifications suivantes : $-A^k B_{k-1}$ ($k+1$-ième ligne) avec $A^k B_{k-1}$ ($k+2$-ième ligne). Finalement, on trouve 0 à gauche (tout s'est simplifié) et $a_0 I_n + a_1 A + \cdots + (-1)^n A^n = P_A(A)$ à droite soit $P_A(A) = 0$ ■

Questions :

(*i*) Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, montrer que $P_{uv} = P_{vu}$. On propose deux méthodes :

Étudier le cas où $u \in \mathrm{GL}(E)$ et s'y ramener par un argument de continuité.

Si A et B sont les matrices de u et v, remarquer (!) que

$$\begin{pmatrix} BA - \lambda I_n & -B \\ 0 & -\lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda I_n & -B \\ 0 & AB - \lambda I_n \end{pmatrix}.$$

(*ii*) Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, exprimer $P_{A^{-1}}$ en fonction de P_A.

(*iii*) Si $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 9 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ à l'aide de Cayley-Hamilton, exprimer A^{-1} dans $\mathbb{K}[A]$.

(*iv*) Une autre démonstration de Cayley-Hamilton : on pose, pour tout x de $E \backslash \{0\}$, $E_x = \mathrm{Vect}(u^m(x),\ m \in \mathbb{N})$.

Montrer que $u(E_x) \subset E_x$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x))$ soit une base de E_x. On pose $u_x = u_{||E_x}$, montrer que la matrice de u_x dans la base précédente s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_1 \\ & \ddots & 0 & \\ 0 & & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$.

En utilisant le fait que $P_{u_x} | P_u$, prouver le théorème de Cayley-Hamilton.

3.2.4 Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

a) Conditions de diagonalisation

Définition 3.2.5. ***Endomorphisme diagonalisable***
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est diagonalisable ssi$_{déf}$ E est somme directe des sous-espaces propres de u.

Proposition 3.2.9. *Si u est diagonalisable et si on appelle p_λ les projecteurs associés à la décomposition en somme directe de E en sous-espaces propres alors*

$$u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda p_\lambda.$$

Réciproquement, si $E = \bigoplus_{j\in I} E_j$ et si u induit sur chaque E_j une homothétie alors u est diagonalisable.

Dém :

- Soit $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ la décomposition de E en somme directe des sous-espaces propres de u alors tout élément x de E s'écrit

$$x = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} x_\lambda \text{ où } x_\lambda \in E_\lambda(u).$$

  Donc, par linéarité,

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} u(x_\lambda) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda x_\lambda \\ &= \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda p_\lambda(x) = \left(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda p_\lambda \right)(x) \end{aligned}$$

  soit $u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda p_\lambda$.

- Réciproquement : on a $u_{||E_i} = \lambda_i \mathrm{Id}_{E_i}$, on regroupe les λ_i qui sont égaux de manière à former une partition de I : $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_m$ où, si i et j sont dans le même I_k alors $\lambda_i = \lambda_j$ et $\lambda_i \neq \lambda_j$ dans le cas contraire. En regroupant les espaces E_i on aura donc $E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k$ où $F_k = \bigoplus_{i \in I_k} E_i$.
  Si $x \in F_k$ alors $u(x) = \mu_k x$ où μ_k est la valeur commune des λ_i dans I_k donc $F_k \subset E_{\mu_k}(u)$ et comme

$$E = \bigoplus_{k=1}^{m} F_k \subset \bigoplus_{k=1}^{m} E_{\mu_k} \subset E$$

  alors on a égalité des dimensions donc égalité des sous-espaces vectoriels soit $F_k = E_{\mu_k}(u)$. On en déduit alors que $E = \bigoplus_{k=1}^{m} E_{\mu_k}(u)$ c'est-à-dire u est diagonalisable ■

PROPOSITION 3.2.10. *u est diagonalisable ssi il existe une base de E formée de vecteurs propres, ce qui est encore équivalent à l'existence d'une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.*

Dém :

- Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u, on pose $E_i = \mathrm{Vect}(e_i)$. On a $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ et u induit sur chaque E_i une homothétie donc, en vertu de la proposition précédente, u est diagonalisable.
- Si u est diagonalisable alors on prend une base de chaque sous-espace propre que l'on concatène pour former une base de E (ce qui est possible car E est somme directe des sous-espaces propres de u). La base obtenue est bien une base de vecteurs propres de u. On a donc prouvé ici la première équivalence.
- La deuxième équivalence est alors immédiate car la matrice de u dans une base de vecteurs propres est évidemment diagonale, la réciproque est tout aussi évidente ■

Attention ici à ne pas prendre comme définition d'un endomorphisme diagonalisable l'existence d'une base de vecteurs propres de u, en effet, la définition donnée est plus générale et ne dépend pas du choix d'une base. Ceci est important pour la suite, voir la remarque suivante.

PROPOSITION 3.2.11. *u est diagonalisable ssi la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à $\dim E$.*

Dém : $(\Rightarrow)$: Si u est diagonalisable alors $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ par conséquent on a $\dim E = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$.

$(\Leftarrow)$ On a $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \subset E$ et la condition sur les dimensions donne

$$\dim \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$$

donc $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$ (sous-espace vectoriel de E de même dimension que E ■

***Remarque* 3.2.4.**

(i) *Si P_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et n'a pas de racine multiple alors u est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.*
Dém : Comme P_u est scindé et a toutes ses racines simples, il admet n racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Comme chaque $E_{\lambda_i}(u)$ est de dimension $\geqslant 1$ alors

$$n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i}(u) \leqslant \dim E = n$$

donc on a égalité à chaque niveau soit $\sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i}(u) = \dim E$ et on utilise la proposition précédente ■

(*ii*) *Si* $\dim E_\lambda(u) < \omega(\lambda)$ *ordre de multiplicité de* λ *dans* P_u *alors* u *n'est pas diagonalisable.*
Dém : Pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}(u)$*,* $\dim E_\mu(u) \leqslant \omega(\mu)$ *(cf. proposition 3.2.8 page 213) et* $\dim E_\lambda(u) < \omega(\lambda)$ *donc* $\sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(u)} \dim E_\mu(u) < \sum_{\mu\in\mathrm{Sp}(u)} \omega(\mu) \leqslant n$*. On utilise alors la proposition précédente (en prenant les propriétés contraires)* ■

(*iii*) *La notion de vecteur propre n'est pas intrinsèque (ainsi que l'existence d'une base dans laquelle* u *est diagonalisable), par contre, la notion de sous-espace propre est intrinsèque (i.e. ne dépend que de l'endomorphisme) ainsi que le résultat de la proposition 3.2.9. On peut alors définir sans ambiguïté (par exemple)*

$$\mathrm{e}^u = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \mathrm{e}^\lambda p_\lambda \text{ et si } \lambda \geqslant 0,\ \sqrt{u} = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \sqrt{\lambda} p_\lambda.$$

THÉORÈME 3.7. u est diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$ dont toutes les racines sont simples.

Ceci est un théorème très **important** !

Dém :

($\Rightarrow$) Soient $(\lambda_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ les valeurs propres de u, on pose $P = \prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i)$.

Si $x_j \in E_{\lambda_j}(u)$ alors, comme $u(x_j) = \lambda_j x_j$,

$$P(u)(x_j) = (u-\lambda_1 \mathrm{Id}_E)\circ\ldots\circ(u-\lambda_j \mathrm{Id}_E)\circ\ldots\circ(u-\lambda_n \mathrm{Id}_E)(x_j)$$

et comme les endomorphismes $u-\lambda_i \mathrm{Id}_E$ commutent

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i\neq j}(u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)\circ(u-\lambda_j)(x_j)\\
&= \left[\prod_{i\neq j}(u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)\right](u(x_j)-\lambda_j x_j) = 0.
\end{aligned}$$

On écrit ensuite tout vecteur x sous la forme $x = \sum_{i=1}^{m} x_j$ où $x_j \in E_{\lambda_j}(u)$ d'où $P(u)(x) = \sum_{j=1}^{n} P(u)(x_j) = 0$.

($\Leftarrow$) On utilise le lemme des noyaux avec $P(X) = \prod_{i=1}^{m}(X-\lambda_i)$ qui est un polynôme annulateur de u.

$E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)$ et on écarte les sous-espaces vectoriels réduits à $\{0\}$ et on renumérote les λ_i qui restent, d'où $(m' \leqslant m)$

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m'} \underbrace{\mathrm{Ker}(u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)}_{=E_{\lambda_i}(u)}$$

donc E étant somme des sous-espaces propres de u, on en déduit que u est diagonalisable ■

On peut préciser un polynôme annulateur particulièrement intéressant avec le corollaire suivant :

Corollaire 3.8. u est diagonalisable ssi u annule le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$.

Dém : On reprend la démonstration du sens direct du théorème précédent où on a montré que $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$ était un polynôme annulateur.

La réciproque est une conséquence immédiate de ce théorème car $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$ est un polynôme scindé à racines simples ■

Applications :

(i) Si u est diagonalisable et si E' est stable par u alors $u' = u_{||E'}$ est aussi diagonalisable.
Dém : Si $P(u) = 0$ alors $\forall x \in E$, $P(u)(x) = 0$, en particulier si $x \in E'$ on a $P(u)(x) = P(u')(x) = 0$ soit $P(u') = 0$ où P est un polynôme scindé sans racine multiple donc u' est diagonalisable ■

(ii) (Très **important**) Si u et v sont deux endomorphismes diagonalisables qui commutent alors ils sont simultanément diagonalisables.
Dém : Si u est diagonalisable alors $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Or $v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$ (cf. proposition 3.2.3 page 208). Vu le (i) de cette remarque, on sait que $v_\lambda = v_{||E_\lambda(u)}$ est diagonalisable. Soit $(e_{1,\lambda}, \dots, e_{n_\lambda,\lambda})$ une base qui diagonalise v_λ alors $(e_{i,\lambda})_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u), i \in [\![1,n_\lambda]\!]}$ est une base de vecteurs propres communs à u et v. Dans cette base, les matrices de u et v sont diagonales.
La réciproque est vraie (deux matrices diagonales commutent, il en est de même des endomorphismes) mais elle est inutile ■

b) Trigonalisation

Définition 3.2.6. ***Endomorphisme trigonalisable***
On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi$_{\text{déf}}$ il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Théorème 3.9. u est trigonalisable ssi il annule un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.

Dém :

- L'implication directe est immédiate : le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur d'après le théorème de Cayley-Hamilton. Or on sait que pour une matrice triangulaire, les valeurs propres se retrouvent sur la diagonale avec leur ordre de multiplicité :
$$M(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & a_{1n} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } P_u(x) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - x) \text{ qui est bien scindé.}$$

- Réciproque : on raisonne par récurrence sur $n = \dim E$ en faisant l'hypothèse suivante : si $\dim E = n$ alors tout endomorphisme de E qui annule un polynôme scindé est trigonalisable.
  - Si $\dim E = 1$ c'est immédiat car tous les endomorphismes sont trigonalisables...
  - On suppose la propriété vraie à l'ordre $n-1$, $n \geqslant 2$. Si u annule un polynôme scindé $\Pi = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\omega_i}$ alors

    $$\det \Pi(u) = \prod_{i=1}^{p}[\det(u-\lambda_i \operatorname{Id})]^{\omega_i} = 0$$

    donc il existe i tel que $\det(u-\lambda_i \operatorname{Id}) = 0$ (on a affaire à un produit d'éléments de $\mathbb{K}$).
    Quitte à renuméroter les λ_i, on suppose que $\det(u-\lambda_1 \operatorname{Id}) = 0$. λ_1 est valeur propre de u et u possède alors un vecteur propre e_1. On complète (e_1) en une base de E : $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Dans cette base, la matrice de u s'écrit $M(u) = \begin{pmatrix} \lambda & C \\ 0 & A \end{pmatrix}$.
    On utilise alors l'hypothèse de récurrence avec l'endomorphisme v de $\mathbb{K}^{n-1}$ de matrice A :
    - ∗ En faisant des produits par blocs, on a

      $$\begin{aligned} M(u)^2 &= \begin{pmatrix} \lambda^2 & C_2 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}, \\ M(u)^3 &= \begin{pmatrix} \lambda^3 & C_3 \\ 0 & A^3 \end{pmatrix} \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ M(u)^n &= \begin{pmatrix} \lambda^n & C_n \\ 0 & A^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

      On en déduit que $\Pi(M(u)) = \begin{pmatrix} \Pi(\lambda) & D \\ 0 & \Pi(A) \end{pmatrix}$.
    - ∗ A annule un polynôme scindé en prenant pour polynôme Π le polynôme annulateur de u donc, d'après l'hypothèse de récurrence, v est trigonalisable. Par conséquent il existe P matrice de passage telle que $A = PTP^{-1}$ (où T est triangulaire).

    On aura alors

    $$\begin{aligned} M(u) &= \begin{pmatrix} \lambda & C \\ 0 & PTP^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & C' \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

    où $C' = CP$ ■

Cette démonstration est très utile dans la pratique notamment le dernier produit matriciel qui sert dans des exercices, des problèmes et rend les choses plus claires et plus faciles à rédiger.

Corollaire 3.10. u est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé (sur $\mathbb{K}$).

Dém :

- Grâce à Cayley-Hamilton, si P_u est scindé alors u est trigonalisable (P_u est un polynôme annulateur).
- Réciproquement, si u est trigonalisable alors dans une base où u est trigonalisé, on lit toutes les valeurs propres avec leur ordre de multiplicité sur la diagonale donc, comme on l'a vu dans la démonstration du théorème précédent (sens direct) alors $P_u(x) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - x)$ est bien scindé ■

***Remarque* 3.2.5.** *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors tous les endomorphismes sont trigonalisables et toutes les valeurs propres se lisent sur la diagonale avec leur ordre de multiplicité.*

c) Cas des matrices

On peut étendre au cas des matrices les notions vues pour les endomorphismes.

Définition 3.2.7. ***Matrice diagonalisable, trigonalisable***

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ associé dans la base canonique.

- *M est diagonalisable ssi$_{\text{déf}}$ u est diagonalisable.*
- *M est trigonalisable ssi$_{\text{déf}}$ u est trigonalisable.*

On peut récupérer les conditions de diagonalisation et de trigonalisation des endomorphismes. On notera en particulier que M est diagonalisable (resp. trigonalisable) ssi M est semblable à une matrice diagonale (resp. triangulaire).

Plus précisément on aura $M = PDP^{-1}$ (resp. $M = PTP^{-1}$) où P est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres (Mnémo : PD passage à diagonale...).

D'un point de vue pratique, si $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une famille de vecteurs propres de M ($MX_i = \lambda_i X_i$) alors la matrice de passage P est formée des vecteurs colonnes X_i : $P = (X_1\ X_2\ \dots\ X_n)$ et la matrice diagonale est égale à $D = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Ce qui suit, jusqu'à la fin du chapitre n'est pas explicitement au programme mais peut rendre des services précieux

Un théorème intéressant concernant les matrices à coefficients réels et tout d'abord une propriété simple.

Proposition 3.2.12. *Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\mathbb{C}$-semblables alors elles sont $\mathbb{R}$-semblables.*

Dém : On sait par hypothèse qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $AP = PB$. P est à coefficients complexes, on écrit $P = R + iQ$ où R et Q sont à coefficients réels. On a donc $AR = RB$ et $AQ = QB$. Comme $f(x) = \det(R+xQ)$ n'est pas le polynôme nul ($f(i) \neq 0$) alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq 0$. On a donc $A(R+xQ) = (R+xQ)B$ avec $R + xQ$ inversible et à coefficients réels donc $A = (R + xQ)B(R + xQ)^{-1}$ i.e. A et B sont $\mathbb{R}$-semblables ■

THÉORÈME 3.11. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathbb{C}$-diagonalisable alors A est semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} \mathrm{Diag}(\lambda_i) & 0 \\ 0 & \mathrm{Diag}(A_j) \end{pmatrix}$$
où les λ_i sont les valeurs propres réelles de A et où les matrices A_j sont des matrices de similitude d'ordre 2 ($A_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$).

Dém : On sait que A est $\mathbb{C}$-diagonalisable donc, si $(\lambda_i)_{i \in [\![1,k]\!]}$ sont les vap réelles de A, $(\mu_j, \bar{\mu_j})_{j \in [\![1,p]\!]}$ les vap complexes alors A est semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu_1, \bar{\mu_1}, \ldots, \mu_p, \bar{\mu_p})$ (en effet les valeurs propres complexes sont conjuguées deux à deux et μ_j, $\bar{\mu_j}$ ont même ordre de multiplicité car le polynôme caractéristique de A est réel).
Or, en utilisant les relations
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mu_j & 0 \\ 0 & \bar{\mu_j} \end{pmatrix}}_{=B_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}}_{=P_1} \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}}_{=P_1^{-1}}$$
où $a_1 = \mathrm{Re}(\mu_1)$, $b_1 = \mathrm{Im}(\mu_1)$ on peut écrire :
$$\begin{pmatrix} \mathrm{Diag}(\lambda_i) & 0 & & 0 \\ 0 & B_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & B_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_k & 0 & & 0 \\ 0 & P_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & P_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Diag}(\lambda_i) & 0 & & 0 \\ 0 & A_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & A_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 & & 0 \\ 0 & P_1^{-1} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & P_p^{-1} \end{pmatrix}$$
Comme les matrices $\begin{pmatrix} I_k & 0 & & 0 \\ 0 & P_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & P_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_k & 0 & & 0 \\ 0 & P_1^{-1} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & P_p^{-1} \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre, A est $\mathbb{C}$-semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{Diag}(\lambda_i) & 0 & & 0 \\ 0 & A_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & & A_p \end{pmatrix}$ et en vertu de la propriété précédente, A est $\mathbb{R}$-semblable à cette matrice ■

Questions :

(i) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Diagonaliser u sur $\mathbb{C}$, donner la réduction de u considéré comme endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^3 - 2M^2 + M - I_n = 0$. M est-elle diagonalisable ?

(iii) Diagonaliser $M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(iv) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme trigonalisable et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(u)$ est trigonalisable.

(v) Trigonaliser u de matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$