CHAPITRE 4

Espaces euclidiens et hermitiens

4.1 Espaces préhilbertiens réels

Dans toute cette section le corps de base est $\mathbb{R}$.

4.1.1 Formes bilinéaires symétriques

On a défini au 8.5.2. dans les révisions du cours de première année la notion d'application p-linéaire. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques de E.

PROPOSITION 4.1.1. *$\mathcal{S}(E)$ est un espace vectoriel.*

Dém : L'application nulle : $O\ : (x,y) \in E^2 \mapsto 0$ est symétrique donc $\mathcal{S}(E)$ est non vide.
Si B et B' sont deux éléments de $\mathcal{S}(E)$ alors $\lambda B + \mu B'$ est bien une application bilinéaire symétrique (la linéarité par rapport à une variable se démontre comme pour les applications linéaires et la symétrie est évidente). $\mathcal{S}(E)$ est donc stable par combinaison linéaire, c'est par conséquent un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications bilinéaires de E^2 dans $\mathbb{R}$ ■

DÉFINITION 4.1.1. ***Forme quadratique***
Si $B \in \mathcal{S}(E)$, on lui associe l'application $Q : x \in E \mapsto Q(x) = B(x,x)$. Q est appelée forme quadratique associée à B.

PROPOSITION 4.1.2. ***Identité de polarisation, forme polaire***
Si $B \in \mathcal{S}(E)$ et si Q est sa forme quadratique associée alors

$$4B(x,y) = Q(x+y) - Q(x-y).$$

B est appelée forme polaire associée.

Dém : $Q(x+\varepsilon y) = B(x+\varepsilon y, x+\varepsilon y) = B(x,x) + \varepsilon B(y,x) + \varepsilon B(x,y) + B(y,y)$ (où $\varepsilon = \pm 1$) donc $Q(x+\varepsilon y) = B(x,x) + B(y,y) + 2\varepsilon B(x,y)$ par symétrie de B. On obtient alors la relation donnée en retranchant $Q(x-y)$ à $Q(x+y)$ ■

***Remarque* 4.1.1.** *On a aussi $2B(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$.*

DÉFINITION 4.1.2. ***Forme quadratique positive, forme bilinéaire positive***
On dit que Q associée à B est positive ssi$_{déf}$ $Q(x) \geqslant 0$ pour tout x de E (et aussi que B est positive).

On retrouve ici l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui est en fait valable pour toutes les formes positives :

PROPOSITION 4.1.3. *Si $B \in \mathcal{S}(E)$ est positive alors $(B(x,y))^2 \leqslant Q(x)Q(y)$.*

Dém : On étudie le trinôme $\varphi(\lambda) = Q(x+\lambda y)$ comme dans le cas des espaces euclidiens :

- Par hypothèse, $\varphi(\lambda) \geqslant 0$.
- En développant on a aussi $\varphi(\lambda) = Q(x) + 2\lambda B(x,y) + \lambda^2 Q(y)$.
- Si $Q(y) = 0$ alors $B(x,y) = 0$ sinon, en choisissant par exemple $B(x,y) > 0$, $\varphi(\lambda) \to -\infty$ quand $\lambda \to -\infty$ ce qui est contraire à l'hypothèse.
- Si $Q(y) \neq 0$ alors le trinôme du second degré en λ : $Q(x)+2\lambda B(x,y)+\lambda^2 Q(y)$ est toujours positif donc soit il n'admet pas de racine réelle soit il admet une racine double et dans ce cas sont discriminant $\Delta = 4B(x,y)^2 - 4Q(x)Q(y)$ est $\leqslant 0$.

Dans tous les cas, on a bien $B(x,y)^2 \leqslant Q(x)Q(y)$ ■

***Remarque* 4.1.2.** *Si B est définie positive alors l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'a lieu que si x et y sont colinéaires.*

Dém : On a en fait une équivalence, si x et y sont colinéaires alors on a égalité car, si par exemple $y = \lambda x$, $B(x,y)^2 = \lambda^2 Q(x)^2 = Q(x).\lambda^2 Q(x) = Q(x)Q(y)$ mais cette implication n'est pas très utile.
Réciproquement : si $B(x,y)^2 = Q(x)Q(y)$ alors

- dans le cas où $Q(y) \neq 0$, le trinôme sur second degré mis en évidence à la question précédente admet une racine double λ_0. On a donc $\varphi(\lambda_0) = Q(x+\lambda_0 y) = 0$ d'où $x + \lambda_0 y = 0$ ce qui prouve que x et y sont colinéaires.
- Si $Q(y) = 0$ alors $y = 0$ et la même conclusion persiste ■

DÉFINITION 4.1.3. ***Matrice associée à une forme bilinéaire symétrique***
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On appelle matrice de B forme bilinéaire symétrique définie sur E la matrice $M(B) = (B(e_i, e_j))$. Cette matrice est aussi la matrice de la forme quadratique associée.

- **Expression analytique.** Si $M = M(B)$ alors

$$\begin{aligned}
B(x,y) = B\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, y\right) &= \sum_{i=1}^n x_i B(e_i, y) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i B\left(e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) \\
&= \sum_{i,j} x_i y_j B(e_i, e_j) = X^{\mathrm{T}} M Y = Y^{\mathrm{T}} M X
\end{aligned}$$

où X et Y sont les matrices de x et y dans la base des (e_i).
Pour la forme quadratique, on pourra écrire :

$$Q(x) = \sum_{i=j} x_i x_j B(e_i, e_j) + \sum_{i<j} x_i x_j B(e_i, e_j) + \sum_{j<i} x_i x_j B(e_i, e_j)$$

on utilise alors $B(e_i, e_j) = B(e_j, e_i)$ et on échange i et j dans la dernière somme

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 B(e_i, e_i) + 2 \sum_{1\ i<j\ n} B(e_i, e_j) x_i x_j = X^{\mathrm{T}} M X.$$

***Remarque* 4.1.3.** *On passe de la forme quadratique à la forme polaire associée par dédoublement des termes :* $x_i^2 \to x_i y_i$ *et* $x_i x_j \to \dfrac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i)$.

Dém : C'est immédiat et surtout cela se généralise au cas des formes linéaires : si $Q(x) = f(x)g(x)$ où f et g sont des formes linéaires, Q est une forme quadratique et sa forme polaire est $B(x, y) = \dfrac{1}{2}[f(x)g(y) + f(y)g(x)]$ ■

Questions :

(*i*) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit $Q(M) = \mathrm{Tr}(M^{\mathrm{T}} M) + \mathrm{Tr}(M)^2$. Montrer que Q est une forme quadratique.

(*ii*) Soit Q une forme quadratique positive et x un vecteur isotrope (i.e. $Q(x) = 0$). Montrer que $\forall y \in E$, $B(x, y) = 0$.

(*iii*) Par quoi est remplacé la proposition 4.1.3 si $Q \leqslant 0$?

(*iv*) Montrer que $B(x, y) = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial Q}{\partial x_i}(x).y_i = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial Q}{\partial y_i}(y).x_i$.

4.1.2 Produit scalaire

On renvoie au début du chapitre 9 des révisions de première année sur les espaces euclidiens pour la définition du produit scalaire, pour les inégalités de Cauchy-Schwarz, triangulaire (pour la norme euclidienne) et pour les relations entre produit scalaire et norme notamment l'identité du parallélogramme ainsi que l'identité de polarisation qui n'est en fait que la réédition de la proposition 4.1.2 ci-dessus.

DÉFINITION 4.1.4. ***Espaces préhilbertiens réels***
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on dit que E est préhilbertien ssi$_{\text{déf}}$ il est muni d'un produit scalaire.

Exemples :

(*i*) Si $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty\}$ alors on définit sur E une structure d'espace préhilbertien avec le produit scalaire suivant

$$(u|v) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n v_n.$$

Cet exemple fait référence à la notion de série que l'on verra en analyse au chapitre 5.

(*ii*) Si $E = \mathcal{C}([a,b])$, on peut en particulier définir le produit scalaire suivant :

$$(f|g) = \int_{]a,b[} \frac{f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}.$$

Cet exemple fait référence à la notion d'intégrale sur un intervalle quelconque que l'on verra en analyse au chapitre 6.

4.1.3 Orthogonalité

On peut là aussi reprendre le cours de première année et étendre les définitions des vecteurs orthogonaux, de sous-espaces vectoriels orthogonaux et de l'orthogonal $F^{\perp}$ d'un sous-espace vectoriel dans le cas d'un espace vectoriel préhilbertien.

DÉFINITION 4.1.5. ***Famille orthogonale, famille orthonormale***
Soit I une famille quelconque d'indice.

- *On dit que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthogonale ssi$_{\text{déf}}$ $(e_i|e_j) = 0$ pour $i \neq j$.*
- *On dit que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormale ssi$_{\text{déf}}$ $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$.*

THÉORÈME 4.1. **Relation de Pythagore**
Si $(e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une famille orthogonale alors

$$\|e_1 + \cdots + e_p\|^2 = \|e_1\|^2 + \cdots + \|e_p\|^2.$$

Dém : On fait une récurrence sur p :

- $p = 2$: $\|e_1+e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + 2(e_1|e_2) + \|e_2\|^2$ (en utilisant le développement de la norme associée au produit scalaire).
- On suppose la propriété vraie à l'ordre p, à l'ordre $p+1$ on écrit

$$\|e_1 + \cdots + e_{p-1} + \underbrace{e_p + e_{p+1}}_{=e'_p}\|^2 = \|e_1\|^2 + \cdots + \|e_{p-1}\|^2 + \|e_p + e_{p+1}\|^2$$

en utilisant la propriété de récurrence

$$= \|e_1\|^2 + \cdots + \|e_{p-1}\|^2 + \|e_p\|^2 + \|e_{p+1}\|^2$$

avec la propriété à l'ordre 2, ce qui achève la récurrence ■

Exemple : Si $E = \mathcal{C}_{2\pi}$ ensemble des fonctions continues 2π-périodiques à valeurs réelles, la famille $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où les c_n sont définis par $c_n(x) = \cos(nx)$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
La relation de Pythagore nous donne

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (a_0 + a_1\cos x + \cdots + a_n \cos nx)^2\,\mathrm{d}x = a_0^2 + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right).$$

DÉFINITION 4.1.6. ***Somme directe orthogonale***
Si $(E_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une famille finie de sous-espaces vectoriels en somme directe, on dit que cette famille est en somme directe orthogonale ssi$_{\text{déf}}$ les (E_i) sont deux à deux orthogonaux.

***Remarque* 4.1.4.**

(i) *Si les (E_i) sont en somme directe orthogonale alors chaque espace E_i est orthogonal à la somme des autres.*

Dém : Soit $x_i \in E_i$ et $y \in \bigoplus\limits_{j\neq i} E_j$ alors $y = \sum\limits_{j\neq i} y_j$ où $y_j \in E_j$. On a alors

$$(x_i|y) = \sum_{j\neq i}(x_i|y_j) = 0$$

donc, comme ceci est réalisé pour tout élément $x_i \in E_i$ et tout $y \in \bigoplus\limits_{j\neq i} E_j$, on a bien $E_i \perp \bigoplus\limits_{j\neq i} E_j$ ■

(ii) *Pour qu'une somme de sous-espaces vectoriels soit en somme directe orthogonale, il suffit qu'ils soient orthogonaux deux à deux.*

Dém : Soit $F = \sum\limits_{i=1}^{p} E_i$, montrons que les E_i sont en somme directe :
si $0 = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i$ alors on prend le produit scalaire par x_j, ceci donne

$$\begin{aligned}(0|x_j) &= 0\\ &= \sum_{i=1}^{p}(x_i|x_j) = (x_j|x_j)\end{aligned}$$

car $(x_i|x_j) = 0$ si $i \neq j$. On en déduit que $x_j = 0$ pour tout j ce qui prouve que la somme est directe. Comme elle est orthogonale par définition, cette somme est bien directe orthogonale ■

(iii) *Si E est somme directe orthogonale des espaces $(E_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$, on associera les projecteurs orthogonaux sur chaque E_i orthogonalement à la somme des autres.*

Questions :

(i) Montrer qu'une famille orthonormale est une famille libre.

(ii) Prouver le (i) et le (ii) de la remarque ci-dessus
(déjà fait dans cette version).

4.2 Espaces euclidiens

4.2.1 Bases orthonormales

On rappelle ici qu'on a déjà vu la définition d'un espace vectoriel euclidien E, l'existence de bases orthonormales de E, l'isomorphisme canonique entre E et son dual E^* ainsi que les expressions dans une base orthonormale des coordonnées d'un vecteur, de la norme d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points. Enfin, on sait que la donnée d'une base orthonormale de E de dimension n détermine un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur E.

PROPOSITION 4.2.1. *Si $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base orthonormale de E et si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $\operatorname{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n}(e_i|u(e_i))$.*

Dém : Si $A = (a_{ij})$ est la matrice de u dans la base de (e_i) alors on sait que $\operatorname{Tr}(u) = \operatorname{Tr}(a) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Or $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$ donc $(e_j|u(e_j)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(e_j|e_i) = a_{jj}$. Cette dernière égalité fournit alors directement le résultat ■

***Remarque* 4.2.1.** *La donnée d'une base (e_i) de E espace de dimension n permet de définir une structure d'espace euclidien sur E en déclarant (e_i) orthonormale.*

Dém : En effet, on définit la forme bilinéaire B par $B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ où les (x_i) et (y_i) sont les coordonnées de x et y dans la base (e_i). On vérifie alors de manière élémentaire que B est définie positive et que, par conséquent B est un produit scalaire ■

Question :

Montrer que toute matrice $\mathbb{R}$-trigonalisable est trigonalisable dans une base orthonormée.

4.2.2 Projections orthogonales

Retour à la dimension quelconque. Ici, E sera un espace préhilbertien réel.

PROPOSITION 4.2.2. ***Projection orthogonale***

Si F est un sous-espace de dimension finie n de E, alors, pour tout vecteur x de E, il existe un seul vecteur de F (noté $p_F(x)$) tel que $x - p_F(x) \perp F$.

*p_F est une application linéaire de E dans F appelée **projection orthogonale** de E sur F.*

Si $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base orthonormale de F alors (comme dans les révisions)

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)e_i.$$

Dém : Il y a plusieurs propriétés à démontrer mais tout vient de la dernière formule.
Soit $y = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x)e_i$ alors $y \in F$.

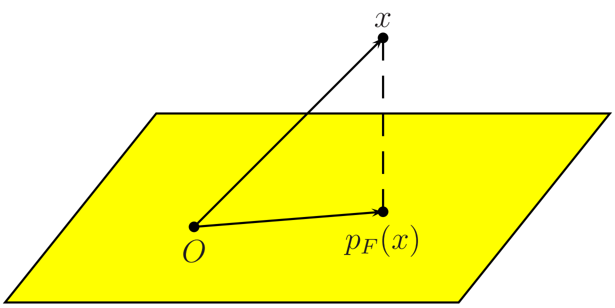
- On a $(e_j|x-y) = (e_j|x) - (e_j|y) = 0$ car $(e_j|y) = \sum_{i=1}^{n}(e_i|x).(e_j|e_i) = (e_j|x)$ (la base des (e_i) est orthonormale). Par linéarité, on en déduit que $x - y \perp F$.

- Si $z \in F$ vérifie $x - z \perp F$ alors on a $(e_j|x-z) = 0$ soit $(e_j|x) = (e_j|z)$ d'où $(e_j|y-z) = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. $y - z \in F$ et $y - z \perp F$ donc $y - z = 0$ ($y - z$ est orthogonal à lui-même et le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul). On en déduit l'unicité donc on peut définir $x \mapsto y = p_F(x)$.

- Grâce à la linéarité du produit scalaire, on peut affirmer que p_F est linéaire.

On a ainsi prouvé toutes les affirmations ■

On peut visualiser la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F par le dessin suivant



Théorème 4.2. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel E préhilbertien alors $F^\perp$ est un supplémentaire orthogonal de F.
On a en outre $\operatorname{codim} F^\perp = \dim F$ et $F^{\perp\perp} = F$.

Dém : Trois propriétés à prouver ici.

- On vient de voir, avec le théorème précédent, que $x - p_F(x) \perp F$ donc avec l'égalité $x = (x - p_F(x)) + p_F(x) \in F^\perp + F$ on en déduit que $E \subset F^\perp + F$. L'inclusion dans l'autre sens étant immédiate, on a $E = F^\perp + F$. On a vu aussi que $F \cap F^\perp = \{0\}$ donc la somme est directe $E = F^\perp \oplus F$. Ceci signifie que $F^\perp$ est un supplémentaire orthogonal de F (ce qui n'est pas vrai dans tous les cas, cf. remarque suivante).

- La deuxième propriété est une conséquence immédiate de la somme directe.

- Montrons la dernière égalité par double inclusion :

  - $F \subset F^{\perp\perp}$: en effet, si $x \in F$ alors $\forall y \in F^\perp$, $(x|y) = 0$ donc $x \perp F^\perp$ ce qui veut dire que $x \in F^{\perp\perp}$.
  - Si $x \in F^{\perp\perp}$ alors, comme on vient de voir que $F \subset F^{\perp\perp}$, on en déduit que $p_F(x) \in F \subset F^{\perp\perp}$ d'où $x - p_F(x) \in F^{\perp\perp}$ [1]. On sait aussi que $x - p_F(x) \in F^\perp$ (propriété vraie pour tout vecteur) donc $x - p_F(x) \in F^{\perp\perp} \cap F^\perp = \{0\}$ par conséquent $F^{\perp\perp} \subset F$.

  Conclusion : on a prouvé que $F = F^{\perp\perp}$ ■

[1] Ne pas oublier que F est un sous-espace vectoriel

***Remarque* 4.2.2.** *Attention, ces résultats ne marchent que si F est de dimension finie. Si on prend par exemple $\mathbb{R}[X]$ tel que la base canonique soit une base orthonormale et $F = \{P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mid \sum_{k=0}^{n} a_k = 0\}$ alors $F^\perp = \{0\}$.*

Dém : si $P \in F^\perp$, $P = a_0 + \cdots + a_n X^n$, on définit $Q = P - a_{n+1}X^{n+1}$ où $a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} a_i$. $Q \in F$ car la somme de ses coefficients est nulle donc

$$\begin{aligned}(P|Q) &= \sum_{i=0}^{n} a_i^2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

On en déduit que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $a_i = 0$ i.e. $P = 0$ donc $F^\perp = \{0\}$ ■

On retrouve les résultats de la dimension finie :

Définition 4.2.1. ***Distance à un sous-ensemble***
Si F est un sous-ensemble de E, on pose $\mathrm{d}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$.

Proposition 4.2.3. *Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E alors $\mathrm{d}(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ et ce minimum est atteint en un seul point.*
On a de plus $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \mathrm{d}(x, F)^2$.

Dém : Soit $y \in F$ alors comme $x - p_F(x) \perp F$, en utilisant Pythagore, on a

$$\begin{aligned}\|x - y\|^2 &= \|(x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)\|^2 \\ &= \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2\end{aligned}$$

donc $\|x - y\| \geqslant \|x - p_F(x)\|$ pour tout $y \in F$ avec inégalité stricte si $y \neq p_F(x)$. On en déduit trois choses

- $\mathrm{d}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\| \geqslant \|x - p_F(x)\|$,
- $\mathrm{d}(x, F) \geqslant \|x - p_F(x)\|$ car $p_F(x) \in F$,
- $\|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$ ssi $y = p_F(x)$

donc $\mathrm{d}(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ et le minimum est atteint seulement en $p_F(x)$ ■

Théorème 4.3. **Inégalité de Bessel** Si $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille orthonormale alors, pour tout élément x de E on a

$$\sum_{j=1}^{n} |(e_j|x)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

Dém : Si on prend $y = 0 \in F$ dans la démonstration précédente alors on obtient l'inégalité

$$\|x\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \geqslant \|p_F(x)\|^2$$

or $p_F(x) = \sum_{j=1}^{n} (e_j|x)e_j$ est l'expression du vecteur $p_F(x)$ dans une base orthonormale donc $\|p_F(x)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |(e_j|x)|^2$ ce qui donne l'inégalité demandée (les | ne sont pas nécessaires ici car le corps de base est $\mathbb{R}$ mais on retrouvera la même propriété dans le cas complexe et les $|$ seront essentielles) ■

Exemple : **Polynômes de Tchebichef du premier genre**

Sur $\mathcal{C}([-1,1])$ on considère le produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$. Une famille orthogonale pour ce produit scalaire est la famille des polynômes de Tchebichef :

$$T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \operatorname{Arccos} x).$$

Dém : Il faut faire attention ici car on a une intégrale sur $]-1,1[$ donc il faut utiliser le chapitre 6 d'Analyse pour bien comprendre cette notion (à voir donc en deuxième lecture si ce chapitre n'a pas déjà été traité).

En fait, il suffit de faire un changement de variable $t = \cos u$, $u \in]0,\pi[$ pour se ramener à une intégrale sur un segment :

$$\begin{aligned}(f|g) &= \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\\ &= \int_{0}^{\pi} f(\cos u)g(\cos u)\,\mathrm{d}u \text{ en changeant le signe.}\end{aligned}$$

Comme $T_n(\cos u) = \dfrac{\cos nu}{2^{n-1}}$ alors $(T_n|T_m) = \dfrac{1}{2^{n+m-2}} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos nu \cos mu\,\mathrm{d}u = 0$ si $m \neq m$ (calculs déjà faits après le théorème 4.1 page 226) ■

Question : soit $f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}_n = \operatorname{Vect}(T_k)_{k \leqslant n}$ où les T_k sont les polynômes de Tchebichef. Chercher la projection orthogonale de f sur $\mathcal{T}_n$.

4.2.3 Adjoint d'un endomorphisme

Dans cette sous-section, E est un espace vectoriel euclidien (il est donc de dimension finie).

Définition 4.2.2. ***Adjoint d'un endomorphisme***

Si u et v sont 2 endomorphismes de E, on dit que v est adjoint de u ssi$_{\text{déf}}$

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (u(x)|y) = (x|v(y)).$$

Théorème 4.4. Tout endomorphisme u de E admet un adjoint et il est unique. On le note u^* et on a : $u^{**} = u$.

Dém :

- Existence : $x \mapsto (u(x)|y)$ est une forme linéaire donc, comme E espace euclidien est canoniquement isomorphe à son dual, on sait que $\exists z \in E$ tel que $(u(x)|y) = (x|z)$, z est unique (et ceci va servir ci-dessous).
  On peut donc définir $u^*\ : y \mapsto z$, montrons que u^* est linéaire :
  $$\begin{aligned}(u(x)|\lambda y + \mu y') &= (x|u^*(\lambda y + \mu y'))\\ &= \lambda(u(x)|y) + \mu(u(x)|y') = \lambda(x|u^*(y)) + \mu(x|u^*(y'))\\ &= (x|\lambda u^*(y) + \mu u^*(y')).\end{aligned}$$
  Par unicité on en déduit que $u^*(\lambda y + \mu y') = \lambda u^*(y) + \mu u^*(y')$.

- Unicité : $(x|v(y)) = (x|v'(y))$ et on prend $x = v(y) - v'(y)$ (ou on utilise l'unicité invoquée ci-dessus) ■

***Remarque* 4.2.3.** *En dimension quelconque, un endomorphisme n'admet pas toujours un adjoint : exemple avec $u(f) = f(0)$ où E est l'ensemble des fonctions continues sur $[-1,1]$ muni du produit scalaire : $(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.*

Dém : Proposée en question à la fin de cette section ■

PROPOSITION 4.2.4. *L'application $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto u^* \in \mathcal{L}(E)$ est un automorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$ qui vérifie $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$.*

Dém :

- La linéarité est une conséquence immédiate de la linéarité du produit scalaire.
- L'involutivité est évidente : $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x)|y) = (x|u^*(y)) = (u^{**}(x)|y)$ donc $u^{**} = u$.
- La dernière propriété se démontre en revenant à la définition :

$$\begin{aligned}(u \circ v(x)|y) &= (u(v(x))|y) = (v(x)|u^*(y)) = (x|v^* \circ u^*(y))\\ &= (x|(u \circ v)^*(y))\end{aligned}$$

  d'où l'égalité $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ ■

THÉORÈME 4.5. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

(i) On a $u(F) \subset F \Leftrightarrow u^*(F^\perp) \subset F^\perp$.

(ii) (1) $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$, (2) $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$, (3) $\operatorname{Rg}(u^*) = \operatorname{Rg}(u)$.

(iii) Si $u \in \mathrm{GL}(E)$ alors $u^* \in \mathrm{GL}(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

Dém :

- (i) On écrit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(\forall y \in F,\ u(y) \in F) &\Leftrightarrow (\forall y \in F,\ \forall z \in F^\perp,\ (u(y)|z) = 0) \text{ car } F^{\perp\perp} = F\\ &\Leftrightarrow (\forall y \in F,\ \forall z \in F^\perp,\ (y|u^*(z)) = 0) \text{ passage à l'adjoint}\\ &\Leftrightarrow (\forall z \in F^\perp,\ u^*(z) \in F^\perp)\end{aligned}$$

  donc $u(F) \subset F \Leftrightarrow u^*(F^\perp) \subset F^\perp$ (propriété très importante qui servira pour démontrer le théorème fondamental de ce chapitre).

- (ii)
  - (1) Là encore on a les équivalences

$$\begin{aligned}y \in \operatorname{Ker} u^* &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ (u^*(y)|x) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall x \in E,\ (y|u(x)) = 0\\ &\Leftrightarrow y \in (\operatorname{Im} u)^\perp\end{aligned}$$

    donc on a égalité des ensembles $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

– (2) se démontre alors en échangeant les rôles de u et u^* dans (1) :

$$\operatorname{Ker} u^{**} = \operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u^*)^\perp$$

et en utilisant la relation $(F^\perp)^\perp = F$ valable pour tout sous-espace vectoriel en dimension finie :

$$(\operatorname{Ker} u)^\perp = [(\operatorname{Im} u^*)^\perp]^\perp = \operatorname{Im} u^*.$$

– (3) devient immédiat grâce à la formule du rang :

$$\begin{aligned}\dim E &= \operatorname{Rg}(u) + \dim \operatorname{Ker} u = \operatorname{Rg}(u) + \dim(\operatorname{Im} u^*)^\perp \\ &= \operatorname{Rg}(u) + \dim E - \operatorname{Rg}(u^*)\end{aligned}$$

donc $\operatorname{Rg}(u) = \operatorname{Rg}(u^*)$.

- (iii) On utilise la proposition 4.2.4

$$\begin{aligned}(u \circ u^{-1})^* &= (u^{-1})^* \circ u^* \\ &= \operatorname{Id}_E^* = \operatorname{Id}_E\end{aligned}$$

et comme on est en dimension finie, on en déduit que u^* est inversible, d'inverse $(u^{-1})^*$ ■

Proposition 4.2.5. *Si $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base orthonormée et si M est la matrice de u dans cette base alors la matrice de u^* est M^T.*
On a alors $\operatorname{Tr}(u^*) = \operatorname{Tr}(u)$, $\det(u^*) = \det(u)$.

Dém : Si $M = (a_{ij})$ alors $u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}e_k$ donc $a_{ij} = (u(e_j)|e_i)$ (déjà vu à la proposition 4.2.1 page 228). De même $(u^*(e_i)|e_j) = a^*_{ji}$ si $M^* = (a^*_{ij})$ est la matrice de u^*. On a donc

$$a_{ij} = (u(e_j)|e_i) = (e_j|u^*(e_i)) = a^*_{ji}$$

ce qui signifie que $M^* = M^{\mathrm{T}}$ ■

Définition 4.2.3. ***Endomorphisme autoadjoint***
$u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint (ou symétrique) ssi$_{\text{déf}}$ $(u(x)|y) = (x|u(y))$ ssi $u^* = u$. L'ensemble des endomorphismes autoadjoints est noté $\mathcal{S}(E)$

Proposition 4.2.6. *L'ensemble des endomorphismes autoadjoints est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.*

Dém : $0 \in \mathcal{S}(E)$ donc cet ensemble est non vide.
Si u et v sont autoadjoints alors

$$((\lambda u+\mu v)(x)|y) = \lambda(u(x)|y)+\mu(u(x)|y) = \lambda(x|u(y))+\mu(x|v(y)) = (x|(\lambda u+\mu v)(y))$$

donc $\lambda u + \mu v \in \mathcal{S}(E)$ ■

Proposition 4.2.7. *Si M est la matrice de u dans une base orthonormale alors :*

$$u \in \mathcal{S}(E) \Leftrightarrow M = M^T.$$

Dém : Évident avec la prop 4.2.5 ■

***Remarque* 4.2.4.**

(i) *On a* $\dim \mathcal{S}(E) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *en utilisant les matrices.*
Dém : Il suffit de prouver que la dimension de l'ensemble des matrices carrées symétriques vaut $\dfrac{n(n+1)}{2}$*. Or une base de cet espace vectoriel est donné par les matrices* $E_{ij}+E_{ji}$*,* $i<j$ *et* E_{ii} *où* E_{ij} *est la matrice ne contenant que des 0 sauf un 1 à l'intersection de la* i*-ième ligne et de la* j*-ième colonne. Si on dénombre l'ensemble des indices* (i,j) *avec* $i<j$ *alors, il suffit de connaître le nombre de sous-ensembles à deux éléments de l'ensemble* $[\![1,n]\!]$ *(et d'ordonner les éléments de ces sous-ensembles). On sait alors qu'il y en a* $\dbinom{n}{2}=\dfrac{n(n-1)}{2}$*, il faut y rajouter les matrices* E_{ii} *qui sont au nombre de* n *pour trouver finalement la réponse* ■

(ii) *Si* N *est la matrice de la forme quadratique qui définit le produit scalaire dans une base quelconque, alors* u *est symétrique ssi* $M^TN=NM$ *où* M *est la matrice de* u *dans cette base.*
Dém : Si X *et* Y *sont les matrices (unicolonnes) des vecteurs* x *et* y *alors*

$$\begin{aligned}(u(x)|y) &= (MX)^TNY = X^TM^TNY\\ (x|u(y)) &= X^TNMY\end{aligned}$$

et ceci pour tous les vecteurs x *et* y *donc* $M^TN=NM$ *(et dans une base orthonormée* $N=I_n$*, on retrouve bien le résultat classique)* ■

Proposition 4.2.8. *p est un projecteur orthogonal ssi $p^2=p$ et $p^*=p$.*

Dém :

- $(\Rightarrow)$ $p^2=p$ est une propriété caractéristique des projecteurs. Ensuite, comme $y-p(y)\perp \operatorname{Im} p$ [2]

$$\begin{aligned}(p(x)|y) &= (p(x)|p(y)) + (p(x)|y-p(y)) = (p(x)|p(y))\\ &= (x|p(y)) \text{ par symétrie}\end{aligned}$$

donc $p^*=p$.

- $(\Leftarrow)$ Si $p^2=p$, p est un projecteur, et si $p^*=p$ alors

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} p^* = (\operatorname{Im} p)^\perp$$

ce qui caractérise un projecteur orthogonal ■

Définition 4.2.4. ***Endomorphisme autoadjoint positif***
Si $u\in\mathcal{S}(E)$*, on dit que* u *est positif ssi*$_{\text{déf}}$ $\forall x\in E,\ (u(x)|x)\geqslant 0$.
On dit que u *est défini positif ssi*$_{\text{déf}}$ $\forall x\in E\setminus\{0\},\ (u(x)|x)>0$.
Ce vocabulaire se transmet à la matrice associé dans une base orthonormale et on aura les notions de matrice symétrique positive et symétrique définie positive.

[2] En effet $p(y-p(y)) = p(y)-p^2(y) = 0 \Rightarrow y-p(y)\in\operatorname{Ker} p$.

Proposition 4.2.9. *Pour tout u de $\mathcal{L}(E)$, les endomorphismes $u \circ u^*$ et $u^* \circ u$ sont autoadjoints positifs.*
Si u est dans $\mathrm{GL}(E)$ alors $u \circ u^*$ et $u^* \circ u$ sont autoadjoints définis positifs.

Dém :

- $\forall (x,y) \in E^2$, $(u \circ u^*(x)|y) = (u^*(x)|u^*(y)) = (x|u \circ u^*(y))$ donc $u \circ u^*$ est autoadjoint.
- Pour tout $x \in E$ on a

$$(u \circ u^*(x)|x) = (u^*(x)|u^*(x)) = \|u^*(x)\|^2 \geqslant 0$$

donc $u \circ u^*$ est positif.

- Si $u \in \mathrm{GL}(E)$ alors, si $x \neq 0$, $u(x) \neq 0$ donc $(u \circ u^*(x)|x) = \|u^*(x)\|^2 > 0$ et en conséquence, $u \circ u^*$ est autoadjoint défini positif.

Par symétrie, il en est de même de $u^* \circ u$ ■

Proposition 4.2.10. *Grâce à l'adjoint, on a une caractérisation des automorphismes orthogonaux :*

$$u \in \mathrm{O}(E) \Leftrightarrow u^* \circ u = u \circ u^* = \mathrm{Id}_E\,.$$

Dém : On sait qu'une application linéaire est un automorphisme orthogonal ssi $\forall x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$ ce qui est encore équivalent (par polarisation) à $\forall (x,y) \in E^2$, $(u(x)|u(y)) = (x|y)$.
Ensuite, comme on est en dimension finie, $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$ signifie que u^* et u sont inverses l'un de l'autre donc que $u \circ u^* = \mathrm{Id}_E$. On procède maintenant par équivalences :

$$\begin{aligned}
u \in \mathrm{O}(E) &\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2,\ (u(x)|u(y)) = (x|y)\\
&\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2,\ (x|u^* \circ u(y)) = (x|y)\\
&\Leftrightarrow \forall (x,y) \in E^2,\ (x|u^* \circ u(y) - y) = 0\\
&\Leftrightarrow \forall y \in E,\ u^* \circ u(y) = y\\
&\Leftrightarrow u^* \circ u = \mathrm{Id}_E \blacksquare
\end{aligned}$$

Proposition 4.2.11. *Si a et b sont deux vecteurs unitaires distincts alors la réflexion $s_{a,b}$ qui échange a et b s'écrit $s_{a,b}(x) = x - 2(e|x)e$ où $e = \dfrac{b-a}{\|b-a\|}$.*
Les seules réflexions qui échangent $\mathbb{R}a$ et $\mathbb{R}b$ sont $s_{a,b}$ et $s_{a,-b}$.

Dém :

- On sait qu'une réflexion s est une symétrie par rapport à un hyperplan. Si H est l'hyperplan en question et $D = H^\perp$ la droite orthogonale à H alors $s(x) = x$ pour tout $x \in H$ et $s(x) = -x$ pour tout $x \in D$. Si e est un vecteur unitaire de D et si $x = y + \lambda e$ est la décomposition d'un vecteur de E dans la somme directe orthogonale $H \oplus D$ alors $s(x) = y - \lambda e$.
Si $s_{a,b}$ échange les vecteurs a et b alors, avec $a = y + \lambda e$ et $b = z + \mu e$

(décomposition signalée ci-dessus), $s_{a,b}(a) = b$ donne $y - \lambda e = z + \mu e$ donc $y = z$ et $\lambda = -\mu$. On retrouve $e = \dfrac{b-a}{\|b-a\|}$.
Si maintenant $x = y + \lambda e$ alors $s(x) = y - \lambda e = x - 2\lambda e$ or $(e|x) = \lambda$ ce qui donne le résultat.
On remarque aussi que $s_{a,b}$ est unique.

- Si s échange $\mathbb{R}a$ et $\mathbb{R}b$ alors soit s échange a et b donc $s = s_{a,b}$ soit s échange a et $-b$ donc $s = s_{a,-b}$ ■

Questions :

(i) On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est antisymétrique ssi $u^* = -u$.

Montrer que u est antisymétrique ssi $\forall x \in E$, $(x|u(x)) = 0$.

En dimension 3, montrer que, si u est antisymétrique, $\exists t \in E \mid u(x) = t \wedge x$.

(ii) Sur $\mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire qui rend la base canonique orthonormale, chercher l'adjoint de l'opérateur dérivation.

(iii) Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ où E et F sont des espaces euclidiens. Montrer qu'il existe $v \in \mathcal{L}(F,E)$, unique, tel que $\forall (x,y) \in E\times F,\ (u(x)|y) = (x|v(y))$.

(iv) Prouver l'affirmation de la remarque 4.2.3 page 232 (par l'absurde).

(v) Montrer que $\operatorname{Ker}(u^* \circ u) = \operatorname{Ker} u$.

4.2.4 Réduction des endomorphismes autoadjoints

a) Théorème

Lemme 4.6. Si u est autoadjoint alors le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{R}$.

Dém : Dans une base orthonormée, on prend la matrice M de u. M est une matrice à coefficients réels mais son polynôme caractéristique P admet au moins une racine complexe.
Soit λ une valeur propre (éventuellement complexe) de M et X un vecteur propre associé [3] alors

$$\begin{aligned} \overline{X}^{\mathrm{T}} M X &= \lambda \overline{X}^{\mathrm{T}} X && \text{car } MX = \lambda X \\ &= \overline{X}^{\mathrm{T}} \overline{M}^{\mathrm{T}} X && \text{car } M \text{ est symétrique réelle} \\ &= (\overline{MX})^{\mathrm{T}} X = \overline{\lambda}\overline{X}^{\mathrm{T}} X \end{aligned}$$

et $\overline{X}^{\mathrm{T}} X = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0$ car X est non nul.
On a ainsi $\lambda \overline{X}^{\mathrm{T}} X = \overline{\lambda}\overline{X}^{\mathrm{T}} X$ donc $\lambda \in \mathbb{R}$ ■

[3] Les composantes de X peuvent être complexes aussi.

Théorème 4.7. Théorème fondamental
Si u est un endomorphisme autoadjoint de E espace vectoriel euclidien alors

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$$

et les E_λ sont orthogonaux

Dém :

- On écarte le cas où u est une homothétie qui ne pose pas de problème.
- On procède alors par récurrence (forte) sur $n = \dim E$: on suppose que la propriété est réalisé pour tout espace vectoriel de dimension $\leqslant n$ et tout endomorphisme autoadjoint de cet espace vectoriel.
  - Si $n = 1$ alors tous les endomorphismes sont diagonalisables.
  - On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Soit E de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{S}(E)$. On sait d'après le lemme qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
    * On utilise la prop 4.5 page 232 : si $F = E_\lambda(u)^\perp$ alors $u(F) \subset F$.
    * On applique ensuite la propriété de récurrence à F et $v = u_{||F}$: $F = \displaystyle\bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}(v)} E_\mu(v)$ (somme directe orthogonale).
    * On a alors $E = E_\lambda(u) \oplus \displaystyle\bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}(v)} E_\mu(v)$ mais on sait que $E_\mu(v) = E_\mu(u)$ et $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\} \cup \mathrm{Sp}(v)$ donc $E = \displaystyle\bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}(u)} E_\mu(u)$.

On a ainsi prouvé la propriété dans tous les cas ■

Corollaire 4.8. Si M est symétrique alors on peut écrire $M = UDU^T$ où D est une matrice diagonale et U une matrice orthogonale.

Dém : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de matrice M alors u est autoadjoint. $\mathbb{R}^n$ est donc somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u. On prend alors une base orthonormale (pour le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^n$) dans chaque sous-espace propre de u et on construit une base de E en collectant toutes ces bases. Dans la base obtenue, la matrice de u est diagonale et la matrice de passage est orthogonale car elle correspond à un changement de base orthogonale.
On a donc $M = UDU^{-1} = UDU^{\mathrm{T}}$ ■

***Remarque* 4.2.5.**

(i) *On peut donc diagonaliser u dans une b.o.n. mais ce n'est pas une obligation (en particulier si u a des vap multiples).*

(ii) *Si u est autoadjoint positif alors ses valeurs propres sont toutes positives et même strictement positives si u est défini positif.*

Dém : Si x est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ alors $(u(x)|x) = \lambda\|x\|^2 \geqslant 0$ donc $\lambda \geqslant 0$. Si u est défini positif alors l'inégalité est stricte donc $\lambda > 0$ ■

(*iii*) *Si $M^T N = NM$ où N est une matrice symétrique définie positive alors M est diagonalisable (voir remarque 4.2.4 (ii) page 234).*

Dém : N est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ (mais pas le produit scalaire canonique) alors M est la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint pour ce produit scalaire donc M est diagonalisable ■

(*iv*) *Le dernier corollaire n'est vrai que pour les matrices à coefficients réels.*

Applications :

(*i*) En Mécanique, on utilise cette propriété avec le tenseur d'inertie pour trouver les axes principaux d'un solide en mouvement.

(*ii*) En analyse numérique où beaucoup de problèmes d'optimisation font intervenir des matrices symétriques.

b) Application à la réduction des formes quadratiques réelles

Soit Q une forme quadratique définie sur E espace vectoriel euclidien et B sa forme polaire ; on sait que $B(x, .) \in E^*$ et donc que $\forall x \in E$, $\exists z \in E$: $\forall y \in E$ $B(x, y) = (z|y)$. La correspondance $x \to z$ est fonctionnelle et linéaire, on note u l'endomorphisme ainsi défini.

Dém : On utilise ici le fait que toute forme linéaire f sur un espace euclidien s'écrit de manière unique sous la forme $f(y) = (z|y)$. Grâce à l'unicité du vecteur z, on peut ainsi définir une fonction qui à $x \in E$ fait correspondre l'unique $z \in E$ tel que $\forall y \in E$, $B(x, y) = (z|y)$. On pose $z = u(x)$ et grâce à la linéarité de B par rapport à x sa première variable, u est linéaire ■

Définition 4.2.5. ***Endomorphisme autoadjoint associé à une forme bilinéaire***
u définie par $B(x, y) = (u(x)|y)$ est appelé endomorphisme autoadjoint associé à B.

Théorème 4.9. Il existe une base orthonormale dans laquelle $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2$ où les λ_i sont les valeurs propres de u.
De plus, si $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ alors $\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant Q(x) \leqslant \lambda_n \|x\|^2$.

Dém : Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u endomorphisme autoadjoint associé à Q (c'est le théorème fondamental) alors, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et

$$\begin{aligned} Q(x) &= (u(x)|x) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i | \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \end{aligned}$$

compte tenu de l'écriture du produit scalaire dans une base orthonormée.
Si on ordonne les valeurs propres de u alors, pour tout i, $\lambda_1 x_i^2 \leqslant \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n x_i^2$ donc, en additionnant toutes ces inégalités on obtient

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

soit $\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant Q(x) \leqslant \lambda_n \|x\|^2$ ■

***Remarque* 4.2.6.** *On suppose que $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$.*

(i) *On a $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_1$ et $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_n$.*

Dém : On sait déjà que $\inf\limits_{\|x\|=1} Q(x) \geqslant \lambda_1$ vu le théorème précédent or on a $Q(e_1) = (u(e_1)|e_1) = \lambda_1$ donc $\lambda_1 \geqslant \inf\limits_{\|x\|=1} Q(x)$ d'où $\inf\limits_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_1$ et cette borne inférieure est atteinte donc c'est bien un minimum ■

(ii) *Si Q est définie positive alors $\lambda_1 > 0$.*

Dém : Immédiat avec le (i) mais en plus on a équivalence ■

c) Application à la recherche de l'équation réduite d'une conique
Soit une courbe d'équation $g(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\varepsilon y + \varphi = 0$ dans un repère orthonormal associé à la forme quadratique $Q(x,y) = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$, on suppose que l'ensemble des points M qui vérifient cette équation n'est pas l'ensemble vide ni un ensemble réduit à un point.
Grâce au théorème précédent, on sait que l'on peut faire un changement de base orthonormale tel que, dans le nouveau repère, la courbe admette pour équation $g'(x',y') = \alpha' x'^2 + \gamma' y'^2 + 2\delta' x' + 2\varepsilon' y' + \varphi' = 0$.
On peut faire alors la discussion suivante (en supposant $(\alpha',\gamma') \neq (0,0)$) :

(i) $\alpha' > 0$, $\gamma' > 0$, par translation on se ramène au cas suivant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (équation d'une ellipse)}$$

où l'on a éliminé l'ensemble vide et l'ensemble réduit à un point.

Dém : On réécrit l'équation sous la forme

$$\alpha' \Big(\underbrace{x' + \frac{\delta'}{\alpha'}}_{=X}\Big)^2 + \gamma' \Big(\underbrace{y' + \frac{\varepsilon'}{\gamma'}}_{=Y}\Big)^2 = \underbrace{\frac{\delta'^2}{\alpha'} + \frac{\varepsilon'^2}{\gamma'} - \varphi'}_{=\psi'}$$

soit $\alpha' X^2 + \gamma' Y^2 = \psi'$.

- Si $\psi' \leqslant 0$ alors on a soit l'ensemble vide (si $\psi' < 0$) soit un point–l'origine ici–(si $\psi' = 0$). On écarte ce cas.
- Si $\psi' > 0$ alors on divise par ψ' et on pose $a^2 = \dfrac{\psi'}{\alpha'}$ et $b^2 = \dfrac{\psi'}{\gamma'}$ ce qui donne bien l'équation $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ ■

(ii) $\alpha' > 0$, $\gamma' < 0$, par translation on se ramène donc aux cas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (équation d'une hyperbole)}$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ (réunion de deux droites)}$$

où l'on a réduit le nombre de cas par symétries.

Dém : On réécrit là aussi l'équation sous la forme

$$\alpha'\Big(\underbrace{x' + \frac{\delta'}{\alpha'}}_{=X}\Big)^2 + \gamma'\Big(\underbrace{y' + \frac{\varepsilon'}{\gamma'}}_{=Y}\Big)^2 = \underbrace{\frac{\delta'^2}{\alpha'} + \frac{\varepsilon'^2}{\gamma'} - \varphi'}_{=\psi'}$$

soit $\alpha' X^2 + \gamma' Y^2 = \psi'$. On se ramène au cas où $\psi' \geqslant 0$ en échangeant éventuellement X et Y.

- Si $\psi' > 0$ alors on divise par ψ' et on pose $a^2 = \dfrac{\psi'}{\alpha'}$ et $b^2 = -\dfrac{\psi'}{\gamma'}$ ce qui donne bien l'équation $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$.
- Si $\psi' = 0$ alors on a $\alpha' X^2 + \gamma' Y^2 = 0$ ce qui peut se ramener (à une constante multiplicative près) à $\dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 0$ ■

(iii) $\alpha' > 0$, $\gamma' = 0$, par translation on a

$$x^2 = 2py \text{ parabole } (p \neq 0)$$
$$x^2 = a^2 \text{ deux droites parallèles ou confondues.}$$

Dém : On a cette fois-ci

$$\alpha'\Big(\underbrace{x' + \frac{\delta'}{\alpha'}}_{=X}\Big)^2 + 2\varepsilon' y' = \underbrace{\frac{\delta'^2}{\alpha'} - \varphi'}_{=\psi'}$$

et on distingue les deux cas

- $\varepsilon' \neq 0$, on pose $Y = y' - \dfrac{\psi'}{2\varepsilon'}$, $p = \dfrac{\varepsilon'}{\alpha'}$ d'où $X^2 = 2pY$ en divisant par α'.
- Si $\varepsilon' = 0$ alors, en divisant par α' on obtient $X^2 = \dfrac{\psi'}{\varepsilon'} = \pm a^2$.
  - Si $X^2 = -a^2$ avec $a \neq 0$, on obtient l'ensemble vide (cas écarté).
  - Si $X^2 = a^2$ avec $a \neq 0$, on obtient deux droites parallèles $X = a$ et $X = -a$.
  - Enfin, si $X^2 = 0$ on obtient une seule droite correspondant au cas limite du précédent $(a \to 0)$ et c'est la raison pour laquelle on dit qu'on a deux droites confondues ■

DÉFINITION 4.2.6. ***Conique propre, conique non dégénérée***
Les coniques propres correspondent aux cas de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole (on élimine les droites).
Si, de plus, la forme quadratique Q est non dégénérée, on dit que la conique est non dégénérée (on obtient soit une ellipse, soit une hyperbole).

Questions :

(i) Soit A une matrice symétrique telle qu'il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ avec $A^k = I_n$. Montrer que $A^2 = I_n$.

(ii) Si A est symétrique, montrer que e^A est symétrique définie positive.

(iii) Diagonaliser $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

(iv) Que dire de la réduction d'une matrice antisymétrique ?

(v) Réduire la forme quadratique $Q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 - 3x_3^2 - 8x_2x_3 + 2x_3x_1 - 4x_1x_2$ dans le groupe orthogonal (i.e. trouver un changement de base orthonormale dans lequel Q s'écrit sous forme de carrés indépendants).

(vi) Même question avec $Q(x) = 2 \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$.

(vii) Soit A et B deux matrices symétriques réelles, montrer l'équivalence des trois propriétés :

a) $AB = BA$

b) AB symétrique.

c) Il existe $P \in \mathrm{O}(n)$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient diagonales.

4.2.5 Quadriques usuelles

Ce paragraphe est censé être vu sous forme de travaux pratiques.

a) GÉNÉRALITÉS, FORMES RÉDUITES

DÉFINITION 4.2.7. ***Quadrique***
Si Φ est une forme quadratique et φ une forme affine (i.e. un polynôme du 1^{er} degré) alors l'ensemble $Q(M) = \Phi(M) + \varphi(M) = 0$ est une quadrique $\mathcal{Q}$. Son équation s'écrit :

$$Q(M) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + 2\alpha x + 2\beta y + 2\gamma z + \delta = 0.$$

On sait qu'il existe une b.o.n. dans laquelle on aura $\Phi(M) = \lambda X^2 + \mu Y^2 + \nu Z^2$.

• Si $\lambda\mu\nu \neq 0$ alors, après une translation on obtient l'équation

$$\lambda X'^2 + \mu Y'^2 + \nu Z'^2 = \tau \quad \operatorname{Rg}\Phi = 3$$

• Si $\lambda\mu \neq 0$, $\nu = 0$ alors, toujours après une translation :

$$\lambda X'^2 + \mu Y'^2 + \omega Z' = \tau \quad \operatorname{Rg}\Phi = 2$$

• Si $\lambda \neq 0$, $\mu = \nu = 0$ alors, après une translation, on a $\lambda X'^2 + \pi Y' + \omega Z' = \tau$ et après une rotation :

$$\lambda X'^2 + \rho Y'' = \tau \quad \operatorname{Rg}\Phi = 1$$

Définition 4.2.8. ***Direction principale***
Toute direction de droite dirigée par un vecteur propre est dite direction principale.

b) Étude du cas où Φ est de rang 3

• Recherche du centre de symétrie : on cherche (x_0, y_0, z_0) tel que l'on ait $Q(x+x_0, y+y_0, z+z_0) = \Phi(x,y,z) + Q(x_0,y_0,z_0)$, alors, en utilisant la formule de Taylor, on voit que cette recherche est équivalente à la résolution du système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0,z_0) = ax_0 + dy_0 + ez_0 + \alpha = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) = dx_0 + by_0 + fz_0 + \beta = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) = ex_0 + fy_0 + cz_0 + \gamma = 0 \end{cases}$$

qui admet une solution unique car Φ est de rang 3. En effet, si $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ et $H = (x, y, z)$ alors

$$Q(M_0 + H) = Q(M_0) + \underbrace{x\frac{\partial Q}{\partial x}(M_0) + y\frac{\partial Q}{\partial y} + z\frac{\partial Q}{\partial z}(M_0)}_{=0} + \Phi(H)$$

et si $M_0 + H \in \mathcal{Q}$ alors $M_0 - H \in \mathcal{Q}$ (car $\Phi(-H) = \Phi(H)$) donc M_0 est centre de symétrie (si $\mathcal{Q} \neq \emptyset$).
• Équation réduite :

$$\varepsilon_1 \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon_2 \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon_3 \frac{z^2}{c^2} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Les ε_i étant égaux à ± 1 et n'étant pas tous négatifs.
• **Ellipsoïde** : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Paramétrisation $\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\cos\theta \end{cases}$, $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi[$.

Par une première affinité, on se ramène au cas où $a = b$, on obtient alors un ellipsoïde de révolution, par une deuxième affinité, on trouve une sphère.
Compte tenu des propriétés évoquées ci-dessus, on peut dire que lorsqu'on coupe un ellipsoïde par un plan, on trouve dans tous les cas une ellipse.

• **Hyperboloïde à deux nappes** : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$.

Paramétrisation $\begin{cases} x = a\,\mathrm{sh}\,u\cos v = a\tan\theta\cos v \\ y = b\,\mathrm{sh}\,u\sin v = b\tan\theta\sin v \\ z = c\varepsilon\,\mathrm{ch}\,u = c/\cos\theta \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}^+$, $v \in [0, 2\pi[$, $\varepsilon = \pm 1$ (on peut aussi prendre le paramètre θ dans $]-\pi/2, +\pi/2[\cup]+\pi/2, +3\pi/2[$).
On obtient 2 nappes S^+ et S^-.
Par une affinité, on se ramène au cas où $a = b$. On a alors une H2 de révolution.
Si on coupe par le plan $z = \lambda$, on trouve une ellipse (à condition de choisir une valeur de λ convenable!). Si on coupe par le plan $x = \alpha$, on trouve une hyperbole.

• **Hyperboloïde à une nappe** : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

Paramétrisation $\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\,u\cos v \\ y = b\,\mathrm{ch}\,u\sin v \\ z = c\,\mathrm{sh}\,u \end{cases}$, $u\in\mathbb{R}$, $v\in[0,2\pi[$ (on peut aussi remplacer le paramètre u par le paramètre θ).
Par une affinité, on se ramène au cas où $a=b$, on a alors un H1 de révolution.
Si on coupe par le plan $z=\lambda$, on trouve toujours une ellipse. Si on coupe par le plan d'équation $x=\alpha$, on trouve une hyperbole ou 2 droites.

Théorème 4.10. Un H1 est une surface réglée.

Dém : En effet, on peut écrire $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y^2}{b^2}$ i.e. $PQ=RS$ en posant $P=\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}$, $Q=\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}$, $R=1+\dfrac{y}{b}$ et $S=1-\dfrac{y}{b}$. On obtient les génératrices par les équations $D_\theta\begin{cases}\cos\theta P=\sin\theta R\\ \cos\theta S=\sin\theta Q\end{cases}$ et $D'_\varphi\begin{cases}\cos\varphi P=\sin\varphi S\\ \cos\varphi R=\sin\varphi Q\end{cases}$, θ et φ décrivant l'ensemble $[0,+\pi[$ ■

***Remarque* 4.2.7.**

(*i*) *Pour tout couple (θ,φ) de $[0,+\pi[$, les droites D_θ et D'_φ sont coplanaires et contenues dans le plan*
$$\cos\theta\cos\varphi P-\sin\theta\cos\varphi R-\cos\theta\sin\varphi S+\sin\theta\sin\varphi Q=0.$$

(*ii*) *Si $\theta\neq\theta'$ alors D_θ et $D_{\theta'}$ ne sont pas coplanaires (et on a la même propriété avec les D'_φ).*

(*iii*) *Par chaque point d'un H1 passe une seule droite D_θ et une seule droite D'_φ où θ et φ sont éléments de $[0,+\pi[$.*

(*iv*) *Un H1 ne contient pas d'autre droite.*

(*v*) *Si on cherche l'intersection de D_θ avec le plan xOy on obtient une ellipse et une autre paramétrisation du H1 :* $\begin{cases} x &= a\sin 2\theta + ta\cos 2\theta \\ y &= b\cos 2\theta + tb\sin 2\theta \\ z &= tc \end{cases}$

(*vi*) *Si un H1 est de révolution (par rapport à Oz) alors il est engendré par la rotation d'une droite D_θ autour de Oz.*

• Étude de $\varepsilon_1\dfrac{x^2}{a^2}+\varepsilon_2\dfrac{y^2}{b^2}+\varepsilon_3\dfrac{z^2}{c^2}=0$:
On se ramène au cas $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$: **cône de sommet O**.

Paramétrisation $\begin{cases} x = au\cos v \\ y = bu\sin v \\ z = u \end{cases}$, $u\in\mathbb{R}$, $v\in[0,2\pi[$.
Par une affinité, on se ramène au cas où $a=b$ et on obtient un cône de révolution.
Section par des plans : $z=\lambda$ donne des ellipses, $x=\alpha$ ou $y=\beta$ donnent des hyperboles et si l'on coupe par un plan parallèle à une génératrice (mais ne la

contenant pas), on trouve une parabole. On trouve en fait toutes les coniques, ce qui explique l'origine de cette appellation.

c) Étude du cas où $\mathrm{Rg}(\Phi) = 2$

On a l'équation réduite : $\varepsilon_1 \dfrac{x^2}{a^2} + \varepsilon_2 \dfrac{y^2}{b^2} + \alpha z + \beta = 0$

1er cas : $\alpha \neq 0$ (par translation, on se ramène au cas où $\beta = 0$), on trouve alors les surfaces suivantes :

• $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ **paraboloïde elliptique** (P.E.).

Paramétrisation $\begin{cases} x = au\cos v \\ y = bu\sin v \\ z = u^2 \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in [0, 2\pi[$.

Par une affinité, on se ramène au cas d'un paraboloïde de révolution (obtenu en faisant tourner une parabole autour de son axe).
Section par des plans $z = \lambda$ $(\lambda > 0)$: ellipse, $x = \lambda$: parabole.

• $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$ **paraboloïde hyperbolique** (P.H.).

Paramétrisation $\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}(u+v) \\ y = \dfrac{b}{2}(v-u) \\ z = uv \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}$. Cette paramétrisation prouve que cette surface est réglée et que l'on a deux familles de droites : D_u passant par le point $\begin{pmatrix} au/2 \\ -bu/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, parallèle au vecteur $\begin{pmatrix} a/2 \\ b/2 \\ u \end{pmatrix}$ (et on définit de même D_v).
Section par des plans $z = \lambda$ $(\lambda > 0)$: hyperbole, $x = \lambda$: parabole.

***Remarque* 4.2.8.**

(*i*) *Par affinité, on se ramène au cas où $a = b$ et en faisant une rotation, l'équation s'écrit : $\alpha z = xy$. Les génératrices rectilignes sont dans ce cas données par* $\begin{cases} x = \lambda \\ \alpha z = \lambda y \end{cases}$ *ou* $\begin{cases} y = \mu \\ \alpha z = \mu y \end{cases}$.

(*ii*) *Par un point passent deux génératrices rectilignes.*

(*iii*) *Deux génératrices distinctes d'un même système ne sont pas coplanaires.*

(*iv*) *S ne contient pas d'autre droite que ces génératrices.*

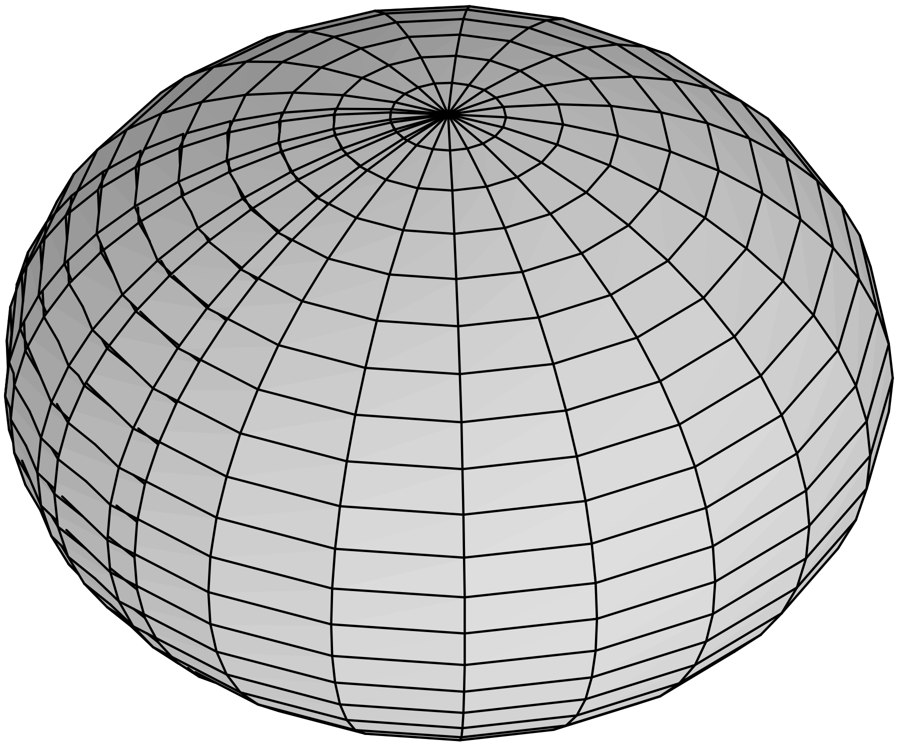
2ième cas : $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$

• $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **cylindre elliptique**, on sait à quoi s'en tenir.

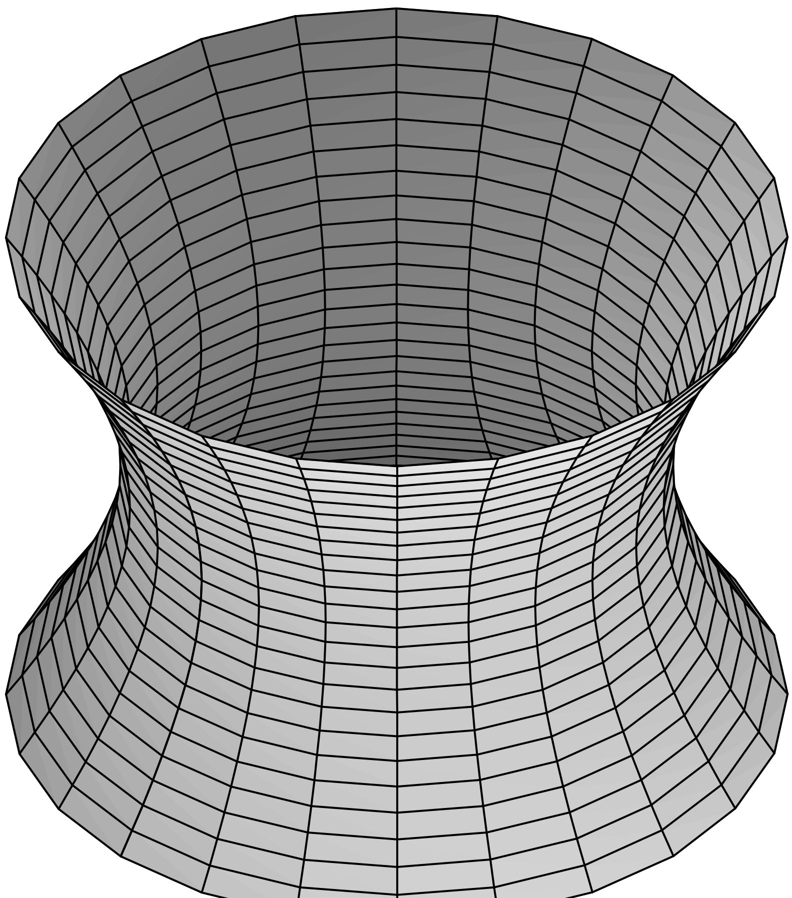
• $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ **cylindre hyperbolique** idem.

***Remarque* 4.2.9.** *Le cas $\beta = 0$ nous donne la réunion de deux plans sécants (pouvant être éventuellement confondus).*

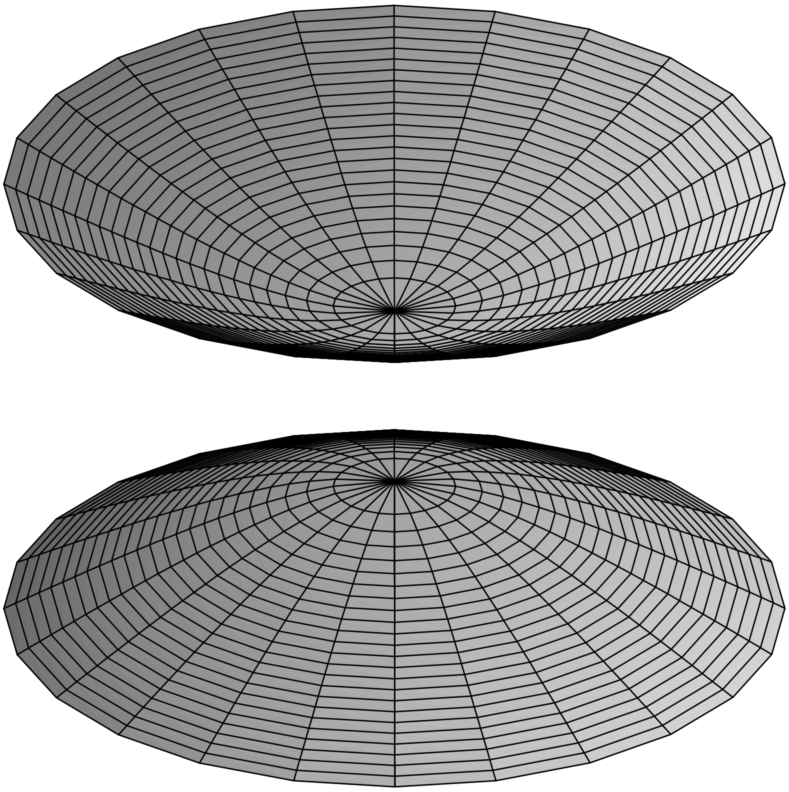
Voici maintenant les tracés des différentes quadriques (on a écarté le cas des cylindres) :



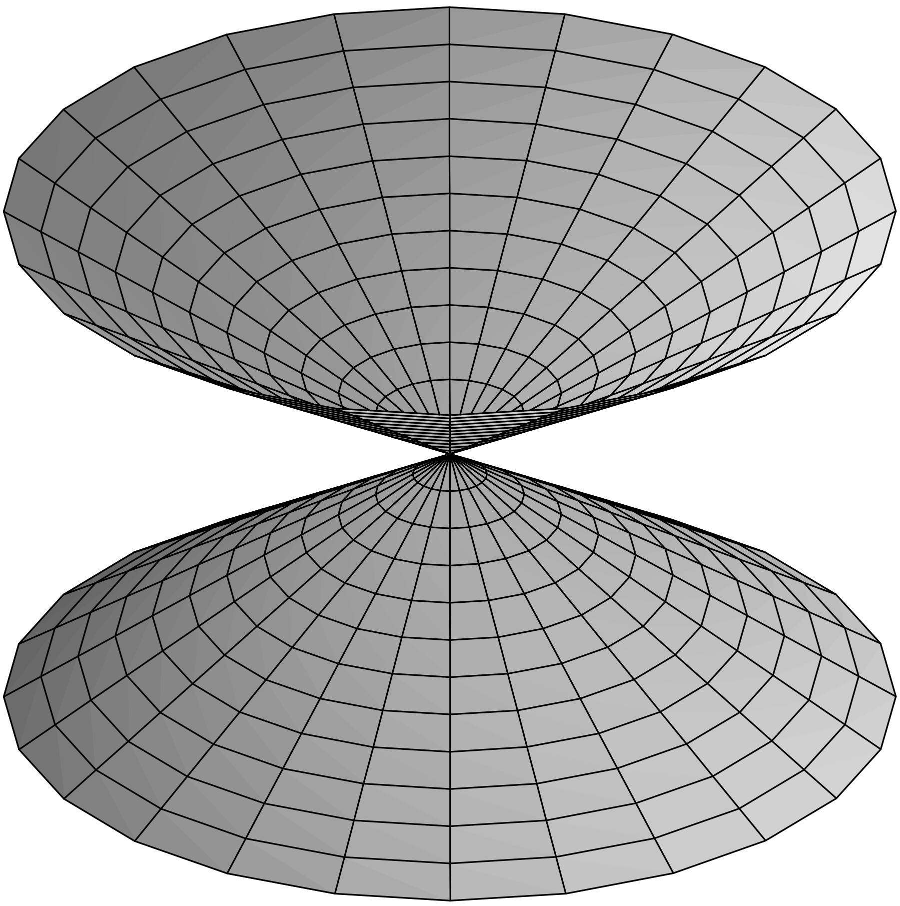
Ellipsoïde



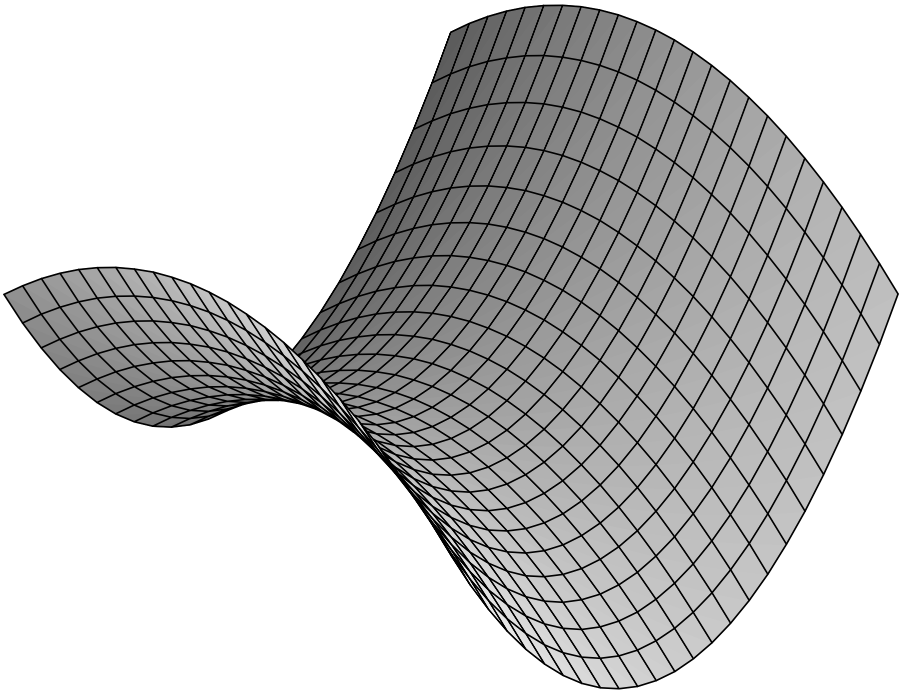
Hyperboloïde à une nappe



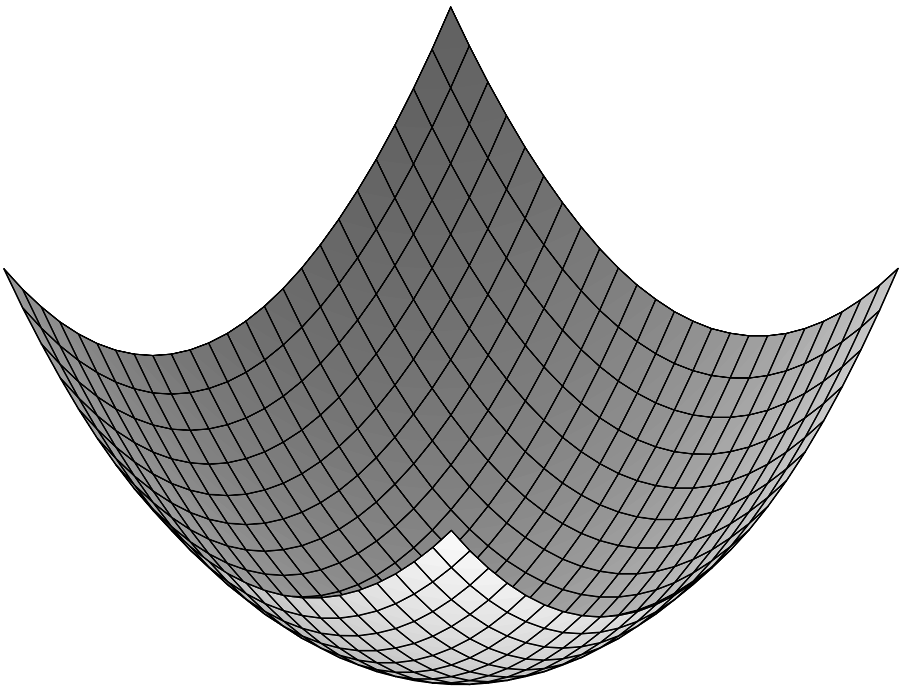
Hyperboloïde à 2 nappes



Cône



Paraboloïde hyperbolique



Paraboloïde elliptique

d) Étude du cas où $\mathrm{Rg}(\Phi) = 1$

On aura les deux cas suivants :
$x^2 = 2pz$ **cylindre parabolique**,
$x^2 = a^2$ deux plans parallèles.
On peut en conclusion poser la définition suivante :

Définition 4.2.9. ***Quadrique non dégénérée, quadrique propre***
On dit qu'une quadrique est non dégénérée si la forme quadratique Φ est non dégénérée, on a alors les quadriques suivantes : E, H_1, H_2, C.

On dit qu'une quadrique est propre si elle est non dégénérée ou si c'est l'une des quadriques suivantes : PE, PH, CE, CH, CP.

***Remarque* 4.2.10.** *On a en tout 9 quadriques propres, 4 sont non dégénérées, 6 sont des surfaces réglées (i.e. engendrées par une famille de droites).*

4.3 Espaces préhilbertiens complexes, espaces hermitiens

Comme le nom l'indique, à partir de maintenant, tous les espaces considérés sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.

4.3.1 Espaces préhilbertiens complexes

DÉFINITION 4.3.1. ***Application semi-linéaire***

Si $u : E \to F$ *vérifie* $\begin{cases} (i)\ \forall (x,y) \in E^2\ u(x+y) = u(x) + u(y), \\ (ii)\ \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \forall x \in E\ u(\lambda x) = \overline{\lambda} u(x), \end{cases}$ *alors on dit que* u *est semi-linéaire.*

Exemple : $z \to \overline{z}$ dans $\mathbb{C}$.

***Remarque* 4.3.1.** *Si* u *est semi-linéaire sur* E $\mathbb{C}$*-e.v. alors* u *est linéaire sur* E $\mathbb{R}$*-e.v.*

DÉFINITION 4.3.2. ***Produit scalaire***

$(x, y) \in E^2 \mapsto (x|y)$ *est un produit scalaire (hermitien) ssi*$_{\text{déf}}$

(i) $y \mapsto (x|y)$ *est linéaire,* $x \mapsto (x|y)$ *est semi-linéaire (inutile vu le (ii)).*

(ii) $\overline{(x|y)} = (y|x)$ *(symétrie hermitienne),*

(iii) *Si* $x \neq 0$, $(x|x) > 0$.

Expression analytique en dimension finie :

$$B(x,y) = \overline{X}^T MY = \sum_{i,j} b_{ij} \overline{x}_i y_j \text{ où } M = \overline{M}^{\mathrm{T}} \ (b_{ij} = \overline{b}_{ji}).$$

Dém : C'est la même chose que dans le cas réel : si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ alors

$$\begin{aligned} B(x,y) = B\left(x, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) &= \sum_{j=1}^{n} y_j B(x, e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} y_j B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, e_j\right) \\ &= \sum_{i,j} \overline{x_i} y_j B(e_i, e_j) \end{aligned}$$

en utilisant la semi-linéarité à gauche ■

DÉFINITION 4.3.3. ***Espace préhilbertien complexe***
E $\mathbb{C}$-e.v. est un espace préhilbertien complexe ssi$_{\text{déf}}$ E est muni d'un produit scalaire.

Exemples :

(i) Produit scalaire canonique dans $\mathbb{C}^n$: $(x|y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$.

(ii) Produit scalaire canonique sur ℓ^2 (ensemble des séries de module carré convergentes, voir chapitre 5) : $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{x}_n y_n$

(iii) Dans $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$: $(f|g) = \displaystyle\int_{[a,b]} \overline{f} g$.

Dém : La linéarité à droite est une conséquence de la linéarité de l'intégrale, la symétrie hermitienne est immédiate et, si $f \neq 0$ alors $\displaystyle\int_{[a,b]} |f|^2 > 0$ car f est continue ■

(iv) Dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ ensemble des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes : $(f|g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{[0,2\pi]} \overline{f} g$.

PROPOSITION 4.3.1. ***Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski***

- *Cauchy-Schwarz* $|(x|y)|^2 \leqslant |(x|x)|.|(y|y)|$ *avec égalité ssi x et y sont liés,*
- *Minkowski* $\sqrt{(x+y|x+y)} \leqslant \sqrt{(x|x)} + \sqrt{(y|y)}$. *avec égalité ssi x et y sont positivement liés (i.e. $\exists(\lambda,\mu) \neq (0,0)$, $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ tels que $\lambda x = \mu y$).*

Dém :

- On ne peut pas refaire ici la démonstration classique de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que l'on a vue pour les espaces euclidiens, il faut adapter.
  On pose $(x|y) = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$ (où $\rho = |(x|y)|$) et $T(\lambda) = \|x + \lambda \mathrm{e}^{-i\theta} y\|^2 \geqslant 0$. En développant on obtient [4]

$$\begin{aligned} T(\lambda) &= (x + \lambda \mathrm{e}^{-i\theta} y | x + \lambda \mathrm{e}^{-i\theta} y) \\ &= (x|x) + \lambda \mathrm{e}^{i\theta}(y|x) + \lambda \mathrm{e}^{-i\theta}(x|y) + \lambda^2 (y|y) \\ &= (x|x) + 2\lambda\rho + \lambda^2 (y|y). \end{aligned}$$

  On exprime alors que $\Delta = 4\rho^2 - 4(x|x)^2.(y|y)^2 \leqslant 0$ (car le trinôme en λ ne change pas de signe). En simplifiant par 4 et en tenant compte de l'égalité $\rho = |(x|y)|$ on arrive à $|(x|y)|^2 \leqslant |(x|x)|.|(y|y)|$.
  Le cas d'égalité correspond à $x + \lambda \mathrm{e}^{-i\theta} y = 0$ avec λ racine double de $T(X) = 0$ (si $y \neq 0$, sinon c'est immédiat).

- Pour Minkowski, on utilise l'inégalité

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,[(x|y)] &\leqslant |(x|y)| && \text{car } \mathrm{Re}(z) \leqslant |z| \\ &\leqslant \sqrt{(x|x).(y|y)} && \text{inégalité de Cauchy-Schwarz.} \end{aligned}$$

ne pas oublier que $\mathrm{e}^{-}\ (x|y) = |(x|y)|$

Alors

$$\begin{aligned}(x+y|x+y) &= (x|x)+(y|x)+(x|y)+(y|y)\\ &= (x|x)+2\operatorname{Re}(x|y)+(y|y)\\ &\leqslant (x|x)+2\sqrt{(x|x).(y|y)}+(y|y) = [\sqrt{(x|x)}+\sqrt{(y|y)}]^2\end{aligned}$$

d'où l'inégalité de Minkowski.
Le cas d'égalité s'obtient lorsqu'on a égalité dans les inégalités précédentes : soit $\operatorname{Re}[(x|y)] = |(x|y)|$ et (x, y) liée (cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz). Si on suppose que $y \neq 0$ alors $x = \lambda y$ d'où $(x|y) = \overline{\lambda}(y|y)$ ce qui donne $\operatorname{Re}(\lambda)(y|y) = |\lambda|(y|y)$ soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ■

Théorème 4.11. Si E est un espace préhilbertien alors on peut munir E d'une structure d'espace vectoriel normé en posant $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Dém : Il suffit de prouver que $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est bien une norme :

- $\|x\| = 0 \Rightarrow (x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (d'après le (iii) de la définition du produit scalaire).
- $\|\lambda x\|^2 = (\lambda x|\lambda x) = |\lambda|^2(x|x)$ soit $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$.
- L'inégalité triangulaire est directement obtenue avec Minkowski ■

***Remarque* 4.3.2.** *On sait alors que l'on peut associer une distance à la norme que l'on vient de définir en posant* $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$.

Théorème 4.12. **Relations entre produit scalaire et norme**
On a les relations suivantes :
$\|x+\varepsilon y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\varepsilon\operatorname{Re}(x|y)$ $(\varepsilon = \pm 1)$
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ identité du parallélogramme
$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\operatorname{Re}(x|y)$
$4(x|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2$ identité de polarisation

Dém : Les premières égalités ont déjà été prouvées lors du développement du carré scalaire. Les deuxième et troisième égalités s'obtiennent en faisant la somme et la différence des premières égalités. Pour la quatrième, on réécrit la troisième égalité en remplaçant y par iy ■

***Remarque* 4.3.3.** *Mnémo : Dans l'identité de polarisation, le coefficient devant la norme multiplié par le coefficient de y vaut toujours 1.*

On retrouve les mêmes notions et le même genre de résultats qu'avec les espaces préhilbertiens réels, notamment

- Vecteurs unitaires $\|x\| = 1$.
- Vecteurs orthogonaux $(x|y) = 0$ $(= (y|x))$.
- Sous-espaces vectoriels orthogonaux.

- Orthogonal d'un sous-espace vectoriel $F^\perp$.
- Familles orthogonales, orthonormales.
- Relation de Pythagore : Si $(e_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ est une famille orthogonale alors

$$\|e_1+\cdots+e_p\|^2=\|e_1\|^2+\cdots+\|e_p\|^2.$$

- Somme directe orthogonale.
- Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux et projecteurs orthogonaux associés.

Question :
Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E préhilbertien, prouver que $F_1^\perp\cap F_2^\perp=(F_1+F_2)^\perp$.
Montrer que $F_1^\perp+F_2^\perp\subset(F_1\cap F_2)^\perp$.

4.3.2 Espaces vectoriels hermitiens

a) Orthogonalité

Définition 4.3.4. ***Espace hermitien***
Un espace hermitien est un espace préhilbertien complexe de dimension finie.

En dépit de la difficulté liée à la notion d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, on retrouve, à quelques aménagements près, les mêmes propriétés que pour les espaces euclidiens.

Théorème 4.13. **Existence de bases orthonormales**
Tout espace hermitien possède une base orthonormale.
Dans une telle base, le produit scalaire s'écrit

$$(x|y)=\sum_{i=1}^n\overline{x}_iy_i$$

où (x_i) et (y_i) désignent les coordonnées de x et y.

Dém : On raisonne par récurrence sur $n=\dim E$, on pose comme hypothèse de récurrence :

Tout espace hermitien de dimension n possède une base orthonormale.

- $n=1$: il suffit de prendre un vecteur normé.
- On suppose que la propriété est vraie à l'ordre $n-1$. Soit e_n un vecteur normé, la forme linéaire φ définie par $\varphi(x)=(e_n|x)$ et $E'=\operatorname{Ker}\varphi$ (orthogonal de e_n de dimension $n-1$) alors l'hypothèse de récurrence appliquée à E' donne une base orthonormée de E' : $(e_1,\dots,e_{n-1})$. La famille $(e_1,\dots,e_{n-1},e_n)$ est une famille orthonormale. On sait que (dans le cas euclidien mais ici c'est pareil) une famille orthonormale est une famille libre (cf. question (ii) page 227). Comme $\dim E=n$ alors cette famille est bien une base ■

On retrouve aussi l'algorithme de Schmidt qui permet de construire une base orthonormale à partir d'une base quelconque et qui permet de prouver la proposition suivante.

PROPOSITION 4.3.2. *Toute famille orthonormale se complète en une base orthonormale.*

Dém : Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormale de E espace hermitien de dimension n, on suppose que $p < n$. On sait que l'on peut compléter cette famille en une base de E : $(e_1, \dots, e_p, \varepsilon_{p+1}, \dots, \varepsilon_n)$. On utilise alors l'algorithme de Schmidt : les p premiers vecteurs sont exactement les vecteurs $e_1, \dots, e_p$, on note alors $e_{p+1}, \dots, e_n$ les derniers vecteurs obtenus par cet algorithme. La base ainsi obtenue $(e_1, \dots, e_n)$ est bien une base orthonormale qui complète la famille $(e_1, \dots, e_p)$ ■

THÉORÈME 4.14. Toute forme linéaire f sur E espace hermitien s'écrit sous la forme $f(x) = (a|x)$ où $a \in E$.
On peut dire alors que E et E^* sont semi-isomorphes.

Dém :

- Existence de a : soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E, $f \in E^*$ s'écrit $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ où $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Il suffit alors de prendre $a = \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} e_i$.

- Unicité : si $f(x) = (a|x) = (b|x)$ pour tout x alors $(a - b|x) = 0$ et, avec $x = a - b$, on obtient $\|a - b\|^2 = 0$ soit $a = b$. On peut donc définir une application φ qui à $f \in E^*$ associe $a \in E$ défini par
$$f(x) = (\varphi(f)|x).$$

- Semi-linéarité : si $f(x) = (a|x)$ et $g(x) = (b|x)$ alors
$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda(a|x) + \mu(b|x) &= (\overline{\lambda} a|x) + (\overline{\mu} b|x)\\ &= (\overline{\lambda} a + \overline{\mu} b|x).\end{aligned}$$
On a donc $\varphi(\lambda f + \mu g) = \overline{\lambda}\varphi(f) + \overline{\mu}\varphi(g)$.

- L'injectivité est évidente car si $\varphi(f) = \varphi(g)$ alors
$$f(x) = (\varphi(f)|x) = (\varphi(g)|x) = g(x).$$

- La surjectivité l'est tout autant : pour tout $a \in E$, on peut définir $f \in E^*$ par $f(x) = (a|x)$.

Conclusion : φ est une application semi-linéaire bijective de E^* sur E donc E et E^* sont bien semi-isomorphes (en fait on a les mêmes propriétés pour les applications semi-linéaires que pour les applications linéaires, on aurait pu donc se contenter de prouver uniquement l'injectivité) ■

Retour à E de dimension quelconque.

Théorème 4.15. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E alors F admet un supplémentaire orthogonal $F^{\perp}$.
En outre $\operatorname{codim} F^{\perp} = \dim F$ et $F^{\perp\perp} = F$.
La projection orthogonale sur F va s'écrire (dans une base orthonormale de F) :

$$p_F(x) = \sum_{j=1}^{n} (e_j|x)e_j$$

Attention à l'ordre des vecteurs dans le produit scalaire !

Dém : C'est exactement la même démonstration que la proposition 4.2.2 page 228 et du théorème qui suit (théorème 4.2) ■

Avec la définition générale de la distance à un sous-ensemble on a

Proposition 4.3.3. $\mathrm{d}(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ *et, grâce à Pythagore,*

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \mathrm{d}(x, F)^2.$$

Et on retrouve l'inégalité de Bessel

$$\sum_{j=1}^{n} |(e_j|x)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Dém : Là aussi, on retrouve les même démonstrations que pour la proposition 4.2.3 et du théorème adjacent, théorème 4.3 page 230 ■

Enfin, pour conclure ce chapitre, voici un tableau comparatif concernant les espaces préhilbertiens réels ou complexes. Commençons par les différences :

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
euclidien	hermitien
$4(x\|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$	$4(x\|y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2$
E et E^* isomorphes	E et E^* semi-isomorphes

Maintenant, les notions communes :

Cauchy-Schwarz
Orthogonalité
Pythagore
Existence de b.o.n.
Algorithme de Schmidt
Projection orthogonale
Inégalité de Bessel

Questions :

(*i*) Prouver que dans $E = \mathbb{C}_n[X]$, $B(P, Q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})}Q(\mathrm{e}^{i\theta})\,\mathrm{d}\theta$ est un produit scalaire hermitien.
Si $Q = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_0$, prouver que $\sup\limits_{|z|=1} |Q(z)| \geqslant 1$ avec égalité ssi $b_0 = \ldots = b_{n-1} = 0$.

(*ii*) Montrer que $F_1^{\perp} + F_2^{\perp} = (F_1 \cap F_2)^{\perp}$ en dimension finie.