CHAPITRE 5

Suites et fonctions

5.1 Espaces vectoriels normés réels ou complexes

Ici, $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.

5.1.1 Normes et distances

DÉFINITION 5.1.1. ***Norme, espace vectoriel normé***
Soit E un e.v. sur $\mathbb{K}$, on appelle norme sur E toute application (notée $\|.\|$ ou $N(.)$) de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

(i) $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ *(on a en fait équivalence grâce à (ii)),*

(ii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \|\lambda.x\| = |\lambda|.\|x\|$,

(iii) $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

On dit alors que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé. S'il y a ambiguïté on notera aussi $\|.\|_E$ la norme sur E.

Dém : Si $x = 0$ (vecteur nul) alors $0.x = x$ (0 élément neutre de $\mathbb{K}$) donc, avec (ii), $\|x\| = \|0.x\| = 0\|x\| = 0$ ce qui prouve la réciproque ■

Exemples : Normes N_1, N_2 et N_∞

(i) Sur $\mathbb{K}^n$ $(x = (x_i))$: $N_1(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, $N_2(x) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2}$, $N_\infty(x) = \sup\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i|$.

Dém :

- N_1 est une norme : $N_1 \ : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ est immédiat. Montrons les autres propriétés :
  - Si $N_1(x) = 0$ alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = 0$ (si une somme de termes positifs est nulle alors tous ses termes sont nuls[1]) donc $x = 0$.
  - $|\lambda x_i| = |\lambda|.|x_i|$ donc, en additionnant, on a $N_1(\lambda x) = |\lambda| N_1(x)$.
  - De même $|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i|$ donc $N_1(x+y) \leqslant N_1(x) + N_1(y)$

[1] Pour s'en convaincre, raisonner par l'absurde

- N_2 est une norme : $N_2 \ : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ est immédiat. Montrons les autres propriétés :
  - Si $N_2(x) = 0$ alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i^2 = 0$ donc $x = 0$.
  - $|\lambda x_i| = |\lambda|.|x_i|$ donc

$$\begin{aligned} N_2(\lambda x) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^2.|x_i|^2} \\ &= \sqrt{|\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \\ &= |\lambda| N_2(x). \end{aligned}$$

  - L'inégalité triangulaire a été vue au chapitre 4 avec l'inégalité de Minkowski.
- $N_\infty \ : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$ est immédiat. Montrons les autres propriétés :
  - Si $N_\infty(x) = 0$ alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = 0$ car le sup est nul donc $x = 0$.
  - $|\lambda x_i| = |\lambda|.|x_i|$ donc, en passant au sup (qui est ici un maximum), on a $N_\infty(\lambda x) = |\lambda| N_\infty(x)$.
  - $|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i| \leqslant \underbrace{\sup_j |x_j|}_{=N_\infty(x)} + \underbrace{\sup_j |y_j|}_{=N_\infty(y)}$ donc $N_\infty(x) + N_\infty(y)$ est un majorant de l'ensemble des $|x_i + y_i|$ ce qui entraîne que

$$\sup_i |x_i + y_i| = N_\infty(x + y) \leqslant N_\infty(x) + N_\infty(y) \ \blacksquare$$

(i bis) Sur $\mathbb{K}[X]$ (avec $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$) : $N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$, $N_2(P) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2}$, $N_\infty(P) = \sup_{i \in [\![0,n]\!]} |a_i|$.
Dém : C'est la même démonstration que celle que l'on vient de faire $\blacksquare$

(ii) Sur $\mathcal{C}([a, b])$: $N_1(f) = \int_a^b |f(t)| \,\mathrm{d}t$, $N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t}$, $N_\infty(f) = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$.
Dém : Pour N_1, voir le théorème 5.53 page 332, pour N_2, voir la proposition 5.4.2 page 334 et pour la norme infinie, voir le théorème 5.1 page 260 $\blacksquare$

(iii) Sur ℓ^j où $j \in \{1, 2, \infty\}$ $N_1(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ (sur ℓ^1), $N_2(u) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$ (sur ℓ^2), $N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ (sur ℓ^∞) cf. définition 5.3.5 page 320.
Dém : Pour N_1, on verra ceci avec les séries (même démonstration que pour le (i), cf. théorème 5.42 page 320), pour N_2, voir aussi plus loin dans ce chapitre, ℓ^2 est un espace de Hilbert (cf. théorème 5.43 page 320). Enfin, pour N_∞, on reprend la première démonstration (cf. théorème 5.4 page 266) $\blacksquare$

DÉFINITION 5.1.2. ***Distance associée à une norme***
On définit la distance entre deux points de E par $\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|$.

***Remarque* 5.1.1.** d *vérifie :*

(*i*) $\forall (x,y) \in E^2$, $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ *séparation,*

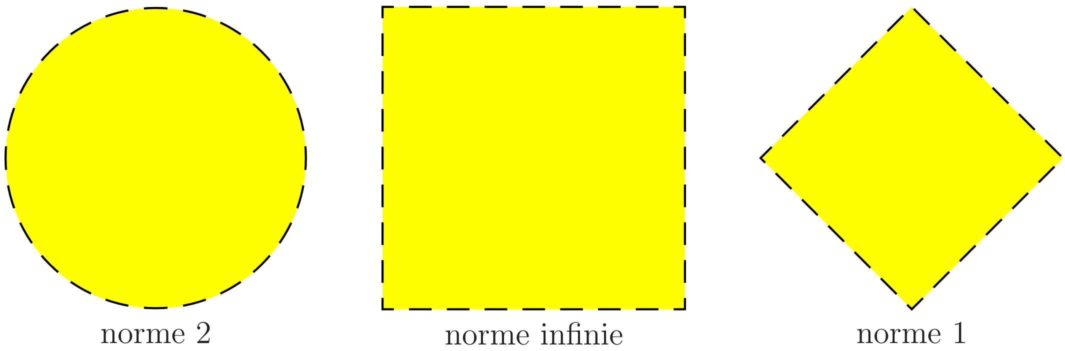
(*ii*) $\forall (x,y) \in E^2$, $\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{d}(y,x)$ *symétrie,*

(*iii*) $\forall (x,y,z) \in E^3$: $\mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$ *inégalité triangulaire.*

Dém : Ces trois propriétés sont simples à prouver :

- $\mathrm{d}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- $\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\| = \|y-x\| = \mathrm{d}(y,x)$,
- $\mathrm{d}(x,y) = \|x-y\| = \|(x-z)+(z-y)\| \leqslant \|x-z\| + \|z-y\| = \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$ ■

DÉFINITION 5.1.3. ***Boule ouverte, fermée***
L'ensemble $B(a,r) = \{x \in E, \mathrm{d}(a,x) < r\}$ est appelé boule ouverte de centre a, de rayon $r > 0$, et l'ensemble $\overline{B}(a,r) = \{x \in E, \mathrm{d}(a,x) \leqslant r\}$, boule fermée de centre a, de rayon r.



DÉFINITION 5.1.4. ***Distance à un ensemble***
Soit A un ensemble non vide, alors on pose $\mathrm{d}(x,A) = \inf_{y \in A} \mathrm{d}(x,y)$.

DÉFINITION 5.1.5. ***Vecteur unitaire***
On dit que $x \in E$ espace vectoriel normé est un vecteur unitaire ssi$_{\text{déf}}$ $\|x\| = 1$ (cela dépend évidemment de la norme choisie).
Si $x \in E \setminus \{0\}$ alors $u = \dfrac{x}{\|x\|}$ est appelé vecteur unitaire associé à x.

PROPOSITION 5.1.1. *Si E est un espace préhilbertien (réel ou complexe), la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ vérifie $\|x\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |(x|y)|$.*

Dém : Si $x = 0$ l'égalité est immédiate, on se place donc dans le cas où $x \neq 0$. On va montrer l'égalité par double inégalité :

- Soit $y \in E$ tel que $\|y\| \leqslant 1$ alors, par Cauchy-Schwarz, on a

$$|(x|y)| \leqslant \|x\|.\|y\| \leqslant \|x\|$$

donc $A = \{|(x|y)|,\ \|y\| \leqslant 1\}$ est borné par $\|x\|$ d'où $\sup\limits_{\|y\|\leqslant 1} |(x|y)| \leqslant \|x\|$.

- Soit maintenant $y = \dfrac{x}{\|x\|}$, $\|y\| = 1$ et $|(x|y)| = \dfrac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|$ ce qui signifie que $\|x\| \in A$ donc $\|x\| \leqslant \sup A = \sup\limits_{\|y\|\leqslant 1} |(x|y)|$.

Conclusion : on a bien montré que $\|x\| = \sup\limits_{\|y\|\leqslant 1} |(x|y)|$ ■

DÉFINITION 5.1.6. ***Ensemble borné, diamètre***
On dit que $A \neq \emptyset$ est un ensemble borné ssi$_{\text{déf}}$ il existe une boule fermée contenant A. Dans ce cas, on parle du diamètre de A :

$$\delta(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} \mathrm{d}(x, y).$$

Dém : Cette définition est légitime car $A \subset B(a, r)$ par définition d'où, par inégalité triangulaire, $\mathrm{d}(x, y) \leqslant \mathrm{d}(x, a) + \mathrm{d}(a, y) \leqslant 2r$ pour tout $(x, y) \in A^2$ par conséquent $\{\mathrm{d}(x, y),\ (x, y) \in A^2\}$ est majoré donc il possède une borne supérieure ■

DÉFINITION 5.1.7. ***Application bornée, Ensemble $\mathcal{B}(A, F)$***
Soient E et F sont deux e.v.n., on dit que $f \in \mathcal{F}(A, F)$ où $A \subset E$ est une application bornée ssi$_{\text{déf}}$ $f(A)$ est borné dans F.
L'ensemble des applications bornées est noté $\mathcal{B}(A, F)$.

THÉORÈME 5.1. L'ensemble $\mathcal{B}(A, F)$ muni de la norme $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in A} \|f(x)\|_F$ est un espace vectoriel normé.

Dém : C'est la démonstration classique que l'on retrouve ici, on vérifie les axiomes de la norme (on a évidemment $N_\infty(f) \in \mathbb{R}_+$), $\|.\|_F$ désigne la norme sur F.

- Si $N_\infty(f) = 0$ alors $\forall x \in A,\ f(x) = 0$ soit $f = 0$.

- On utilise la propriété

$$\sup_{\alpha\in A} \lambda\alpha = \lambda \sup_{\alpha\in A} \alpha$$

pour $A \subset \mathbb{R}$ et $\lambda \geqslant 0$:

  - $\lambda\alpha \leqslant \lambda \sup\limits_{\alpha\in A} \alpha$ est immédiat donc $\lambda \sup\limits_{\alpha\in A} \alpha$ est un majorant de l'ensemble $\{\lambda\alpha,\ \alpha \in A\}$ donc

$$\sup_{\alpha\in A} \lambda\alpha \leqslant \lambda \sup_{\alpha\in A} \alpha.$$

  - Si $\lambda = 0$, l'égalité est immédiate, supposons $\lambda > 0$ alors, on applique l'inégalité que l'on vient de montrer à $B = \{\lambda\alpha,\ \alpha \in A\}$ et $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ d'où $\sup\limits_{\beta\in B} \mu\beta \leqslant \mu \sup\limits_{\beta\in B} \beta$ or $\mu\beta = \alpha$ et $\beta \in B \Leftrightarrow \mu\beta = \alpha \in A$ d'où

$$\sup_{\alpha\in A} \alpha \leqslant \frac{1}{\lambda} \sup_{\alpha\in A} \lambda\alpha$$

Cette dernière inégalité permet de conclure à l'égalité en multipliant par λ. On prend alors $A = \{\|f(x)\|_F,\ x \in A\}$ d'où $N_\infty(\lambda f) = |\lambda| N_\infty(f)$ (en remplaçant λ par $|\lambda|$ et en utilisant la propriété $\|\lambda f(x)\|_F = |\lambda|.\|f(x)\|_F$).

- $\|f(x)+g(x)\|_F \leqslant \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F \leqslant N_\infty(f)+N_\infty(g)$ donc $N_\infty(f)+N_\infty(g)$ est un majorant de $\{\|f(x)+g(x)\|_F,\ x \in A\}$ et par conséquent

$$N_\infty(f+g) \leqslant N_\infty(f)+N_\infty(g);$$

Conclusion : N_∞ est bien une norme sur $\mathcal{B}(A,F)$ donc $\mathcal{B}(A,F)$ muni de N_∞ est bien un espace vectoriel normé ■

Définition 5.1.8. ***Application lipschitzienne***
Soit $k \in \mathbb{R}_+$, on dit que $f\ : A \subset E \to F$ est k-lipschitzienne ssi$_{\text{déf}}$

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\|.$$

On dit que f est lipschitzienne ssi$_{\text{déf}}$ $\exists k \in \mathbb{R}_+$ telle que f est k-lipschitzienne.

Proposition 5.1.2.
La composée de deux applications lipschitziennes est lipschitzienne.
L'ensemble des fonctions lipschitziennes de $\mathcal{F}(A,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A,F)$

Dém : Notons $\mathrm{Lip}\,(A,F)$ l'ensemble des applications lipschitziennes de A dans F (notation non standard, utilisée de façon épisodique).

- Soit $f \in \mathrm{Lip}\,(A,F)$, $g \in \mathrm{Lip}\,(B,G)$ avec $f(A) \subset B$ (pour pouvoir définir $g \circ f$), $A \subset E$ et $B \subset F$. On suppose que f est k-lipschitzienne et g h-lipschitzienne. Alors, pour tout $(x,y) \in A^2$ on a

$$\|g \circ f(x) - g \circ f(y)\|_G \leqslant h\|f(x) - f(y)\|_F \leqslant kh\|x - y\|_E$$

donc $g \circ f$ est lipschitzienne.

- Si f et g sont dans $\mathrm{Lip}\,(A,F)$ (ensemble non vide car l'application nulle en fait partie), si f est k-lipschitzienne et g h-lipschitzienne. Alors, pour tout $(x,y) \in A^2$ et tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ on a

$$\begin{aligned}\|(\lambda f+\mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(y)\|_F &= \|\lambda(f(x)-f(y)) + \mu(g(x)-g(y))\|_F \\ &\leqslant |\lambda|.\|f(x)-f(y)\|_F + |\mu|.\|g(x)-g(y)\|_F \\ &\leqslant |\lambda|k\|x-y\|_E + |\mu|h\|x-y\|_E \\ &\leqslant (|\lambda|k + |\mu|h)\|x-y\|_E\end{aligned}$$

donc $\lambda f + \mu g$ est bien lipschitzienne ■

Exemples :

(i) Les applications $x \mapsto \|x\|$ et $x \mapsto \mathrm{d}(x,A)$ sont 1-lipschitziennes.
Dém :

- On utilise l'inégalité triangulaire : $\|x\| = \|(x-y)+y\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|$ d'où $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$ et, par symétrie, $\|y\| - \|x\| \leqslant \|y-x\| = \|x-y\|$. On a ainsi
$$-\|x-y\| \leqslant \|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$$
ce qui signifie que $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|$ (**inégalité très importante**) donc $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne.
- Pour tout $(x,z) \in E^2$ et tout $y \in A$ on a
$$\mathrm{d}(x,A) \leqslant \mathrm{d}(x,y) \leqslant \mathrm{d}(x,z) + \mathrm{d}(z,y)$$
donc $\mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(z,y)$ donc $\mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(x,z)$ est un minorant de $\{\mathrm{d}(z,y),\ y \in A\}$ (il ne dépend pas de y) par conséquent il est majoré par la borne inférieure de cet ensemble soit
$$\mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(x,z) \leqslant \mathrm{d}(z,A)$$
d'où $\mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(z,A) \leqslant \mathrm{d}(x,z) = \|x-z\|$. Par symétrie, comme dans la démonstration précédente, on a
$$|\,\mathrm{d}(x,A) - \mathrm{d}(z,A)| \leqslant \|x-z\|$$
donc $x \mapsto \mathrm{d}(x,A)$ est 1-lipschitzienne (là aussi, ce résultat est **très important**) ■

(ii) Sur $A = \{(x,y), x^2+y^2 \leqslant 1\}$, $f(x,y) = (x^2,y^2)$ est lipschitzienne pour la norme 2.
Dém : Soit (x,y) et (x',y') dans $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) - f(x',y') = (x^2 - x'^2, y^2 - y'^2)$.
$$\begin{aligned}\|f(x,y) - f(x',y')\|_2 &= \sqrt{(x-x')^2(x+x')^2 + (y-y')^2(y+y')^2}\\ &\leqslant \sqrt{4(x-x')^2 + 4(y-y')^2}\end{aligned}$$
car $\|x\| \leqslant 1$, $\|x'\| \leqslant 1$ et $\|y\| \leqslant 1$, $\|y'\| \leqslant 1$
$$\leqslant 2\|(x,y) - (x',y')\|_2.$$
Donc f est lipschitzienne (on verra que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^2$ donc ce résultat ne dépend pas de la norme choisie) ■

Définition 5.1.9. ***Norme induite, distance induite***
Si E' est un sous-espace vectoriel de E et si N est une norme sur E alors la restriction de N à E' est une norme que l'on appelle norme induite sur E'.
Si A est une partie non vide de E alors la restriction de d à $A \times A$ est appelée distance induite sur A

Dém : Si on note $N' = N_{E'}$ alors il est immédiat de vérifier que N' définit sur E' une norme (il suffit de restreindre l'ensemble E à l'ensemble E') ■

***Remarque* 5.1.2.** *On ne peut parler de norme induite sur une partie quelconque car les axiomes de la norme ne sont plus vérifiés.*

PROPOSITION 5.1.3. *Soient* (E_i, N_i) *des e.v.n., sur* $E = E_1 \times \cdots \times E_p$, $i \in [\![1, p]\!]$, $N(x) = \sup_{i \in [\![1,p]\!]} N_i(x_i)$ *définit une norme.*

Dém : La démonstration est exactement la même que celle donnée pour la norme infinie sur $\mathbb{R}^n$ ■

DÉFINITION 5.1.10. ***Produit fini d'espaces vectoriels normés***
Dans le cadre de la proposition précédente, (E, N) *est appelé espace produit des e.v.n.* (E_i, N_i).

***Remarque* 5.1.3.** *Vu la norme choisie sur le produit fini d'espaces vectoriels normés, les applications coordonnées sont 1-lipschitziennes.*

Dém : Prenons par exemple $p_1 \ : (x_1, \ldots, x_p) \in E = E_1 \times \cdots \times E_p \mapsto x_1 \in E_1$ alors $N_1(p_1(x)) = N_1(x_1) \leqslant N(x)$ donc on en déduit que

$$|N_1(p_1(x) - p_1(y))| = N_1(x_1 - y_1) \leqslant N(x - y)$$

i.e. p_1 est 1-lipschitzienne (on a pris comme norme sur $\mathbb{R}$ la valeur absolue qui est la seule norme sur $\mathbb{R}$ à un facteur multiplicatif près) ■
Questions :

(*i*) Soit $f \in \mathrm{GL}(E)$ et $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, prouver que $N(x) = \|f(x)\|$ est une norme.

(*ii*) Prouver que $\|x - y\| \geqslant \dfrac{1}{2}(\max(\|x\|, \|y\|)) \left\| \dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|y\|} \right\|$

5.1.2 Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

On retrouve ici une généralisation de la notion de convergence d'une suite :

DÉFINITION 5.1.11. ***Limite, suite convergente, suite divergente***
On dit que la suite (u_n) *tend vers* $a \in E$ *quand* $n \to +\infty$ *ssi*$_{\text{déf}}$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N,\ \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon$$

noté $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$ *ce qui s'écrit encore* $\lim\limits_{n \to +\infty} \|u_n - a\| = 0$.
S'il n'existe pas d'élément a *de* E *vérifiant la propriété ci-dessus, on dit que* (u_n) *diverge.*

***Remarque* 5.1.4.** *Si* (u_n) *possède une limite, celle-ci est unique.*

Dém : Supposons que $u_n \to a$ et $u_n \to b$ alors

$$\|a - b\| = \|(a - u_n) + (u_n - b)\| \leqslant \|a - u_n\| + \|u_n - b\| \to 0$$

et on peut directement conclure que $a = b$ (on pouvait aussi faire une démonstration par l'absurde).

Ceci justifie le fait que l'on puisse écrire l'égalité $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$ puisqu'il n'y a pas d'autre choix possible (sinon il faudrait parler de l'ensemble des limites de (u_n)) ■
On retrouve alors les propriétés classiques sur les limites :

THÉORÈME 5.2. Si on note $\mathcal{C}(E)$ l'ensemble des suites d'éléments de E convergentes alors

- $\mathcal{C}(E)$ est un espace vectoriel
- l'application $\lim\ : (u_n) \mapsto \lim_{n\to+\infty} u_n$ est une application linéaire de $\mathcal{C}(E)$ dans E.

Dém : On va prouver les deux affirmations en même temps (en remarquant que $\mathcal{C}(E) \neq \emptyset$ car les suites constantes sont dans $\mathcal{C}(E)$).
L'ensemble des suites de E est un espace vectoriel (c'est l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans E), on va montrer plus simplement que $\mathcal{C}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ [2].
Soit $u_n \to a$ et $v_n \to b$ deux suites convergentes. Comme avec les applications lipschitziennes, on a

$$\begin{aligned}\|(\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda a + \mu b)\| &= \|\lambda(u_n - a) + \mu(v_n - b)\| \\ &\leqslant |\lambda|.\|u_n - a\| + |\mu|.\|v_n - a\| \to 0\end{aligned}$$

donc, en utilisant les propriétés des suites réelles, on en déduit que

- $(\lambda u_n + \mu v_n)$ admet une limite (donc $\mathcal{C}(E)$ étant stable par combinaison linéaire est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$),
- $\lim_{n\to+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \lim_{n\to+\infty} u_n + \mu \lim_{n\to+\infty} v_n$ donc l'application limite définie par $\lim\ : (u_n) \mapsto \lim_{n\to+\infty} u_n$ est une application linéaire de $\mathcal{C}(E)$ dans E ■

***Remarque* 5.1.5.** *Là aussi on pourra avantageusement se ramener à l'étude des limites en 0.*

THÉORÈME 5.3. **Comparaison des normes**
Si N et N' sont deux normes sur l'espace vectoriel E alors on a l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

(i) Toute suite convergeant vers 0 au sens de N converge vers 0 au sens de N'.

(ii) Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $N' \leqslant \alpha N$.

Dém :

- $(ii) \Rightarrow (i)$ immédiat : si $u_n \to 0$ au sens de N, cela signifie que $N(u_n) \to 0$. Or $0 \leqslant N'(u_n) \leqslant \alpha N(u_n)$ entraîne que $N'(u_n) \to 0$ donc $u_n \to 0$ au sens de N'.

[2] Notation qui désigne l'ensemble des suites de E

- $(i) \Rightarrow (ii)$ par contraposée, la négation de (ii) s'écrit
$$\forall \alpha > 0,\ \exists x \in E \mid N'(x) > \alpha N(x).$$
Avec $\alpha = n$, on sait qu'il existe $x \in E$ tel que $N'(x) > nN(x)$. x dépend de x, on le note x_n. On construit alors une suite (x_n) (et on a $x_n \neq 0$ pour tout n car $N'(x_n) > nN(x_n) \geqslant 0$ donc $N'(x_n) > 0$).
Soit $y_n = \dfrac{x_n}{N'(x_n)}$ alors
$$\begin{aligned} N'(y_n) &= \frac{N'(x_n)}{N'(x_n)} = 1 \\ &\geqslant \frac{nN(x_n)}{N'(x_n)} = nN\left(\frac{x_n}{N'(x_n)}\right) = nN(y_n) \end{aligned}$$
donc $N(y_n) \leqslant \dfrac{1}{n}$ et par conséquent $y_n \to 0$ pour N, pas pour N' car $N'(y_n)$ est constamment égal à 1 ■

***Remarque* 5.1.6.** *Si $N' \leqslant \alpha N$ alors si (u_n) converge pour N, (u_n) converge pour N'.*

Dém : En effet, si $u_n \to a$ pour N alors $N(u_n - a) \to 0$ donc $N'(u_n - a) \to 0$ soit $u_n \to a$ pour N' (et les deux limites sont égales) ■

Définition 5.1.12. ***Normes équivalentes***
Si N et N' normes sur E, on dit qu'elles sont équivalentes ssi$_{déf}$ il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}$ tel que
$$N' \leqslant \alpha N \text{ et } N \leqslant \beta N'.$$

***Remarque* 5.1.7.**

(i) *Soit $\mathcal{C}'(E)$ l'ensemble des suites convergentes pour N' alors $\mathcal{C}(E) = \mathcal{C}'(E)$.*
Dém : Si N et N' sont équivalentes alors $N' \leqslant \alpha N$ entraîne que toute suite convergeant pour N converge pour N' (c'est la remarque précédente) i.e. $\mathcal{C}(E) \subset \mathcal{C}'(E)$. $N \leqslant \beta N'$ permet d'arriver à l'autre conclusion : $\mathcal{C}'(E) \subset \mathcal{C}(E)$ d'où l'égalité $\mathcal{C}(E) = \mathcal{C}'(E)$ ■

(ii) *On a aussi équivalence avec N' est α-lipschitzienne par rapport à N et N est β-lipschitzienne par rapport à N'.*
Dém : On montre l'équivalence $N' \leqslant \alpha N \Leftrightarrow N'$ est α-lipschitzienne par rapport à N.

- *Si N' est α-lipschitzienne par rapport à N alors*
$$\forall (x, y) \in E^2,\ |N'(x) - N'(y)| \leqslant \alpha N(x - y).$$
On prend alors $y = 0$ d'où $|N'(x)| = N'(x) \leqslant \alpha N(x)$ i.e. $N' \leqslant \alpha N$.
- *Si $N' \leqslant \alpha N$ alors on utilise une propriété de la norme (cf. Exemple (i) page 261) : $|N'(x) - N'(y)| \leqslant N'(x - y)$ On a alors la réponse :*
$$|N'(x) - N'(y)| \leqslant N'(x - y) \leqslant \alpha N(x - y)$$

On a prouvé la moitié de la propriété, l'autre s'en déduit immédiatement par symétrie ■

(*iii*) *Pour prouver que deux normes ne sont pas équivalentes, il suffit de trouver une suite d'éléments de E qui tend vers 0 pour une norme et pas pour l'autre.*
Dém : C'est ce qu'on a fait lors de la démonstration du théorème 5.3 ■

(*iv*) *Sur $\mathbb{K}^n$ les trois normes N_1, N_2, N_∞ sont équivalentes mais ce n'est pas vrai sur $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{C}([a,b])$, ℓ^j.*
Dém : On va comparer les normes deux à deux (la relation "être équivalente" pour les normes est transitive donc il suffirait de ne faire que deux comparaisons) :

- *N_1 et N_∞ : immédiat, en effet*

$$N_\infty(x) = \sup_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i| \leqslant N_1(x) = \sum_{i=1}^n |x_i| \leqslant nN_\infty(x)$$

soit $N_\infty \leqslant N_1 \leqslant nN_\infty$.

- *N_2 et N_∞ : on fait la même chose mais en élevant au carré :*

$$N_\infty(x)^2 = \sup_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|^2 \leqslant N_2(x)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \leqslant nN_\infty(x)^2$$

soit $N_\infty \leqslant N_2 \leqslant \sqrt{n}N_\infty$.

- *N_1 et N_2 : on intercale N_∞ d'où*

$$N_1 \leqslant nN_\infty \leqslant nN_2$$
$$N_2 \leqslant \sqrt{n}N_\infty \leqslant \sqrt{n}N_1 \blacksquare$$

(*v*) *Si N' est α-lip par rapport à N, on dit que N est plus fine que N' mais cette notion n'est pas au programme...*

Théorème 5.4. L'ensemble $\ell^\infty(E)$ des suites bornées d'éléments de E muni de la norme N_∞ est un espace vectoriel normé.
L'ensemble $\mathcal{C}(E)$ des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(E)$.

Dém :

- On montre simultanément les propriétés $\ell^\infty(E)$ sous-espace vectoriel et N_∞ norme ($\ell^\infty(E)$ est non vide, prendre la suite nulle).
  - Soit $u = (u_n) \in \ell^\infty(E)$, si $N_\infty(u) = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$ car le sup est nul donc $u = 0$.
  - $\|\lambda u_n\| = |\lambda|.\|u_n\|$ donc, en passant au sup, on a $N_\infty(\lambda u) = |\lambda| N_\infty(u)$.
  - Si $v = (v_n)$ est une autre suite de $\ell^\infty(E)$ alors

$$\|u_n + v_n\| \leqslant \|u_n\| + \|v_n\| \leqslant \underbrace{\sup_n \|u_n\|}_{=N_\infty(u)} + \underbrace{\sup_n \|v_n\|}_{=N_\infty(v)}$$

donc $N_\infty(u)+N_\infty(v)$ est un majorant de l'ensemble des $\|u_n+v_n\|$ ce qui entraîne que

$$\sup_n \|u_n+v_n\| = N_\infty(u+v) \leqslant N_\infty(u)+N_\infty(v).$$

On déduit de ceci que ℓ^∞ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ et que N_∞ est bien une norme sur cet ensemble.

- Il est immédiat que $\mathcal{C}(E)$ est un sous-espace vectoriel de ℓ^∞ :
en effet toute suite convergente est bornée, si $u_n \to a$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N,\ \|u_n - a\| \leqslant 1$ donc $\|u_n\| \leqslant \|u_n - a\| + \|a\| \leqslant 1 + \|a\|$. On prend alors $M = \max\{\|u_n\|,\ n < N, 1+\|a\|\}$ qui est un majorant de $\|u_n\|$ ■

Proposition 5.1.4. *Si $(u_n) = (u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^p)$ est une suite d'éléments de l'espace $E = E_1 \times \ldots \times E_p$ produit d'espaces vectoriels normés alors on a l'équivalence suivante*

$$(u_n) \text{ converge dans } E \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,p]\!],\ (u_n^i) \text{ converge dans } E_i$$

Dém : C'est une démonstration que l'on retrouvera assez souvent.

- $(\Rightarrow)$ On pose $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a = (a_1,\dots,a_p)$ donc $N_\infty(u_n - a) \to 0$. On en déduit que
$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ N_i(u_n^i - a_i) \leqslant N_\infty(u_n - a) \to 0$$
donc $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n^i = a_i$ i.e. (u_n^i) converge dans E_i.

- $(\Leftarrow)$ On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^i = a_i \in E_i$ pour tout i et on pose $a = (a_1,\dots,a_p)$.
Traduisons ceci :
$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_i \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_i,\ N_i(u_n^i - a_i) \leqslant \varepsilon.$$
On prend alors, pour chaque ε, $n_0 = \max(n_i)$ d'où
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0,\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ N_i(u_n^i - a_i) \leqslant \varepsilon$$
ce qui signifie encore que $N(u_n - a) \leqslant \varepsilon$ et prouve la réciproque ■

Définition 5.1.13. ***Suite extraite***
On dit que la suite (v_n) est extraite de la suite (u_n) ssi$_{\text{déf}}$ $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Définition 5.1.14. ***Valeur d'adhérence***
On dit que $a \in E$ est valeur d'adhérence de la suite (u_n) ssi$_{\text{déf}}$ il existe une suite extraite qui converge vers a.

***Remarque* 5.1.8.**

(i) *Il se peut qu'une suite (u_n) n'ait aucune valeur d'adhérence (prendre $u_n = n$ dans $\mathbb{R}$).*

(*ii*) *Une suite convergente n'a qu'une seule valeur d'adhérence.*
Dém : Il suffit de montrer que toute suite extraite d'une suite convergente vers a converge elle aussi vers a :
Soit (u_n) une suite convergente dans E vers a alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N,\ \|u_n - a\| \leqslant \varepsilon.$$

Si $v_n = u_{\varphi(n)}$ est une suite extraite alors, comme φ est strictement croissante, $\varphi(n+1) \geqslant \varphi(n) + 1$ et par une récurrence immédiate, $\varphi(n) \geqslant n$. Si $n \geqslant N$ (de la propriété ci-dessus) alors $\varphi(n) \geqslant N$ donc $\|v_n - a\| = \|u_{\varphi(n)} - a\| \leqslant \varepsilon$ ce qui signifie que $v_n \to a$ ■

PROPOSITION 5.1.5. *Si la suite (u_n) a au moins deux valeurs d'adhérence distinctes alors elle diverge.*

Dém : Immédiat par contraposée avec la remarque (*ii*) ci-dessus ■
On retrouve les relations de comparaison que l'on avait définies pour les suites réelles :

DÉFINITION 5.1.15. ***Notations de Landau, suites équivalentes***
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\alpha_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors

(*i*) $u_n = o(\alpha_n)$ *ssi*$_{\text{déf}}$ $\|u_n\| = o(\alpha_n)$.

(*ii*) $u_n = O(\alpha_n)$ *ssi*$_{\text{déf}}$ $\|u_n\| = O(\alpha_n)$.

(*iii*) *Si $(v_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est une autre suite alors $u_n \sim v_n$ ssi*$_{\text{déf}}$ $u_n - v_n = o(\|v_n\|)$.

Questions :

(*i*) Prouver que sur $\mathcal{C}([a,b])$, N_1, N_2 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

(*ii*) Donner un exemple de suite bornée qui n'a pas de valeur d'adhérence.

(*iii*) Donner un exemple de suite bornée, divergente, qui n'a qu'une seule valeur d'adhérence.

5.1.3 Exemples d'étude de suites

a) COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SUITES

DÉFINITION 5.1.16. ***Convergence linéaire, convergence quadratique***
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, où E est un e.v.n., convergeant vers $a \in E$. On pose $e_n = u_n - a$.

- *Si $e_{n+1} \sim Ae_n$ on dit que la convergence de la suite (u_n) est linéaire.*
- *Si $\|e_{n+1}\| \sim A\|e_n\|^2$ on dit que la convergence de la suite (u_n) est quadratique.*

- Étude de la suite $u_0 = 1$, $u_n = u_{n-1} + \dfrac{1}{n!}$.
  On pose $v_n = u_n + \dfrac{1}{nn!}$, on a vu au 3.1.5 page 55 que les suites u_n et v_n étaient adjacentes et que $u_n < e < v_n$ i.e. $0 < e - u_n < \dfrac{1}{nn!}$.

- **Moyenne arithmético-géométrique.**
Soit $0 < a < b$ 2 réels, on définit la suite (u_n) par :
$$u_0 = a,\ v_0 = b \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n},\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$
Lemme : si $0 < x < y$ alors $x < \sqrt{xy} < \dfrac{x+y}{2} < y$.
Dém :
  - Pour la première inégalité, on élève au carré $x^2 < xy$ est immédiat.
  - Pour la deuxième, on pose $x' = \sqrt{x}$, $y' = \sqrt{y}$ alors $\sqrt{xy} = x'y'$ et
$$x'^2 + y'^2 = 2x'y' + (y' - x')^2 > 2x'y'.$$
  - La troisième est simple : $\dfrac{x+y}{2} < \dfrac{y+y}{2} = y$ ■

On déduit du lemme que $(u_n) \nearrow$, $(v_n) \searrow$ et $u_n \leqslant v_n$ on en tire les inégalités
$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_{n+1} - u_n \leqslant \frac{v_n - u_n}{2}$$
d'où, par récurrence : $v_n - u_n \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$.
Remarque : on a une meilleure majoration
$$0 < v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})^2}{2} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2}$$
$$\leqslant \frac{(v_n - u_n)^2}{8a}$$
car $\sqrt{v_n} \geqslant \sqrt{u_n} \geqslant \sqrt{a} \Rightarrow (\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2 \geqslant 4a$.
On a en fait une convergence quadratique (à chaque itération on double le nombre de décimales).
On obtient alors la majoration suivante $v_n - u_n \leqslant \left(\dfrac{b-a}{8a}\right)^{2^n} 8a$ (ce qui donne une convergence très rapide dès que $\dfrac{b-a}{8a} < 1$).
En fait on peut prouver que $v_{n+p} - u_{n+p} \leqslant \left(\dfrac{v_n - u_n}{8a}\right)^{2^p} 8a$ ce qui explique la rapidité de convergence même si au départ $\dfrac{b-a}{8a} \geqslant 1$.

- **Amélioration de la convergence, méthode de Richardson**
Soit $u_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = \mathrm{e}^x$ (prendre le logarithme) mais la convergence est très lente. Si on pose $e_n(x) = \mathrm{e}^x - u_n(x)$ alors $ne_n(x)$ a une limite.
La méthode de Richardson, dans ce cas, consiste à remplacer $u_n(x)$ par la suite $v_n(x) = (n+1)u_{n+1}(x) - nu_n(x)$. On obtient le tableau suivant (pour $x = 2$)

n	10	100	1000
u_n	6,19	7,245	7,37431
v_n	7,18	7,386	7,38902
e^2	7,38	7,389	7,38905

ce qui prouve, dans ce cas, l'amélioration de la convergence.

Dém : On peut écrire le développement de $u_n(x)$ sous la forme

$$u_n(x) = \mathrm{e}^x + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

(cf. question (*ii*) ci-dessous) donc

$$\begin{aligned} v_n(x) &= (n+1)\left[\mathrm{e}^x + \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{(n+1)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - n\left[\mathrm{e}^x + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \\ &= \mathrm{e}^x + a_2\underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)}_{=\frac{-1}{n(n+1)}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \mathrm{e}^x - \frac{a_2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

ce qui prouve (mathématiquement cette fois) l'amélioration de la convergence constatée numériquement ci-dessus ■

Questions :

(*i*) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)^2}$. Utiliser la méthode de Richardson pour améliorer la convergence de cette suite. Sachant en fait que $u_n = \dfrac{\pi^2}{6} + \dfrac{a_1}{n} + \dfrac{a_2}{n^2} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ donner une suite qui converge encore plus rapidement.

(*ii*) Montrer que $\mathrm{e}^x - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \sim \dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{2n}$. Utiliser l'amélioration de la question précédente (en supposant que l'on a les mêmes hypothèses) pour la suite $u_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

b) Étude des suites récurrentes

Théorème 5.5. Théorème du point fixe
Soit $f : A \to \mathbb{K}$ où $A \subset \mathbb{K}$ et $f(A) \subset A$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admettant un point fixe $a \in A$.
Si f est contractante sur A (i.e. $\exists k < 1, \forall (x,y) \in A^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$) alors a est l'unique point fixe de f.
Si on pose $x_0 = b \in A$, $x_{n+1} = f(x_n)$ et si $f(A) \subset A$ alors la suite (x_n) converge vers a, de plus on a $|x_n - a| \leqslant k^n|b-a|$.

Dém :

- Unicité : si a' est un (éventuel) autre point fixe de f alors

$$|f(a') - f(a)| = |a' - a| \leqslant k|a' - a|$$

donc $(k-1)|a - a'| \geqslant 0$ ce qui impose $a = a'$ car $k - 1 < 0$ (on pouvait aussi raisonner par l'absurde).

- On a ensuite $|x_n - a| = |f(x_{n-1}) - f(a)| \leqslant k|x_{n-1} - a|$ d'où la majoration par une récurrence simple ■

COROLLAIRE 5.6. *Si $A \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et si f est $\mathcal{C}^1$ sur A, f contractante, on a $x_{n+1} - a \sim k(x_n - a)$ où $k = f'(a)$.*

Dém : On utilise la formule de Taylor avec reste d'Young à l'ordre 1 :

$$x_{n+1} - a = f(x_n) - f(a) = (x_n - a)f'(a) + o(x_n - a)$$

donc $x_{n+1} - a \sim k(x_n - a)$ ■

Exemple : Soit u_n la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \sin u_n = f(u_n)$. On a $f(x) > x$ pour $x \in [0, a[$ où a est l'unique solution de $f(x) = x$ sur $[0, 2\pi]$ (faire une étude de fonction). La suite (u_n) est croissante et converge vers a car f est contractante sur $[1, a]$. On a le tableau de valeurs suivant :

n	1	2	3	4	5	6
u_n	1,3415	1,6446	1,8196	1,8790	1,8924	1,8949

alors que $a\#1,89549426703$.

Amélioration de la convergence, méthode du δ^2 d'Aitken

Soit (x_n) une suite convergeant vers $a \in \mathbb{K}$ telle qu'il existe $C \in \mathbb{K}$, $|C| < 1$ vérifiant $a - x_{n+1} = C(a - x_n)$ alors on a

$$a = \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_{n+2} - \frac{(\Delta x_{n+1})^2}{\Delta^2 x_n} = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}$$

où $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ et $\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n$.

Dans le cas général, on aura plutôt $a - x_{n+1} \sim C(a - x_n)$. La méthode d'Aitken consiste à remplacer la suite (x_n) par la suite (x'_n) définie par $x'_n = x_{n+2} - \dfrac{(\Delta x_{n+1})^2}{\Delta^2 x_n}$.

Si l'on reprend l'exemple de la suite (u_n) et avec les valeurs calculées dans le tableau on obtient $u_6 - \dfrac{(\Delta u_5)^2}{\Delta^2 u_4}\#1,89552$ ce qui constitue une bien meilleure approximation.

Dém :

- Comment obtenir la première égalité : on a $\begin{cases} a - x_{n+1} &= C(a - x_n) \\ a - x_{n+2} &= C(a - x_{n+1}) \end{cases}$ et on élimine C entre ces deux équations (on suppose $C \neq 0$) : on peut faire le rapport de ces deux égalités (en espérant qu'aucune des quantités ne s'annule) ou mieux, faire le produit en croix (ce qui revient au même mais est moins risqué !). En tous cas, on arrive à $(a - x_{n+2})(a - x_n) = (a - x_n)^2$. On développe et on simplifie le terme a^2 d'où

$$-a(x_n + x_{n+2}) + x_n x_{n+2} = -2a x_{n+1} + x_{n+1}^2$$

soit $a = \dfrac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}}$.

Le dénominateur de s'annule pas constamment sinon la suite (x_n) est une suite récurrente double qui se résout en $x_n = \alpha + \beta n$ (1 est racine double de la résolvante). On a supposé que (x_n) avait une limite, ce qui impose $\beta = 0$ (et $a = \alpha$), et on a supposé aussi que $C \neq 0$ donc la suite n'est pas constante ce qui permet de conclure.

- On peut alors réécrire la relation ci-dessus en faisant intervenir l'opérateur Δ. On remarque tout d'abord que

$$\begin{aligned}\Delta(\Delta x_n) &= \Delta(x_{n+1}) - \Delta x_n = (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) \\ &= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = \Delta^2 x_n \text{ (notation)}\end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned}a &= \frac{x_n x_{n+2} - x_{n+1}^2}{x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}} \\ &= \frac{x_{n+2}(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}) - (x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x_{n+2} + x_{n+2}^2)}{\Delta^2 x_n} \\ &= x_{n+2} - \frac{(\Delta x_{n+1})^2}{\Delta^2 x_n}\end{aligned}$$

que l'on peut aussi écrire

$$\begin{aligned}&= \frac{x_n(x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2}) - (x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x_n + x_n^2)}{\Delta^2 x_n} \\ &= x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n}\end{aligned}$$

La dernière relation est plus simple à écrire (et à retenir éventuellement), elle justifie l'appellation δ^2 d'Aitken mais on préférera la première car x_{n+2} est une meilleure approximation de la limite (en général) et le terme correctif $\dfrac{(\Delta x_{n+1})^2}{\Delta^2 x_n}$ sera plus petit ■

Calcul de la racine carrée d'un nombre complexe

Soit $a \in \mathbb{C}^*$, on note $\pm\alpha$ les deux racines carrées de a. On définit la suite (u_n) par $u_0 = b \in \mathbb{C}^* \setminus \Delta$ ou Δ est la médiatrice de $A(\alpha)A'(-\alpha)$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

Par un calcul simple on a $u_{n+1} \pm \alpha = \dfrac{(u_n \pm \alpha)^2}{2u_n}$ donc, comme $u_0 \notin \Delta$ on montre que $u_1 \notin \Delta$ et par une récurrence immédiate, $u_n \notin \Delta$. Les termes de la suite (u_n) sont donc tous définis (aucun ne s'annule).

Si $k = \dfrac{b-\alpha}{b+\alpha}$ avec $|k| < 1$ on a une convergence quadratique et $\dfrac{u_n - \alpha}{u_n + \alpha} = k^{2^n}$.

Dém :

- Montrons la première relation :

$$\begin{aligned}u_{n+1} \pm \alpha &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \pm \alpha \\ &= \frac{1}{2u_n}(u_n^2 + a \pm 2u_n\alpha) = \frac{(u_n \pm \alpha)^2}{2u_n}\end{aligned}$$

- Si $u_{n+1} = \mp\alpha$ alors $(u_n \pm \alpha)^2 = 0$ soit $u_n \pm \alpha = 0$ et par une récurrence descendante, $u_0 \pm \alpha = 0$. On a donc ici une suite constante. On écarte ce cas là par la suite.

La médiatrice de AA' est l'ensemble des points M vérifiant $MA = MA'$ soit $|z-\alpha| = |z+\alpha|$. Or avec la relation que l'on a prouvée au premier point,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}+\alpha} = v_n^2,$$

on a $|v_{n+1}| = |v_n|^2$. Si $|v_0| \neq 1$ (ce qui est supposé par hypothèse), alors $|v_n| \neq 1$, en effet :

- si $|v_0| < 1$, $|v_1| < 1$ et par une récurrence immédiate, $|v_n| < 1$,
- si $|v_0| > 1$, $|v_1| > 1$ et par une récurrence immédiate, $|v_n| > 1$,

donc $u_n \notin \Delta$ pour tout n.
Montrons alors que $u_n \neq 0$ pour tout n : si $u_{n+1} = 0$ alors $u_n + \dfrac{a}{u_n} = 0$ donc $u_n^2 = -a = (i\alpha)^2$. On en déduit alors que $u_n = \pm i\alpha$ soit

$$|u_n - \alpha| = |\alpha|.|\pm i - 1| = |\alpha|.|\pm i + 1| = |u_n + \alpha|$$

mais on vient de voir que ceci n'était jamais réalisé donc la suite (u_n) est bien définie pour tout n.

- $v_{n+1} = v_n^2$ donc, par une récurrence immédiate, $v_n = k^{2^n}$ où $k = \dfrac{u_0-\alpha}{u_0+\alpha}$ (attention ici à ne pas écrire $v_n = k^{2n}$, erreur souvent rencontrée dans les raisonnements).
On résout $\dfrac{u_n-\alpha}{u_n+\alpha} = k^{2^n}$: $u_n = \dfrac{1+k^{2^n}}{1-k^{2^n}}\alpha$. Si $k < 1$ alors $u_n \to \alpha$ ■

Questions :

(*i*) Que se passe-t-il dans le dernier exemple si $|k| = 1$?

(*ii*) Si $x_{n+1} = f(x_n)$ calculer l'abscisse x'_n du point d'intersection de la droite $A\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1}\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2}\end{pmatrix}$ avec la droite $y = x$ (calculer x'_n en fonction de x_n, Δx_n, $\Delta^2 x_n$ où $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$). Que remarque-t-on ?

(*iii*) On pose $e_n = x_n - a$ et on suppose que $e_{n+1} = (A + \varepsilon_n)e_n$ où $e_n \neq 0$, $|A| < 1$ et $\varepsilon_n = o(1)$. Montrer alors que $\dfrac{x'_n - a}{x_n - a} \to 0$ quand $n \to +\infty$ (cf. (*ii*)).

(*iv*) On suppose que f admet sur l'intervalle I un unique point fixe a, que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et enfin que $f'(a) = 0$.
Montrer que si la suite récurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a alors la convergence est quadratique (i.e. $x_{n+1} - a \sim C(x_n - a)^2$), on double pratiquement le nombre de décimales à chaque itération.

5.1.4 Topologie d'un espace vectoriel normé

Définition 5.1.17. ***Voisinage d'un point***
On dit que V_a est un voisinage de a ssi$_{\text{déf}}$ V_a contient une boule ouverte de centre a.

Proposition 5.1.6.
Une intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.
Tout ensemble contenant un voisinage de a est un voisinage de a.

Dém :

- Soit $V_1, \ldots, V_n$ des voisinages de a alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ il existe $r_i > 0$ tel que $B(a, r_i) \subset V_i$. On pose $r = \min\limits_{i \in [\![1,n]\!]} (r_i)$ alors $B(a, r) \subset V_i$ pour tout i donc $B(a, r) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$.
  Conclusion : $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage de a.
- Si A contient V un voisinage de a alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V \subset A$ donc A est un voisinage de a $\blacksquare$

Définition 5.1.18. ***Partie ouverte, partie fermée***
Une partie $A \subset E$ est un ouvert ssi$_{\text{déf}}$ A est un voisinage de chacun de ses points.
Une partie $B \subset E$ est un fermé ssi$_{\text{déf}}$ son complémentaire dans E est un ouvert.

Proposition 5.1.7.
Une boule ouverte est un ouvert, une boule fermée est un fermé.

Dém : Soit $B(a, r)$ une boule ouverte, $r > 0$.

- Montrons que pour tout $B(a, r)$ est un voisinage de tous ses points :
  Si $x \in B(a, r)$ alors $B(x, r - \mathrm{d}(a, x)) \subset B(a, r)$ (faire un dessin), en effet soit $y \in B(x, r - \mathrm{d}(a, x))$ alors
  $$\mathrm{d}(a, y) \leqslant \mathrm{d}(a, x) + \mathrm{d}(x, y) < \mathrm{d}(a, x) + (r - \mathrm{d}(a, x)) = r$$
  donc $y \in B(x, r)$ ce qui prouve effectivement que $B(a, r)$ est un ouvert.
- Montrons que le complémentaire de $\overline{B}(a, r)$ est un ouvert :
  Si $x \notin \overline{B}(a, r)$ alors montrons que $B(x, \mathrm{d}(a, x) - r)$ est contenue dans le complémentaire de $\overline{B}(a, r)$. Soit $y \in B(x, \mathrm{d}(a, x) - r)$ alors, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a
  $$\mathrm{d}(a, y) \geqslant \mathrm{d}(a, x) - \mathrm{d}(y, x) > \mathrm{d}(a, x) - (\mathrm{d}(a, x) - r) = r$$
  donc $B(x, \mathrm{d}(a, x) - r) \cap \overline{B}(a, r) = \emptyset$ $\blacksquare$

PROPOSITION 5.1.8.
Une union quelconque d'ouverts est un ouvert.
Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Dém :

- Si $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$ alors, par définition d'une réunion d'ensemble, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$.
  Comme O_{i_0} est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $x \in B(x, r) \subset O_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} O_i$.
  Conclusion : $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert.

- Si $x \in \bigcap_{i=1}^{n} O_i$ alors, pour tout i, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x, r_i) \subset O_i$. On pose alors, avec $r = \min r_i > 0$, on a $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} O_i$ (on pouvait aussi utiliser la propriété 5.1.6) ■

***Remarque* 5.1.9.**

(i) *Une intersection infinie d'ouverts n'est pas un ouvert,*

exemple $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[= \{0\}$ *(cf. exemple page 113).*

(ii) *Par complémentation, on obtient les propriétés sur les fermés :*

Une intersection quelconque de fermés est un fermé, une réunion finie de fermés est un fermé.

DÉFINITION 5.1.19. ***Point adhérent, adhérence d'une partie***
Soit A une partie non vide de E, on dit que a est adhérent à A ssi$_{déf}$ tout voisinage de a rencontre A.
L'ensemble des points adhérents à A est appelé adhérence de A et est noté $\overline{A}$.
Par convention, on notera $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

***Remarque* 5.1.10.**

(i) *On a évidemment $A \subset \overline{A}$.*
Dém : Soit $x \in A$ alors, pour tout voisinage V_x de x, on a $x \in V_x \cap A$ ce qui signifie que $x \in \overline{A}$ ■

(ii) *On a alors $\overline{A} = \{a \in E \mid \forall V_a,\ V_a \cap A \neq \emptyset\}$.*
Dém : En fait, c'est exactement la traduction avec des quantificateurs de la définition ■

DÉFINITION 5.1.20. ***Partie dense***
On dit qu'une partie A de E est dense dans E ssi$_{déf}$ $\overline{A} = E$

Exemples :

(i) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Dém : On prend bien sûr la valeur absolue comme norme sur $\mathbb{R}$. On sait que tout intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ rencontre $\mathbb{Q}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors, pour tout $r > 0$, $]x-r, x+r[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ donc, par définition, $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. On a $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}}$, l'inclusion inverse étant immédiate on a bien $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ ■

(ii) Soit $E = \mathbb{R}[X]$ que l'on muni de la norme N : $N\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{|a_i|}{i+1}$ alors $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \sum_{i=0}^{n} a_i = 0\}$ est dense dans $\mathbb{R}[X]$.
Dém : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, on écrit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, montrons qu'il existe une suite d'éléments de A qui tend vers P :
on pose $P_k = P - \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) X^k$ alors $N(P - P_k) = \frac{\left|\sum_{i=0}^{n} a_i\right|}{k+1} \to 0$. Pour tout $r > 0$ il existe k tel que $N(P - P_k) < r$ donc $B(P, r) \cap A \neq \emptyset$ ce qui signifie que $P \in \overline{A}$. Comme ci-dessus, on peut conclure que $\mathbb{R}[X] = \overline{A}$ ■

Théorème 5.7. **Caractérisation des fermés**
Si A est une partie non vide de E alors $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A (i.e. l'intersection de tous les fermés contenant A).
A est fermée ssi $\overline{A} = A$.

Dém : Soit $\mathcal{F} = \{B \subset E \mid B$ fermé et $A \subset B\}$.

- Montrons que $\left(\overline{A}\right)^c$ est ouvert (et donc que $\overline{A}$ est fermé) :
Soit $x \in \left(\overline{A}\right)^c$ alors, en prenant la contraposée de $x \in \overline{A}$ ($\forall V_x$, $V_x \cap A \neq \emptyset$) on obtient l'existence de V_x voisinage de x tel que $V_x \cap A = \emptyset$. Ceci se traduit alors par :
$$\exists B(x, r) \mid B(x, r) \cap A = \emptyset.$$
Or, pour tout y de $B(x, r)$, $B(y, r - \mathrm{d}(x, y)) \cap A = \emptyset$ (on a déjà vu que $B(y, r - \mathrm{d}(x, y)) \subset B(x, r)$—cf. démonstration de la propriété 5.1.7 page 274—et $B(x, r) \cap A = \emptyset$) donc $B(x, r) \subset (\overline{A})^c$ et $(\overline{A})^c$ est un ouvert.
On vient de prouver que $\overline{A} \in \mathcal{F}$ donc $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \subset \overline{A}$.

- Montrons que c'est le plus petit fermé :
Soit F un fermé contenant A, si $x \notin F$ alors, comme F^c est ouvert, il existe un voisinage de x, V_x, tel que $V_x \cap F = \emptyset$ i.e. $V_x \cap A = \emptyset$ (car $A \subset F$) donc, par contraposée (cf. première partie de la démonstration) $x \notin \overline{A}$ et en conclusion $\overline{A} \subset F$.
Ceci étant vrai pour tout F, on obtient $A \subset \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$.

On a ainsi prouvé l'égalité $\overline{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$.
L'équivalence est alors immédiate :

- En effet, si A est fermé alors $A \in \mathcal{F}$ (donc $\overline{A} \subset A$) et $A \subset \overline{A}$ (cf. remarque 5.1.10) par conséquent $A = \overline{A}$.

- Réciproquement : si $A = \overline{A}$ alors, comme $\overline{A}$ est fermé, A est fermé ■

DÉFINITION 5.1.21. ***Point intérieur, intérieur d'un ensemble***
Si A est une partie non vide de E, on dit que $a \in E$ appartient à l'intérieur de A ssi$_{déf}$ il existe une boule ouverte $B(a, r)$ contenue dans A.
L'ensemble des points intérieurs à A est appelé intérieur de A et est noté $\overset{\circ}{A}$.
Par convention, on notera $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$.

***Remarque* 5.1.11.** *On a $\overset{\circ}{A} = \bigcup\limits_{O \subset A} O$.*

Dém : Posons $A' = \bigcup\limits_{O \subset A} O$ et $\mathcal{O} = \{O \subset E \mid O \text{ ouvert et } O \subset A\}$.

- Soit $x \in \overset{\circ}{A}$ alors, par définition, il existe $B(x, r) \subset A$ or $B(x, r)$ est un ouvert contenu dans A donc $B(x, r) \subset A'$ ce qui entraîne que $x \in A'$ et en conséquence que $\overset{\circ}{A} \subset A'$.
- Soit $x \in A'$, par définition de la réunion d'une famille d'ensembles, il existe $O \in \mathcal{O}$ tel que $x \in O$ donc, comme O est ouvert, on trouve $B(x, r) \subset O \subset A$ ce qui se traduit par $x \in \overset{\circ}{A} \subset A'$. On a prouvé que $A' \subset \overset{\circ}{A} \subset A'$.

Conclusion : on a ainsi l'égalité $\overset{\circ}{A} \subset A' = \bigcup\limits_{O \subset A} O$ ■

THÉORÈME 5.8. Le complémentaire de l'intérieur d'un ensemble A est égal à l'adhérence du complémentaire,
le complémentaire de l'adhérence de A est égal à l'intérieur du complémentaire.
Si on note A^c le complémentaire dans E de A alors cette propriété s'écrit

$$\left(\overset{\circ}{A}\right)^c = \overline{A^c} \text{ et } \left(\overline{A}\right)^c = \overset{\circ}{A^c}$$

Dém : On reprend les notations de la question précédente.

- En utilisant l'équivalence $\Big(O \subset A,\ O \text{ ouvert}\Big) \Leftrightarrow \Big(O^c \supset A^c,\ O^c \text{ fermé}\Big)$ on obtient

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{O \subset A} O \Rightarrow \text{ par complémentation } \left(\overset{\circ}{A}\right)^c = \bigcap_{F \supset A^c} F = \overline{A^c}$$

- On peut redémontrer la deuxième égalité de la même manière ou remarquer que le complémentaire du complémentaire de A est A donc

$$(\overline{A})^c = \left(\overline{A^{cc}}\right)^c = \left(\overset{\circ}{A^c}\right)^{cc} = \overset{\circ}{A^c} ■$$

DÉFINITION 5.1.22. ***Point frontière, frontière d'un ensemble***
Si A est un ensemble non vide, on dit qu'un point $a \in E$ est point frontière de A ssi$_{déf}$ il appartient à l'adhérence de A et à l'adhérence de son complémentaire.
L'ensemble des points frontières de A est appelé frontière de A est noté $\mathrm{Fr}(A)$.

***Remarque* 5.1.12.** *Grâce au théorème précédent, on sait que* $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Dém : On peut raisonner par équivalences :

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Fr}(A) &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{A^c} && \text{par définition} \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overset{\circ}{A}{}^c \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} && \blacksquare \end{aligned}$$

THÉORÈME 5.9. **Caractérisation séquentielle de l'adhérence, d'un fermé**
a est adhérent à A ssi a est limite d'une suite d'éléments de A.
A est fermé ssi toute suite d'éléments de A qui converge dans E converge dans A.

Dém :

- – Si $a \in \overline{A}$ on prend $a_n \in B(a, \frac{1}{n+1}) \cap A$ (ensemble non vide car $a \in \overline{A}$). La suite (a_n) appartient à $A^{\mathbb{N}}$ et $\|a - a_n\| < \dfrac{1}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.
  – La réciproque est immédiate : soit $B(a, r)$ une boule ouverte centrée en a et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers a. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $\|a - a_n\| < r$ donc $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$ ce qui se traduit par $a \in \overline{A}$.
- Enfin, A fermé ssi $A = \overline{A}$. Montrons l'équivalence ;
  – Si $A = \overline{A}$, soit $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $a \in E$. On en déduit que $a \in \overline{A} = A$.
  – Réciproque : soit $a \in \overline{A}$ alors on vient de voir que $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ où $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$. On sait, d'après l'hypothèse de la réciproque, que $a \in A$ donc $\overline{A} \subset A$ (et $A \subset \overline{A}$ est une propriété générale) donc $A = \overline{A}$, A est fermé.

  Cette dernière équivalence est très utile pour prouver qu'un ensemble est fermé et sera souvent utilisée $\blacksquare$

Il est parfois nécessaire de retrouver les notions que l'on vient de définir sur E espace vectoriel normé pour une partie A non vide de E, notamment lorsque A est l'ensemble de définition d'une fonction.

DÉFINITION 5.1.23. ***Topologie induite***
Si A est une partie non vide de E, on définit alors

(i) *Voisinage relatif de $a \in A$: $V_a \cap A$ où V_a est un voisinage de a dans E.*

(ii) *Ouvert relatif dans A : $O \cap A$ où O est un ouvert de E.*

(*iii*) *Fermé relatif dans A : $F \cap A$ où F est un fermé de E.*

Exemple : sur $\mathbb{R}$, si $A =]a, b[$, $c \in A$ alors $[c, b[$ est fermé dans A.
En reprenant les définitions données dans le cas général, on peut définir l'adhérence relative, l'intérieur relatif et un ensemble B dense dans A.
Enfin, pour terminer cette sous-section, une dernière définition.

DÉFINITION 5.1.24. ***Propriété vraie au voisinage d'un point***
Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$ une fonction définie sur une partie A de E, on dit qu'une propriété (portant sur f) est vraie au voisinage de $a \in \overline{A}$ ssi$_{déf}$ elle est vraie sur l'intersection de A avec un voisinage de a.
Si $E = \mathbb{R}$ et $a = +\infty$, on étend cette définition en prenant l'ensemble $]c, +\infty[$, $]-\infty, c[$ si $a = -\infty$.
Enfin, si E est un e.v.n. et si a est à l'infini, on prend le complémentaire d'une boule de centre 0.

Exemples :

(*i*) On dit qu'une fonction est positive au voisinage de $+\infty$ s'il existe $I =]c, +\infty[$ tel que $f \geqslant 0$ sur I.

(*ii*) $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$ n'est pas bornée au voisinage de 0.

Question : soit $A \subset E$, A non vide, on sait que $\delta(B(a, r) \cap A) \leqslant 2r$ mais qu'il n'y a pas forcément égalité (cela dépend de A). Montrer que $\delta(B(a, r)) = 2r$ (ici, $A = E$).

5.1.5 Étude locale d'une application, continuité

Comme sur $\mathbb{R}$, on définit la limite d'une fonction.

DÉFINITION 5.1.25. ***Limite d'une fonction***
Soit $f : A \to F$, $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$. Étant donné un élément b de F, on dit que f admet b comme limite au point a si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que, pour tout élément x de A, la relation $\|x - a\| \leqslant \eta$ implique la relation $\|f(x) - b\| \leqslant \varepsilon$.
Ce qui donne avec les quantificateurs

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A \mid \|x - a\| \leqslant \eta, \|f(x) - b\| \leqslant \varepsilon.$$

PROPOSITION 5.1.9. *Le vecteur b est unique, on le note $\lim_{x \to a} f(x) = b$ et la traduction en terme de voisinage s'écrit*

$$\forall V_b,\ \exists V_a,\ f(V_a \cap A) \subset V_b.$$

Dém :

- On va faire ici (pour changer) une démonstration par l'absurde. Soient $b \neq b'$ deux limites de f en a. On prend $\varepsilon = \dfrac{\|b - b'\|}{3}$, par définition, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x) - b\| \leqslant \varepsilon \text{ et } \|f(x) - b'\| \leqslant \varepsilon.$$

d'où $\varepsilon = \|b - b'\| \leqslant \|b - f(x)\| + \|f(x) - b'\| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{3}$ ce qui est tout simplement impossible.

- Pour la deuxième propriété, on a une équivalence que l'on va prouver (comme souvent) par double implication.
  - Des ε vers les voisinages : soit V_b un voisinage de b alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(b, \varepsilon) \subset V_b$. Or on sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que, si $x \in B(a, \eta) \cap A$, alors $f(x) \in B(b, \varepsilon)$. On prend donc comme V_a voisinage de a la boule $B(a, \eta)$ et on a bien $f(V_a \cap A) \subset V_b$.
  - Des voisinages vers les ε : soit $\varepsilon > 0$, on prend $V_b = B(b, \varepsilon)$, on sait par hypothèse qu'il existe V_a tel que $\forall x \in V_a \cap A$, $\|f(x) - b\| \leqslant \varepsilon$. Comme V_a est un voisinage de a alors il existe $\eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset V_a$. En reprenant ce qu'on vient d'écrire on aura bien $\forall x \in B(a, \eta) \cap A$, $\|f(x) - b\| \leqslant \varepsilon$ ■

DÉFINITION 5.1.26. ***Extension de la notion de limite***

- *$a = \pm\infty$, $E = \mathbb{R}$ on prend les voisinages $]c, +\infty[$ si $a = +\infty$ et $]-\infty, c[$ si $a = -\infty$.*
- *De même si f est à valeurs réelles et $b = \pm\infty$.*
- *Si f est à valeurs vectorielles, on dit que $f \to \infty$ ssi$_{déf}$ $\|f\| \to +\infty$.*

DÉFINITION 5.1.27. ***Limite selon un ensemble***
Soit P une partie de A et a adhérent à P, on dit que f admet une limite en a selon P ssi$_{déf}$ la restriction de f à P admet une limite en a notée $\lim\limits_{x \to a, x \in P} f(x)$.

DÉFINITION 5.1.28. ***Continuité en un point***
f est continue en a ssi$_{déf}$ $a \in A$ et la limite de f en a existe. Cette limite est bien entendu égale à $f(a)$. Avec les voisinages, on a $\forall V_{f(a)}$, $\exists V_a \mid f(V_a \cap A) \subset V_{f(a)}$.

***Remarque* 5.1.13.** *On a l'équivalence suivante : f admet une limite en $a \in \overline{A} \setminus A$ ssi f se prolonge par continuité en a.*

Là aussi, on retrouve les propriétés usuelles de la continuité en un point.

PROPOSITION 5.1.10. ***Limite du composé de deux fonctions***
Soit $A \subset E$ et $B \subset F$, E, F, G trois e.v.n. et $g \in \mathcal{F}(A, F)$, $f \in \mathcal{F}(B, G)$.
Si $g(A) \subset B$ on a alors

$$\begin{pmatrix} \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \\ \lim\limits_{x \to b} f(x) = c \end{pmatrix} \Rightarrow \lim_{x \to a} f \circ g(x) = c.$$

Dém : Immédiat avec les voisinages, on traduit les hypothèses :

(i) $\forall V_b$, $\exists V_a \mid g(V_a \cap A) \subset V_b$,

(ii) $\forall V_c$, $\exists V'_b \mid f(V'_b \cap B) \subset V_c$.

Soit V_c un voisinage de c alors il existe un voisinage de a, V_a tel que $g(V_a \cap A) \subset V'_b$ (on utilise la propriété (i) avec V'_b mis en évidence par (ii)). Comme $g(V_a \cap A) \subset B$ (c'est là qu'intervient l'hypothèse $g(A) \subset B$), on a $g(V_a \cap A) \subset V'_b \cap B$ et

$$f \circ g(V_a \cap A) \subset f(V'_b \cap B) \subset V_c$$

donc on a prouvé que $\forall V_c$, $\exists V_a \mid f \circ g(V_a \cap A) \subset V_c$ ce qui traduit exactement la conclusion attendue : $\lim\limits_{x \to a} f \circ g(x) = c$ ■

On retrouve aussi les propriétés de linéarité des limites.

Dém : Les démonstrations sont les mêmes que pour les fonctions d'une variable réelle.

Si f et g sont définies sur $A \subset E$ à valeurs dans F espace vectoriel normé, si f et g ont une limite en a alors

$$\lim_{x \to a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda \lim_{x \to a} f(x) + \mu \lim_{x \to b} g(x).$$

On remplace les valeurs absolues des démonstrations par des $\|$ ■

PROPOSITION 5.1.11. ***Fonction à valeurs dans un e.v.n. produit***

Si $f = (f_1, \ldots, f_p)$ est une fonction définie sur $A \subset E$ à valeurs dans $E_1 \times \ldots \times E_p$ alors

$$(\lim_{x \to a} f(x) \text{ existe }) \Leftrightarrow (\forall i \in [\![1, p]\!], \ \lim_{x \to a} f_i(x) \text{ existe.}$$

Dém : On retrouve la démonstration que l'on a pu faire pour les suites (cf. proposition 5.1.2 page 267).

- $(\Rightarrow)$: On pose $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b = (b_1, \ldots, b_p)$.
  Pour $i \in [\![1, p]\!]$ on a $N_i(f_i(x) - b_i) \leqslant N(f(x) - b) \to 0$ donc $\lim\limits_{x \to a} f_i(x) = b_i$.
- On peut reprendre en effet la démonstration citée ci-dessus ou bien utiliser l'argument suivant :
  par récurrence sur p, si $g_1, \ldots, g_p$ sont des réels, on montre que l'application $m\ : (g_1, \ldots, g_p) \mapsto \max(g_1, \ldots, g_p)$ est continue, on utilise les formules :
  - $\max(g_1, g_2) = \dfrac{1}{2}(g_1 + g_2) + \dfrac{1}{2}|g_1 + g_2|$,
  - $\max(g_1, \ldots, g_p) = \max(\max(g_1, \ldots, g_{p-1}), g_p)$.

  On prend alors $g_i(x) = N_i(f_i(x) - b_i)$ et, par définition de N, on a $\max(g_1(x), \ldots, g_p(x)) = N(f(x) - b)$ donc $N(f(x) - b) \to 0$ grâce à la continuité de m ■

Et comme en première année on a le théorème suivant qui se généralise.

THÉORÈME 5.10. **Caractérisation séquentielle d'une limite**

Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$ alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \ \lim_{n \to +\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = b.$$

Dém :

- ($\Rightarrow$) Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_n x_n = a$ alors

$$\exists N,\ \forall n \geqslant N,\ \|x_n - a\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x_n) - b\| \leqslant \varepsilon$$

i.e. $\lim_n f(x_n) = b$. On peut aussi utiliser le théorème de composition des limites (généralisé) en considérant les applications $x : n \in \mathbb{N} \mapsto x(n) = x_n \in A$ et f. On a alors $f(x_n) = f \circ x(n)$ et $\lim_{n\to+\infty} f \circ x(n) = b$.

- ($\Leftarrow$) Par l'absurde, on nie la propriété

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\eta > 0,\ |\ \forall x \in A \cap \overline{B}(a,\eta),\ \|f(x) - b\| < \varepsilon$$

ce qui donne

$$\exists\varepsilon > 0,\ \forall\eta > 0,\ \exists x \in A,\ \|x - a\| \leqslant \eta,\ \|f(x) - b\| \geqslant \varepsilon$$

et donc, avec $\eta = \dfrac{1}{n}$ on construit une suite (x_n) telle que $x_n \to a$ mais, comme $\|f(x_n) - b\| \geqslant \varepsilon$ alors $f(x_n) \not\to b$ ■

***Remarque* 5.1.14.**

(*i*) *Le dernier théorème nous permet aussi de caractériser la limite en un point a par*

$$f\big(\lim_{n\to+\infty} x_n\big) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

pour toute suite (x_n) qui tend vers a.

(*ii*) *On peut remplacer ce théorème par*
$\lim_{x\to a} f(x)$ *existe ssi* $\forall (x_n),\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ *existe.*

Dém : Le sens direct est immédiat, pour la réciproque, il suffit de montrer que si (x_n) et (y_n) sont deux suites qui tendent vers a alors les suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ ont même limite :

pour cela, il suffit de définir la suite (z_n) par $\begin{cases} z_{2n} & = x_n \\ z_{2n+1} & = y_n \end{cases}$. *La suite (z_n) tend bien vers a, donc $(f(z_n))$ admet une limite (par hypothèse). Or, si $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$, $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = b'$ et $\lim_{n\to+\infty} f(z_n) = b''_n$ alors*

$$b = \lim_{n\to+\infty} f(z_{2n}) = b'' = \lim_{n\to+\infty} f(z_{2n+1}) = b'.$$

On a ainsi prouvé qu'il existe $b \in F$ tel que, pour toute suite (x_n) qui tend vers a, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = b$, on utilise alors le théorème précédent ■

Pour la suite de ce paragraphe, on prend $a \in \overline{A}$ et on note $\lim f$ la limite de f en a : $\lim_{x\to a} f(x)$.

Définition 5.1.29. ***Notations de Landau***
Si $f \in \mathcal{F}(A,F)$ et $\varphi \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$ alors

(*i*) $f = o(\varphi)$ *ssi*$_{\text{déf}}$ $\forall\varepsilon > 0$, $\exists V_a$ *voisinage de a tel que* $\forall x \in V_a$, $\|f(x)\| \leqslant \varepsilon|\varphi(x)|$ *(on peut aussi dire que* $\lim \dfrac{f}{\varphi} = 0$ *si φ ne s'annule pas).*

(*ii*) $f = O(\varphi)$ *ssi*$_{\text{déf}}$ $\exists M > 0,\ \exists V_a,\ \forall x \in V_a,\ \|f(x)\| \leqslant M|\varphi(x)|$.

DÉFINITION 5.1.30. ***Fonctions équivalentes***
Si f et g sont dans $\mathcal{F}(A, F)$ alors on dit que f est équivalent à g au voisinage de a ssi$_{déf}$ $f - g = o(\|g\|)$, *relation notée* $f \sim g$.

DÉFINITION 5.1.31. ***Continuité sur un ensemble***
On dit que f est continue sur A ssi$_{déf}$ *f est continue en chaque point de A. L'ensemble des applications continues sur A est noté $\mathcal{C}(A, F)$.*

PROPOSITION 5.1.12. *$\mathcal{C}(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.*
$\mathcal{C}(A)$ ensemble des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est une sous-algèbre de l'ensemble des fonctions définies sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Dém :

- Si f et g sont des fonctions continues sur A alors, grâce aux propriétés de linéarité des limites, pour tout $x \in A$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g$ est continue en x donc $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}(A, F)$. $\mathcal{C}(A, F)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, F)$.
- La fonction constante égale à 1 est continue donc elle appartient à $\mathcal{C}(A)$. On utilise ensuite le fait que si f et g ont une limite en x alors fg admet aussi une limite en x. $\mathcal{C}(A)$ est donc une sous-algèbre de $\mathcal{F}(A, \mathbb{K})$ ■

PROPOSITION 5.1.13.

(i) *Si $g \in \mathcal{C}(A, F)$, $f \in \mathcal{C}(B, G)$ et si $g(A) \subset B$ alors $f \circ g \in \mathcal{C}(A, G)$.*

(ii) *Si $f \in \mathcal{C}(A, F)$ et si $A_1 \subset A$ alors $f_1 = f_{|A_1} \in \mathcal{C}(A_1, F)$.*

(iii) *Si $F = F_1 \times \ldots \times F_p$ est un espace vectoriel normé produit alors*

$$f = (f_1, \ldots, f_p) \in \mathcal{C}(A, F) \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ f_i \in \mathcal{C}(A, F_i).$$

Dém :

(i) Si $g \in \mathcal{C}(A, F)$, $f \in \mathcal{C}(B, G)$ et si $g(A) \subset B$ alors on peut appliquer, pour tout $x \in A$, la composition des limites donc $f \circ g \in \mathcal{C}(A, G)$.

(ii) Si $f \in \mathcal{C}(A, F)$ et si $A_1 \subset A$ alors $f_1 = f_{|A_1} \in \mathcal{C}(A_1, F)$ est immédiat (on restreint le domaine de départ).

(iii) Conséquence immédiate de la proposition 5.1.11 page 281 ■

THÉORÈME 5.11. Soient f et g deux applications continues de A dans F et si f et g coïncident sur une partie B dense dans A alors elles sont égales.

Dém : Soit $x \in A$, comme B est dense dans A alors il existe $(x_n) \in B^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$. Par hypothèse, on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = g(x_n)$$

et comme f et g sont continues, on peut passer à la limite, d'où $f(x) = g(x)$ et ceci pour tout x donc $f = g$ ■

Ce théorème est souvent utilisé avec les relations fonctionnelles, on prouve que deux fonctions continues sont égales sur $\mathbb{Q}$ ou sur l'ensemble des réels de la forme $\frac{k}{2^n}$ pour conclure à leur égalité.

THÉORÈME 5.12. **Caractérisation des applications continues**
f est continue sur A ssi $\forall O$ ouvert de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert relatif de A.

Attention à la topologie induite!
Dém : Résultat un peu abstrait mais très général, permet de faire des démonstrations particulièrement simples.

- ($\Rightarrow$) Soit O un ouvert de F, on suppose que $f^{-1}(O) \neq \emptyset$(sinon, par convention $\emptyset$ est un ouvert et la démonstration est terminée).
  Si $a \in f^{-1}(O)$ et $b = f(a) \in O$ alors O est un voisinage de b donc il existe V_a voisinage ouvert de a tel que $f(V_a \cap A) \subset O$ (par propriété de la limite) et donc
  $$V_a \cap A \subset f^{-1}(f(V_a \cap A)) \subset f^{-1}(0)$$
  (on a conservation des inclusions par image réciproque et l'application réciproque "grossit"). On en déduit que $f^{-1}(O)$ est un voisinage relatif de a dans A et ceci pour tout $a \in A$ donc $f^{-1}(O)$ est un ouvert relatif de A.

- ($\Leftarrow$) Soit $a \in A$ et $\varepsilon > 0$. On pose $V_{f(a)} = B(f(a), \varepsilon)$. Par hypothèse, $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon)) = f^{-1}(V_{f(a)})$ est un ouvert relatif de A. C'est donc aussi un voisinage relatif de a que l'on note V_a. On a ainsi
  $$f(V_a) = f(f^{-1}(V_{f(a)})) = f(f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))) \subset B(f(a), \varepsilon) = V_{f(a)}$$
  (l'application directe "réduit", au contraire de l'application réciproque). On peut alors conclure à la continuité de f en a pour tout $a \in A$.
  Dans le livre, je propose une démonstration plus "synthétique" :
  pour tout V_b il existe O tel que $b \in O$, $O \subset V_b$. On prend $V_a = f^{-1}(O)$ et on a $f(V_a) \subset V_{f(a)}$ ■

***Remarque* 5.1.15.** *On a aussi équivalence si on prend des fermés.*

Dém : La propriété s'écrit

$$f \in \mathcal{C}(A, F) \Leftrightarrow \forall C \text{ fermé de } F,\ f^{-1}(C) \text{ est un fermé de } A.$$

Et cela vient du fait que $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$, que l'on peut prouver par équivalences :

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B^c) &\Leftrightarrow f(x) \in B^c \Leftrightarrow f(x) \notin B \\ &\Leftrightarrow x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)^c \blacksquare \end{aligned}$$

Question : Soit $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$, montrer que $\{x \in A \mid f(x) \neq 0\}$ est un ouvert de A.

5.1.6 Applications linéaires continues

Théorème 5.13. Caractérisation des applications linéaires continues
Soient (E,N) et (F,N') deux e.v.n., $u\in\mathcal{L}(E,F)$; on a alors équivalence entre :

(i) u est continue sur E,

(ii) u est continue en 0,

(iii) $\exists C>0,\ N'(u(x))\leqslant CN(x)$.

Dém :

- $(i)\Rightarrow(ii)$: Évident.
- $(ii)\Rightarrow(iii)$: On traduit la continuité de u en 0 :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta>0,N(x)\leqslant\eta\Rightarrow N'(u(x))\leqslant\varepsilon.$$

  On pose $C=\dfrac{\varepsilon}{\eta}$ et pour $y\in E\setminus\{0\}$ on prend $x=\frac{y}{N(y)}\eta$.
  On a $N(x)=N(\frac{y}{N(y)}\eta)=\eta$ donc, $N'(u(x))\leqslant\varepsilon$ vu la propriété rappelée ci-dessus. Ceci s'écrit alors sous la forme

$$N'(u(x))=N'\left(\frac{\eta}{N(y)}u(x)\right)=\frac{\eta}{N(y)}N'(u(y))\leqslant\varepsilon$$

  donc, pour tout $y\in E\setminus\{0\}$, $N'(u(y))\leqslant\dfrac{\varepsilon}{\eta}N(y)=CN(y)$ (évident si $y=0$).
- $(iii)\Rightarrow(i)$: On a $N'(u(x)-u(y))=N'(u(x-y))\leqslant CN(x-y)$ donc u est C-lipschitzienne i.e. u est continue sur E ■

Exemples : il est utile d'avoir des exemples d'applications linéaires non continues.

(i) Soit $\varphi\ :P\in\mathbb{R}[X]\mapsto P(2)\in\mathbb{R}$ où $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme 1. Si $P_n=X^n$ alors $N_1(P_n)=1$ et $\varphi(P_n)=2^n\to+\infty$.

Dém : Si φ était continue, il existerait C tel que $|\varphi(P)|\leqslant CN_1(P)$ pour tout polynôme P. Avec les polynômes P_n, cela donne $2^n\leqslant C$ pour tout n est c'est impossible.
Conclusion : φ n'est pas continue ■

(ii) $(\mathbb{R}[X],N_\infty)\xrightarrow{I}(\mathbb{R}[X],N_1)$ où I est l'identité et $P_n=\frac{1}{n}(1+X+\cdots+X^{n-1})$, $N_1(P_n)=1$ et $N_\infty(P_n)=\frac{1}{n}$.

Dém : Si I est continue, même raisonnement que ci-dessus, il existerait C tel que $N_1(I(P))=N_1(P)\leqslant CN_\infty(P)$ et, avec P_n, on a $1\leqslant C\dfrac{1}{n}$ ce qui est là aussi impossible. I n'est pas continue et cela peut paraître surprenant, le théorème qui suit précise justement ce genre de situation ■

Théorème 5.14. Caractérisation de l'équivalence des normes
Soit E un espace vectoriel, N et N' deux normes sur E alors on a équivalence entre les trois propriétés ci-dessous

(i) N et N' sont équivalentes,

(ii) les applications $\begin{array}{l} I_E : x \in (E,N) \mapsto x \in (E,N') \\ I'_E : x \in (E,N') \mapsto x \in (E,N) \end{array}$ sont continues,

(iii) (E,N) et (E,N') ont les mêmes parties ouvertes.

Dém :

- $(ii) \Rightarrow (i)$: I_E et I'_E sont continues, on utilise le (iii) du théorème précédent, donc il existe C et C' telles que

$$\forall x \in E,\ N'(I_E(x)) = N'(x) \leqslant CN(x)$$
$$\forall x \in E,\ N(I'_E(x)) = N(x) \leqslant C'N'(x)$$

  par conséquent N et N' sont équivalentes.

- $(i) \Rightarrow (ii)$: On a $N'(I_E(x)) = N'(x) \leqslant \alpha N(x)$ donc, grâce au théorème précédent, I_E est continue. De même en échangeant les rôles de N et N' on obtient $N(I'_E(x)) = N(x) \leqslant \beta N'(x)$. N et N' sont équivalentes.

- $(ii) \Leftrightarrow (iii)$: On utilise le théorème 5.12 page 284 et l'équivalence est alors immédiate :
  notons $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ l'ensemble des ouverts pour N et pour N'.

  - $(ii) \Rightarrow (iii)$: Soit $O' \in \mathcal{T}'$, comme I_E est continue, $O' = I^{-1}(O')$ est un ouvert de (E,N), $O' \in \mathcal{T}$ i.e. $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Par symétrie, on a aussi $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ donc $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.
  - $(iii) \Rightarrow (ii)$: On sait que O' ouvert de (E,N') est un ouvert de (E,N) donc $I^{-1}(O') \in \mathcal{T}$. D'après le théorème 5.12, I_E est continue.
    Il en est de même pour I'_E, I'_E est continue ■

***Remarque* 5.1.16.** *Grâce au (iii) du théorème sur la caractérisation des applications linéaires continues, $\|u(x)\|$ est bornée sur la boule unité et on a égalité entre :*
$$\sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|,\ \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|u(x)\|,\ \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \text{ et } \inf\{C>0 | \forall x \in E, \|u(x)\| \leqslant C\|x\|\}.$$

Dém : cf. question (i) page 289 ■

Définition 5.1.32. ***Norme subordonnée***
Si (E,N) et (F,N') sont deux espaces vectoriels normés et u une application linéaire continue de E dans F, on appelle norme subordonnée à N et N' le réel

$$\|u\| = \sup_{N(x)\leqslant 1} N'(u(x)).$$

***Remarque* 5.1.17.**

(*i*) *Si le choix des normes sur E et F ne présente pas d'ambiguité, on adopte la même notation pour les normes.*

(*ii*) *On a aussi $\|u(x)\| \leqslant \|u\|.\|x\|$.*

Dém : Par définition, on a $\|u\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}$ ce qui s'écrit encore

$\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} \leqslant \|u\|$ ■

(*iii*) *Certains auteurs notent $|||u|||$ la norme subordonnée, d'autre $|u|$...*

THÉORÈME 5.15. **Espace $\mathcal{LC}(E, F)$**
Si E et F sont deux espaces vectoriels normés, l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F muni de la norme subordonnée est un espace vectoriel normé.

Dém : On utilise la propriété $\|u\| = \sup\limits_{\|x\|_E=1} \|u(x)\|_F$. $\mathcal{LC}(E, F)$, ensemble des applications linéaires continues de E dans F est non vide (il contient l'application nulle). On montre (rapidement ici) que c'est un espace vectoriel normé.

- Si $\|u\| = 0$ alors $\forall x \in S_E(0, 1)$ (sphère unité de E), on a $\|u(x)\|_F = 0$ donc $u(x) = 0$. Par homothétie on a $\forall y \in E \setminus \{0\}$:

$$u(y) = \|y\|_E.u\left(\frac{y}{\|y\|_E}\right) = 0_F$$

donc $u = 0$ (dans $\mathcal{L}(E, F)$).

- Les propriétés $\|\lambda u\| = |\lambda|.\|u\|$ et $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ ont déjà été démontrées avec N_∞.

Grâce aux propriétés mises ainsi en évidence, on en déduit que $\mathcal{LC}(E, F)$ est stable par combinaison linéaire (c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$) et la norme subordonnée est bien une norme ■

THÉORÈME 5.16.
Si $u \in \mathcal{LC}(E, F)$, $v \in \mathcal{LC}(F, G)$ alors $v \circ u \in \mathcal{LC}(E, G)$ et $\|v \circ u\| \leqslant \|v\|.\|u\|$.

Dém : On a, pour tout x de E :

$$\|v \circ u(x)\|_G \leqslant \|v\|.\|u(x)\|_F \leqslant \|v\|.\|u\|.\|x\|_E$$

donc $v \circ u$ est continue.
Si $\|x\| = 1$ alors $\|v\|.\|u\|$ est un majorant de $\|v \circ u(x)\|_G$. Par définition de la norme subordonnée, $\|v \circ u\| \leqslant \|v\|.\|u\|$ ($\|v \circ u\|$ est le plus petit des majorants) ■

DÉFINITION 5.1.33. ***Algèbre normée unitaire***
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unitaire munie d'une norme (définie sur sa structure d'espace vectoriel), on dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre normée unitaire ssi$_{\text{déf}}$ la norme vérifie

$$\|x.y\| \leqslant \|x\|.\|y\|.$$

PROPOSITION 5.1.14.
$\mathcal{B}(A,\mathbb{K})$ ensemble des applications bornées de A dans $\mathbb{K}$ munie de la norme infinie est une algèbre normée unitaire.
$\mathcal{LC}(E)$ ensemble des endomorphismes continus de E muni de la norme subordonnée est une algèbre normée unitaire (notée aussi $\mathcal{L}_c(E)$).

Dém :

- $\mathcal{B}(A,\mathbb{K})$ est une algèbre :
  - On sait déjà que $\mathcal{B}(A,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel normé (cf. théorème 5.1 page 260).
  - $\mathcal{B}(A,\mathbb{K})$ est un sous-anneau de $\mathcal{F}(A,\mathbb{K})$ car il est stable par produit :
  $$|f(x).g(x)| \leqslant |f(x)|.|g(x)| \leqslant \|f\|_\infty.\|g\|_\infty$$
  pour tout $(f,g) \in \mathcal{B}(A,\mathbb{K})^2$ par conséquent $f.g \in \mathcal{B}(A,\mathbb{K})$, en outre $\|f.g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty.\|g\|_\infty$.
  - On vérifie alors que
  $$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ (f,g) \in \mathcal{B}(A,\mathbb{K})^2,\ \lambda.(f.g) = (\lambda.f).g = f.(\lambda.g).$$
  $\mathcal{B}(A,\mathbb{K})$ est donc une algèbre normée (unitaire).
- $\mathcal{LC}(E)$ est une algèbre normée :
  - $\mathcal{LC}(E)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ (on a vu que c'était un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, $E = F$ cf. théorème 5.15 page 287),
  - la stabilité par la loi $\circ$ a été établie au théorème 5.16 ainsi que la propriété $\|v \circ u\| \leqslant \|v\|.\|u\|$.

  On a prouvé que $\mathcal{LC}(E)$ était une algèbre normée ■

PROPOSITION 5.1.15. ***Cas des applications bilinéaires***
Soit B une application bilinéaire de $E\times F$ dans G, s'il existe $k > 0$ tel que
$$\|B(x,y)\| \leqslant k\|x\|.\|y\|$$
alors B est continue.

Dém : On écrit
$$\begin{aligned} B(x+x',y+y') - B(x,y) &= [B(x+x',y+y') - B(x+x',y)] + [B(x+x',y) - B(x,y)] \\ &= B(x+x',y') + B(x',y) \end{aligned}$$
puis, en passant aux normes, on obtient
$$\|B(x+x',y+y') - B(x,y)\| \leqslant k\big[\|x+x'\|.\|y'\| + \|x'\|.\|y\|\big]$$
et on passe aux ε : soient $\varepsilon > 0$, $x', y' \in E$ tels que $\|x'\| \leqslant \eta$ et $\|y'\| \leqslant \eta$ avec $\eta = \min(\frac{\varepsilon}{k(\|x\|+\|y\|+1)}, 1)$ alors
$$\begin{aligned} \|B(x+x',y+y') - B(x,y)\| &\leqslant k\eta(\|x+x'\| + \|y\|) \leqslant k\eta(\|x\| + \underbrace{\|x'\|}_{\leqslant 1} + \|y\|) \\ &\leqslant k\eta(\|x\| + \|y\| + 1) \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$
donc B est continue ■

Exemples d'applications bilinéaires continues :

(*i*) $(\lambda, x) \in \mathbb{K}\times E \mapsto \lambda x \in E$ ($\|\lambda.x\| = |\lambda|.\|x\|$).

(*ii*) Si E est préhilbertien réel $(x, y) \in E^2 \mapsto (x|y)$ ($|(x|y)| \leqslant \|x\|.\|y\|$ par Cauchy-Schwarz).

(*iii*) Si $\mathcal{A}$ est une algèbre normée $(x, y) \mapsto x.y$ ($\|x.y\| \leqslant \|x\|.\|y\|$ par définition)

Dém : Dans tous les cas, on a $\|B(x, y)\| \leqslant \|x\|.\|y\|$ et on applique la proposition précédente ■

Questions :

(*i*) Prouver l'égalité $\sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \inf\{C > 0 \mid \|u(x)\| \leqslant C\|x\|\}$.

(*ii*) Soit $f : (\mathbb{R}^2, \|.\|_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ linéaire, de matrice dans les bases canoniques $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, chercher $\|f\|$.

(*iii*) Soit $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|P\| = \sum\limits_{k=0}^{n} |a_k|$ où $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$; on considère la forme linéaire définie par $u(X^k) = 1$, est-elle continue ? Même question si on choisit $\|P\| = \sup\limits_{k\in[\![0,n]\!]} |a_k|$.

5.1.7 Complétude, compacité

a) Complétude

Dans la pratique, le programme recommande de se placer en dimension finie, cependant le critère de Cauchy peut rendre des services pour les séries de fonctions donc les démonstrations se feront en dimension quelconque sauf mention contraire.

Définition 5.1.34. ***Suite de Cauchy***
On dit que la suite (u_n) d'éléments de E e.v.n. est une suite de Cauchy ssi$_{\text{déf}}$

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \|u_{n+p} - u_n\| \leqslant \varepsilon.$$

***Remarque* 5.1.18.** *Toute suite convergente est de Cauchy, réciproque fausse.*

Dém : Si la suite (u_n) converge (vers b) alors

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N,\ \|u_n - b\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $p \in \mathbb{N}$ alors $n + p \geqslant N$ donc $\|u_{n+p} - b\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ d'où

$$\|u_{n+p} - u_n\| = \|(u_{n+p} - b) + (b - u_n)\| \leqslant \|u_{n+p} - b\| + \|u_n - b\| \leqslant \varepsilon$$

donc la suite (u_n) est de Cauchy ■

Exemple : dans $(\mathbb{R}[X], \|.\|_1)$, $P_n = 1 + X + \cdots + \frac{X^n}{n!}$.
Dém : Cf. question (i) page 297 ■

DÉFINITION 5.1.35. ***Espace complet***
Soit E un e.v.n., si toute suite de Cauchy de E converge alors on dit que E est un espace complet.
Cette notion s'étend, par le biais de la topologie induite, au cas des parties de E (qui n'est pas forcément un espace complet).

THÉORÈME 5.17. **$\mathbb{R}$ est complet**
Toute suite de Cauchy de réels converge dans $\mathbb{R}$.

Dém : Soit (u_n) une suite de Cauchy de réels.

- Elle est bornée : on prend $\varepsilon = 1$ dans la définition : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \in \mathbb{N}$, $|u_{N+p}| \leqslant |u_{N+p} - u_N| + |u_N| \leqslant 1 + |u_N|$.
  On pose alors $M_1 = \max\{|u_k|, k \in [\![0, N-1]\!]\}$ et $M = \max(M_1, 1 + |u_N|)$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

- Pour chaque p, on pose $\alpha_p = \inf_{n \geqslant p} u_n$ et $\beta_p = \sup_{n \geqslant p} u_n$. (α_p) est croissante, (β_p) est décroissante car α_{p+1} est la borne inférieure d'un ensemble plus petit que pour α_p, argument que l'on renverse pour β_{p+1}.

- Grâce au critère de Cauchy, on prouve que $\beta_p - \alpha_p \to 0$:
  en effet, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall p \geqslant N$, $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2$, $|u_{p+k} - u_{p+l}| \leqslant \varepsilon$ d'où
  $$\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2,\ u_{p+k} \leqslant u_{p+l} + \varepsilon$$
  par conséquent, $u_{p+l} + \varepsilon$ est un majorant de $\{u_{p+k},\ k \in \mathbb{N}\}$ et on en tire l'inégalité $\beta_p \leqslant u_{p+l} + \varepsilon$.
  $\beta_p - \varepsilon$ est un minorant de $\{u_{p+l},\ l \in \mathbb{N}\}$ d'où $\beta_p - \varepsilon \leqslant \alpha_p$. Comme $\alpha_p \leqslant \beta_p$ on en déduit que
  $$0 \leqslant \beta_p - \alpha_p \leqslant \varepsilon$$
  ce qui signifie que $\lim\limits_{p \to +\infty} (\beta_p - \alpha_p) = 0$.

- On peut donc appliquer le théorème des suites adjacentes, par conséquent $\lim\limits_{p \to +\infty} \alpha_p = \lim\limits_{p \to +\infty} \beta_p = u$. Or on a l'encadrement suivant
  $$\alpha_p \leqslant u_p \leqslant \beta_p$$
  qui permet de conclure à la convergence de (u_n) par application du théorème d'encadrement ■

DÉFINITION 5.1.36. ***Espace de Banach***
Un espace vectoriel normé complet (i.e. dans lequel toute suite de Cauchy converge) est appelé espace de Banach.

DÉFINITION 5.1.37. ***Espace de Hilbert***
Un espace préhilbertien complet est un espace de Hilbert.

Théorème 5.18. Si les $(E_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ sont des espaces de Banach alors $E_1 \times \ldots \times E_p$ est un espace de Banach pour la topologie produit.

Dém : Si $u_n = (u_n^1, \ldots, u_n^p)$ est une suite de Cauchy alors $(u_n^1), \ldots, (u_n^p)$ sont des suites de Cauchy (par définition de la norme produit). Comme les E_i sont des espaces de Banach, chaque suite converge donc $(u_n^1, \ldots, u_n^p)$ converge (cf. propriété 5.1.2 page 267) ■

Corollaire 5.19. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces de Banach.

Dém : On sait que $\mathbb{R}$ est complet et sur $\mathbb{C}$, la norme du module est équivalente à la norme infinie donc $\mathbb{C}$ est complet en application du théorème précédent.
On peut alors conclure que $\mathbb{K}^n$ est complet pour la topologie de la norme produit (mais on verra qu'en dimension finie, tous les espaces sont complets ■

***Remarque* 5.1.19.** $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ *est un espace de Banach de dimension infinie mais* $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_1)$ *n'est pas un espace de Banach.*

Dém :
Montrons que $E_1 = (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach, on va utiliser pour cela des techniques que l'on rencontrera plus loin avec les suites et les séries de fonctions.
Soit (f_n) une suite de Cauchy de E_1.

- Montrons que, pour tout $x \in [a,b]$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy (qui converge par conséquent) : on a
  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$ (1)
  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b],\ |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ (2)
  La dernière propriété signifie en effet que $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy. On note $f(x)$ sa limite.

- On fait alors tendre p vers l'infini dans (2) et, par conservation des inégalités dans les limites, on a
  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [a,b],\ |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ (3)
  et, en passant à la borne supérieure sur x, on a $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$ donc la suite de Cauchy (f_n) converge.

- Pour conclure, il reste à prouver que f est continue :
  soit $x_0 \in [a,b]$, on utilise (3) avec $\varepsilon/3$: $|f_{n_0}(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ pour tout x, on utilise ensuite la continuité de f_{n_0} en x_0 :

  $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid |x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

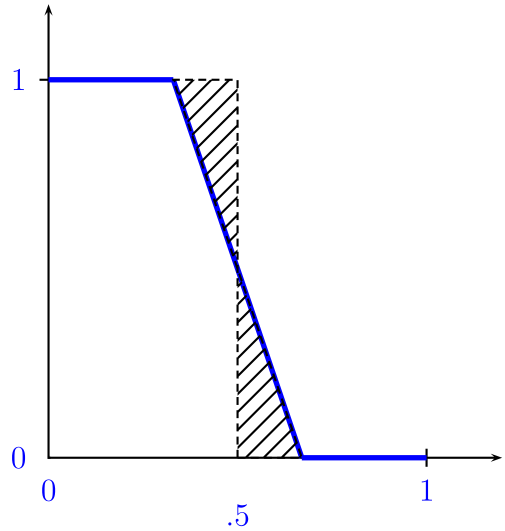
  et on rassemble toutes ces inégalités :

  $$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \underbrace{|f(x) - f_{n_0}(x)|}_{\leqslant \varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)|}_{\leqslant \varepsilon/3} + \underbrace{|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)|}_{\leqslant \varepsilon/3} \leqslant \varepsilon$$

  ce qui prouve la continuité de f.

Conclusion : on a prouvé que (f_n) suite de Cauchy de E_1 convergeait dans E_1 donc E_1 est un espace de Banach.

Montrons maintenant que $E_2 = (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_1)$ n'est pas un espace de Banach. Il suffit en fait de trouver un exemple de suite de Cauchy de E_2 qui ne converge pas. On prend f_n affine par morceaux sur $[0,1]$ définie par $f_n = 1$ sur $[0, 1/2 - 1/n]$, $f_n = 0$ sur $[1/2 + 1/n, 1]$:



- (f_n) est de Cauchy : le dessin ci-dessus représente une fonction f_n, $n \geqslant 2$. On peut majorer $\|f_{n+p} - f_n\|_1$ par l'aire hachurée (le tracé de $y = f_{n+p}(x)$ passe dans cette partie) donc $\|f_{n+p} - f_n\|_1 \leqslant \dfrac{1}{2n}$ (somme des aires des triangles). (f_n) est bien de Cauchy.

- Montrons qu'elle ne converge pas, par l'absurde :
  On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que $\|f - f_n\|_1 \to 0$.
  Montrons (à nouveau par l'absurde) que $f(x) = 0$ pour $x \in]\frac{1}{2}, 1]$:
  supposons qu'il existe $x \in]\frac{1}{2}, 1]$ tel que $f(x) \neq 0$. Comme f est continue, on peut trouver $[\alpha, \beta] \subset]\frac{1}{2}, 1]$ tel que $\forall y \in [\alpha, \beta]$, $|f(y)| \geqslant \dfrac{1}{2}|f(x)|$.
  Pour N assez grand, on a $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{N} < \alpha$ donc, si $n \geqslant N$, f_n est nulle sur $[\alpha, \beta]$. Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}\|f - f_n\|_1 &= \int_0^1 |f(y) - f_n(y)|\,\mathrm{d}y \geqslant \int_\alpha^\beta |f(y) - f_n(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\geqslant \int_\alpha^\beta |f(y)|\,\mathrm{d}y \geqslant \frac{\beta - \alpha}{2}|f(x)|\end{aligned}$$

  ce qui est impossible car $\|f - f_n\|_1 \to 0$.
  On montre de même que $f(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$. f n'est pas continue en $\dfrac{1}{2}$ car $\lim\limits_{x \to 1/2-} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1/2+} f(x) = 0$. Conclusion : la suite (f_n) ne converge pas dans $\mathcal{C}([0,1])$, $\mathcal{C}([0,1])$ n'est pas un espace de Banach et, par homothétie-translation, il en est de même de $\mathcal{C}([a,b])$ ■

Proposition 5.1.16. *Si E est un espace de Banach et si $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, on a équivalence entre*

$$A \text{ complet} \Leftrightarrow A \text{ fermé}$$

Dém : On utilise le critère séquentiel pour les fermés :

- ($\Rightarrow$) Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite convergente dans E, (x_n) est une suite de Cauchy (cf. remarque 5.1.18 page 289) donc elle converge **dans** A car A est complet. Ceci entraîne que A est fermé.
- ($\Leftarrow$) Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Comme E est complet, (x_n) converge dans E. Or, comme A est fermé, on sait que toute suite de $A^{\mathbb{N}}$ qui converge dans E converge dans A. On en déduit effectivement que A est complet ■

L'implication directe $\Rightarrow$ n'utilise pas l'hypothèse E complet donc toute partie complète est fermée.

Théorème 5.20. **Critère de Cauchy pour les fonctions**
On suppose que $f : A \subset E \to F$ où E et F sont des e.v.n., F complet, on a alors l'équivalence

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ existe ssi } \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x,y) \in [A \cap \overline{B}(a,\eta)]^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon.$$

Dém : On utilise ici le critère séquentiel de continuité.

- ($\Rightarrow$) Soit $b = \lim_{x\to a} f(x)$, on utilise la même démonstration que pour la remarque 5.1.18. Traduisons l'hypothèse :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \mid \forall x \in \overline{B}(a,\eta) \cap A,\ \|f(x) - b\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

donc, pour tout $(x,y) \in [\overline{B}(a,\eta) \cap A]^2$,

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|f(x) - b\| + \|b - f(y)\| \leqslant \varepsilon.$$

- ($\Leftarrow$) Soit (x_n) une suite convergente vers a alors

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N,\ &\|x_n - a\| \leqslant \eta\\ \forall p \in \mathbb{N},\ &\|x_{n+p} - a\| \leqslant \eta\end{aligned}$$

donc $(x_n, x_{n+p}) \in [A \cap \overline{B}(a,\eta)]^2$ ce qui entraîne que $\|f(x_{n+p}) - f(x_n)\| \leqslant \varepsilon$. La suite $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy et comme F est un espace de Banach, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ existe. Comme ceci est vrai pour toute suite $x_n \to a$, on en déduit que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe (cf. remarque 5.1.14 (*ii*) page 282) ■

Exemple : soit f dérivable sur $]a,b[$ à valeurs réelles, f' bornée alors, grâce à l'inégalité des accroissements finis, on peut prolonger f par continuité à $[a,b]$.
Dém : On utilise le théorème des accroissements finis : si $M > 0$ est une borne de $|f'|$ alors, avec $\eta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, on a

$$\forall (x,y) \in]a, a+\eta[^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y| \leqslant M\eta = \varepsilon$$

donc f admet une limite grâce au théorème précédent ■

b) Compacité

Définition 5.1.38. ***Propriété de Bolzano-Weierstrass, partie compacte***
$A \subset E$ vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass ssi$_{déf}$ de toute suite de A, on peut extraire une sous-suite convergente dans A. On dit dans ce cas que A est compact.

Proposition 5.1.17. *Si $A \subset E$ est un compact alors A est un fermé borné de E.*

Dém :

- A est fermé en utilisant le critère séquentiel : soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite convergente dans E. On peut extraire $(x_{\varphi(n)})$ une suite qui converge dans A car A est compact. Or, on sait que toute suite extraite d'une suite convergente vers a converge elle aussi vers a. On a donc

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to+\infty} x_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} \in A \end{aligned}$$

i.e. $a \in A$ donc A est fermé.

- On prouve que A est borné par l'absurde : si A n'est pas borné alors on nie la propriété
$$\exists M > 0 \mid \forall x \in A,\ \|x\| \leqslant M$$
ce qui donne $\forall M > 0, \exists x \in A \mid \|x\| > M$. Si on prend $M = n \in \mathbb{N}$ alors on met en évidence une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n\| > n$. La suite (x_n) est divergente, en effet
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \|x_{n+p} - x_n\| \geqslant \|x_{n+p}\| - \|x_n\| \geqslant n + p - \|x_n\| \to +\infty$$
quand $p \to +\infty$. (x_n) n'est pas une suite de Cauchy donc elle ne converge pas (on pouvait aussi raisonner par l'absurde en supposant que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ et en prouvant que $\|x_n - a\| \to +\infty$).
Soit $\varphi\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on a $\|x_{\varphi(n)}\| \geqslant \varphi(n) \geqslant n$ donc $(x_{\varphi(n)})$ ne peut pas converger ce qui est contradictoire avec l'hypothèse A compact ■

Proposition 5.1.18. *Si A est compact, $B \subset A$, alors B fermé ssi B est compact (i.e. pour les sous-ensembles de A, on a équivalence entre compact et fermé).*

Dém :

- ($\Rightarrow$) Soit $(x_n) \in B^{\mathbb{N}}$, (x_n) est aussi une suite d'éléments de A donc, comme A est compact, il existe une suite extraite convergente dans A : $(x_{\varphi(n)})$. Or B est fermé donc $(x_{\varphi(n)})$ converge dans B i.e. B est compact.

- ($\Leftarrow$) On vient de voir à la proposition précédente que si un ensemble est compact alors il est fermé ■

Proposition 5.1.19. *Si A_i est un compact de E_i alors $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ est un compact de $E_1 \times E_2 \cdots \times E_n$.*

Dém : On procède par récurrence et on extrait des suites convergentes des suites coordonnées :

- Pour $n = 2$, $A = A_1 \times A_2$, soit $(u_p) = ((u_p^1), (u_p^2)) \in A^{\mathbb{N}}$, il existe φ telle que $(u^1_{\varphi(p)})$ converge dans A_1. $(u^2_{\varphi(p)})$ est une suite de A_2 qui est lui aussi compact donc il existe ψ telle que $(u^2_{\varphi(\psi(p))})$ converge (attention ici à l'ordre entre φ et ψ, pour s'en convaincre, écrire $v_p^2 = u^2_{\varphi(p)}$ alors la suite extraite a pour terme $v^2_{\psi(p)} = u^2_{\varphi(\psi(p))}$). $(u^1_{\varphi(\psi(p))})$ converge aussi donc $(u_{\varphi(\psi(p))})$ converge dans $A_1 \times A_2$.
- On suppose l'hypothèse vraie à l'ordre n alors si $A = \underbrace{(A_1 \times \cdots A_n)}_{=B \text{ compact}} \times A_{n+1}$, $A = B \times A_{n+1}$ est lui aussi compact grâce à la propriété prouvée à l'ordre 2 ■

Proposition 5.1.20. *Si (u_n) est une suite d'éléments de A compact et si (u_n) n'a qu'une seule valeur d'adhérence alors (u_n) converge.*

Dém : Soit a l'unique valeur d'adhérence de la suite (u_n), on définit l'ensemble $N_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \mid \|u_n - a\| \geqslant \varepsilon\}$.
Montrons par l'absurde que cet ensemble est fini :
s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\mathrm{Card}(N_\varepsilon) = +\infty$ alors, en rangeant les éléments de N_ε dans l'ordre croissant, on écrit $N_\varepsilon = \{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n), \ldots\}$. On pose $v_n = u_{\varphi(n)}$, $(v_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et comme A est compact, (v_n) admet une valeur d'adhérence b. Comme par hypothèse, $\|v_n - a\| \geqslant \varepsilon$ alors $\|b - a\| \geqslant \varepsilon$ i.e. $b \neq a$. On peut donc extraire de la suite (u_n) une suite qui converge vers $b \neq a$ ce qui est contradictoire.
N_ε est donc fini, on pose $N = \max(N_\varepsilon) + 1$ alors $\forall n \geqslant N$, $n \notin N_\varepsilon$ ce qui entraîne que $\|u_n - a\| < \varepsilon$.
Conclusion : on a prouvé que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $n \geqslant N$ entraîne $\|u_n - a\| < \varepsilon$ ce qui traduit le fait que (u_n) converge (vers a son unique valeur d'adhérence) ■

Théorème 5.21. Théorème de Bolzano-Weierstrass
Sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$, A compact ssi A fermé borné.

Dém : On sait déjà que si A est compact, il est fermé, borné (cf. proposition 5.1.17). Il reste à prouver que si A est fermé borné, il est compact.
On sait qu'un segment $[a, b]$ est compact par la version du théorème de B.W. vue en première année, puis si A est borné pour la norme infinie (mais c'est la même chose pour les normes 1 et 2) alors il existe $M > 0$ tel que $A \subset \overline{B}(0, M) = [-M, M]^n$. A est donc contenu dans un produit d'intervalles compacts qui est compact (cf. proposition 5.1.19). Par conséquent A est compact comme fermé dans un compact (cf. proposition 5.1.18) ■

Proposition 5.1.21. *Si A est un compact de E alors A est complet.*

Dém : Soit (u_n) une suite de Cauchy de $A^{\mathbb{N}}$, comme A est compact, on sait qu'on peut extraire $(u_{\varphi(n)})$ une suite convergente vers $a \in A$ soit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N' \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N', \|u_{\varphi(n)} - a\| \leqslant \varepsilon/2$$

et on traduit l'hypothèse (u_n) suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \|u_{n+p} - u_n\| \leqslant \varepsilon/2.$$

Soit $N'' = \max(N, N')$, $n \geqslant N''$, comme $\varphi(n) \geqslant n$, on peut écrire $\varphi(n) = n + p$ d'où

$$\|u_n - a\| \leqslant \underbrace{\|u_n - u_{\varphi(n)}\|}_{(1)\leqslant\varepsilon/2} + \underbrace{\|u_{\varphi(n)} - a\|}_{(2)\leqslant\varepsilon/2} \leqslant \varepsilon$$

car dans (1), on utilise le critère de Cauchy et dans (2) la convergence de la suite extraite.
Conclusion : on a prouvé que toute suite de Cauchy converge donc A est complet ■
Un théorème très important qui permet par exemple de prouver qu'un ensemble est compact.

Théorème 5.22. Étant donnée une application continue f de A dans F, l'image par f d'une partie compacte de E incluse dans A est une partie compacte de F.

Dém : On utilise la propriété de Bolzano-Weierstrass :
Soit $K \subset A$ un compact, $(y_n) \in f(K)^{\mathbb{N}}$ une suite. On sait que, pour tout n, il existe x_n tel que $y_n = f(x_n)$ (par définition). Comme K est compact, il existe $(x_{\varphi(n)})$ une suite extraite qui converge vers $x \in K$.
On utilise alors la continuité de f : $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)})$ tend vers $y = f(x)$.
Conclusion : de toute suite (y_n) de $f(K)^{\mathbb{N}}$, on peut extraire une suite convergente dans $f(K)$, donc $f(K)$ est bien un compact ■

***Remarque* 5.1.20.** *On a vu en première année que ce dernier théorème permettait de prouver qu'une fonction définie sur un intervalle compact, à valeurs réelles était bornée et atteignait ses bornes (théorème de Heine n ° 2). Ce résultat est aussi vrai pour $f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ où A est compact i.e. f est bornée et atteint ses bornes. De même, si $f \in \mathcal{C}(A, F)$, $\|f\|$ est bornée et atteint ses bornes (car $\|f\|$ est continue).*

Définition 5.1.39. ***Continuité uniforme***
On dit que f est uniformément continue sur A ssi$_{\text{déf}}$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, x') \in A^2,\ \|x - x'\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| \leqslant \varepsilon.$$

On retrouve alors le théorème de Heine n ° 3.

Théorème 5.23. Si $f \in \mathcal{C}(A, F)$ où A est un compact alors f est uniformément continue.

Dém : Par l'absurde : on suppose que f n'est pas uniformément continue ; écrivons donc la propriété que l'on veut nier :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, x') \in A^2,\ \|x - x'\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| \leqslant \varepsilon$$

d'où

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x, x') \in A^2,\ \|x - x'\| \leqslant \eta \text{ et } \|f(x) - f(x')\| > \varepsilon.$$

On prend $\eta = \dfrac{1}{n+1}$, ce qui nous fournit un couple $(x_n, x'_n) \in A^2$. A^2 est compact donc on peut extraire une suite convergente $(x_{\varphi(n)}, x'_{\varphi(n)})$ vers $(x, x') \in A^2$.
On a alors

- $\|x_{\varphi(n)} - x'_{\varphi(n)}\| \leqslant \dfrac{1}{\varphi(n)+1} \to 0$ donc $x = x'$ à la limite,

- comme f est continue, $\|f(x_{\varphi(n)}) - f(x'_{\varphi(n)})\| \to 0$

ce qui mène à une contradiction car $\|f(x_{\varphi(n)} - f(x'_{\varphi(n)}\| > \varepsilon$ ne peut tendre vers 0.
Conclusion : on a prouvé que f est uniformément continue ■

***Remarque* 5.1.21.** *Si f est lipschitzienne alors f est uniformément continue.*

Dém : Si f est k-lipschitzienne ($k > 0$) alors il suffit de prendre $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$:

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta = \dfrac{\varepsilon}{k} \mid \forall (x, x') \in A^2,\ \|x - x'\| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x')\| \leqslant k\|x - x'\| \leqslant \varepsilon$■

Questions :

(i) Prouver que, dans $(\mathbb{R}[X], \|.\|_1)$, la suite $P_n = 1 + X + \cdots + \dfrac{X^n}{n!}$ est de Cauchy mais ne converge pas.

(ii) Si la sphère unité $S(0, 1)$ est compacte dans E espace vectoriel normé alors prouver que $\overline{B}(0, 1)$ (la boule unité fermée) est aussi compacte.

5.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie

5.2.1 Topologie d'un espace vectoriel de dimension finie

THÉORÈME 5.24. Théorème fondamental
Dans un espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1, toutes les normes sont équivalentes.

Dém : (non exigible) On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ en première lecture. Soit $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base de E (choisie une fois pour toutes) et on prend la norme infinie dans cette base (notée $N_{(e_i)}$ ici).

- L'application $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n \in E$ est continue si on choisit $N(x) = \sup |x_i|$ dans $\mathbb{K}^n$ (où $x = (x_1, \ldots, x_n)$) :
en effet, on a $N_{(e_i)}(\varphi(x)) = N(x)$ donc φ est continue, de norme subordonnée 1.

- Comme φ est continue, $S_E(0, 1) = \varphi(S(0, 1))$ est un compact de E ($S_E(0, 1)$ désigne ici la sphère unité de E et $S(0, 1)$ celle de $\mathbb{K}^n$).

- Si N' est une autre norme sur E, grâce à l'inégalité triangulaire, elle est continue par rapport à N :

$$N'(x) = N'\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i| N'(e_i)$$
$$\leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{n} N'(e_i)}_{=\alpha} N_{(e_i)}(x) \leqslant \alpha N_{(e_i)}(x)$$

et on utilise la célèbre inégalité des normes

$$|N'(x) - N'(y)| \leqslant N'(x - y) \leqslant \alpha N_{(e_i)}(x - y).$$

- N' est bornée et atteint ses bornes sur $S_E(0,1)$ en tant qu'application continue donc

$$\exists (x_0, y_0) \in S_E(0,1)^2 \mid \forall x \in S_E(0,1),\ N'(x_0) \leqslant N'(x) \leqslant N'(y_0)$$

- Soit $y \in E \setminus \{0\}$, on pose $x = \dfrac{y}{N_{(e_i)}(y)} \in S_E(0,1)$ et $a = N'(x_0)$, $b = N'(y_0)$. a et b sont > 0 car x_0 et y_0 ne sont pas nuls. En traduisant l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$a \leqslant N'(x) = \frac{N'(y)}{N_{(e_i)}(y)} \leqslant b$$

  soit $aN_{(e_i)}(y) \leqslant N'(y) \leqslant bN_{(e_i)}(y)$ (encore valable si $y = 0$).

On a montré que toutes les normes étaient équivalentes à $N_{(e_i)}$ donc, par transitivité, toutes les normes sur E sont équivalentes.
En deuxième lecture, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la démonstration est la même ■

***Remarque* 5.2.1.** *Une conséquence directe du théorème fondamental est que, en dimension finie, il n'y a qu'une topologie compatible avec les normes ; donc, on pourra traiter tout problème relatif à la topologie dans un e.v.n. avec la norme de son choix (notamment les problèmes de limite et de continuité). Par exemple, pour prouver que la suite* $\sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!}$ *admet une limite, on prendra une norme appropriée (cf. théorème 5.45 page 322).*

Dém : On "rappelle" qu'une topologie désigne l'ensemble des ouverts d'un espace vectoriel normé. On a vu (cf. théorème 5.14 page 286) que deux normes équivalentes définissaient la même topologie. La remarque s'en déduit alors immédiatement ■

Corollaire 5.25. Tout e.v.n. de dimension finie est complet (i.e. est un espace de Banach).

Dém : En effet, on peut prendre n'importe quelle norme, en particulier la norme infinie associée à une base et on se ramène ainsi à $\mathbb{K}^n$:
Soit E un espace vectoriel normé de dimension $n \geqslant 1$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, on choisit là aussi la norme infinie que l'on note $N_{(e_i)}$.
Si $(x_p) \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy alors, en reprenant l'application φ, la suite $(\varphi^{-1}(x_p))$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. En effet, on a $N(\varphi^{-1}(x_p)) = N_{(e_i)}(x_p)$ (N désigne ici la norme infinie de $\mathbb{K}^n$).
On sait que $\mathbb{K}^n$ est complet (cf. théorème 5.19 page 291) donc la suite $(\varphi^{-1}(x_p))$ converge dans $\mathbb{K}^n$. Comme $x_p = \varphi(\varphi^{-1}(x_p))$ et que φ est continue, on en déduit que la suite (x_p) converge.
Conclusion : E est complet ■

Corollaire 5.26. Les parties compactes de E sont les fermés bornés (en particulier, la boule unité fermée est compacte). C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Dém : Le sens direct est immédiat.
Réciproque : si A est fermée bornée dans E alors $\varphi^{-1}(A)$ est aussi fermée, bornée de $\mathbb{K}^n$ (on utilise toujours la même application φ). On sait alors, d'après le faux théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. théorème 5.21 page 295), que $\varphi^{-1}(A) = K$ est compacte donc $A = \varphi(K)$ est aussi un compact ■

***Remarque* 5.2.2.**

(i) *La partie constituée des éléments d'une suite convergente et de sa limite est compacte.*
Dém : un peu pénible à rédiger. Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de limite a, on pose $A = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ et on veut montrer que A est compact. On considère pour cela une suite $(y_n) \in A^{\mathbb{N}}$.

- *S'il existe $x \in A$ tel que $\operatorname{Card} P$ est infini où $P = \{n \in \mathbb{N} \mid y_n = x\}$ alors, en ordonnant les éléments de P, on écrit $P = \{\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n), \ldots\}$. La suite $(y_{\varphi(n)})$ est stationnaire donc convergente.*
- *On écarte maintenant le premier cas.*
  On sait que $y_n = x_{t(n)}$ où $t\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application quelconque.
  $t(n) \to +\infty$: en effet, soit $P \in \mathbb{N}$, $\{n \in \mathbb{N} \mid t(n) < P\}$ est fini (sinon il existe $m \in \mathbb{N}$ et une infinité d'entiers n tels que $t(n) = m$, la suite (y_n) prendrait une infinité de fois la valeur x_m ce qui est écarté). Il existe donc $N = \sup\{n \in \mathbb{N} \mid t(n) \leqslant P\} + 1$ tel que $\forall n \geqslant N$, $t(n) \geqslant P$ (ce qui est la définition d'une suite tendant vers $+\infty$).
  On déduit de ceci que $y_n \to a$.

Conclusion : on a prouvé dans tous les cas que, de toute suite de A admettait une sous-suite convergente donc A est compact.
Remarque : on pouvait aussi prouver que A est un fermé borné en dimension finie, la démonstration proposée est valable en dimension quelconque ■

(ii) *En dimension finie on a équivalence entre partie complète et partie fermée.*
Dém : un espace de dimension finie est un espace de Banach, il suffit alors d'utiliser la proposition 5.1.16 page 292 ■

Corollaire 5.27. Si E est un e.v.n. de dimension finie alors $\mathcal{LC}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.

Dém : On prend (e_j) base de E et on choisit la norme infinie sur E alors

$$\begin{aligned}\left\| f(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j)\right\|_F &= \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j)\right\|_F \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j|.\|f(e_j)\|_F \leqslant \|x\|_E \underbrace{\sum_j \|f(e_j)\|}_{=A} \\ &\leqslant A\|x\|_E\end{aligned}$$

donc f est bien continue. $\mathcal{L}(E, F) \subset \mathcal{LC}(E, F)$. L'inclusion inverse est immédiate donc $\mathcal{LC}(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$ ■

***Remarque* 5.2.3.** *Il en est de même des applications multilinéaires :*
si $f \in \mathcal{L}(E_1, E_2, \cdots, E_n\ ; F)$ et si les E_i sont des e.v.n. de dimension finie, alors f est continue.

Dém : Ceci n'est pas au programme, on peut le prouver en généralisant la démonstration que l'on a pu faire pour les applications bilinéaires (cf. proposition 5.1.15 page 288) et en majorant $f(x_1, \ldots, x_p)$ comme ci-dessus.

On peut aussi exprimer f dans une base de E et une base de F. Dans ce cas, les applications coordonnées de f sont polynomiales donc continues (on se sert de cet argument pour montrer que l'application qui à une matrice fait correspondre son déterminant est continue) ■

THÉORÈME 5.28. **Caractérisation des applications continues à valeur dans un espace de dimension finie**
Soit $f \in \mathcal{F}(A, F)$ où F est un espace vectoriel normé de dimension finie, si $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une base de F, on écrit $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$ alors

- si f est continue alors, pour toute base (e_i), les f_i sont continues
- s'il existe une base (e_i) telle que les f_i soient continues alors f est continue.

Dém :

- Soit $p_i\ : x \in F \mapsto x_i \in \mathbb{K}$ application coordonnée, p_i est une forme linéaire, elle est par conséquent continue. $f_i = p_i \circ f$ est continue par composition des applications continues.
- Si f_i est continue pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ alors $f_i.e_i$ est également continue donc $f = \sum_{i=1}^{n} f_i.e_i$ est continue ■

***Remarque* 5.2.4.** *On obtient le même résultat avec les suites et les suites coordonnées.*

Questions :

(i) Montrer que $\mathrm{O}(n) = \{P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid PP^{\mathrm{T}} = I_n\}$ est compact.

(ii) Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E espace vectoriel normé (de dimension quelconque), montrer que F est fermé.

5.2.2 Connexité par arcs

DÉFINITION 5.2.1. ***Connexité par arcs***
A est connexe par arc ssi$_{\text{déf}}$ $\forall (a, b) \in A^2$, $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,
$\alpha < \beta$, $\exists f\ : [\alpha, \beta] \to A$ *continue telle que* $f(\alpha) = a$ *et* $f(\beta) = b$.

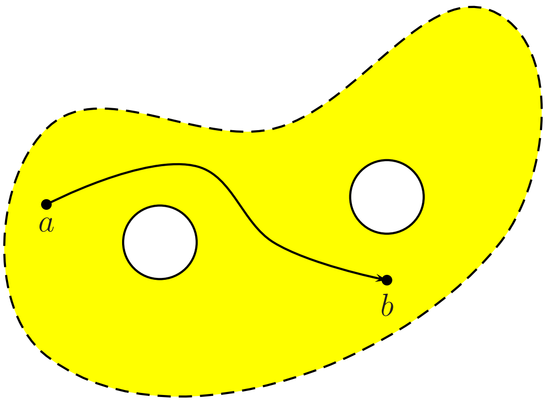
Exemples :

(i) Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes par arcs.
Dém : cf. prochain théorème ■

(ii) Plus généralement, toute boule d'un e.v.n. est connexe par arcs.
Dém : Prenons l'exemple de $B(a, r)$ boule ouverte de centre a, de rayon $r > 0$.
Soit $(x, y) \in B(a, r)^2$, on pose $f(t) = (1 - t)x + ty$.

- f est continue car $f(t) - f(t') = (t - t')(y - x)$ donc
$$\|f(t) - f(t')\| = |t - t'|.\|y - x\|$$
i.e. f est lipschitzienne.
- $f(0) = x$, $f(1) = y$,
- $f([0, 1]) \subset B(a, r)$:
$$\begin{aligned}\|a - f(t)\| = \|a - (1 - t)x - ty\| &= \|(1 - t)(a - x) + t(a - y)\| \\ &\leqslant (1 - t)\|a - x\| + t\|a - y\| < r\end{aligned}$$
(en distinguant par exemple les cas $t = 0$ et $t > 0$ pour avoir l'inégalité stricte).

On a alors prouvé que $B(a, r)$ est connexe par arc mais, à la différence des intervalles de $\mathbb{R}$, on n'a pas équivalence ■



On a vu en première année le théorème des valeurs intermédiaires, il se traduit alors de la manière suivante.

Théorème 5.29. Sur $\mathbb{R}$ on a équivalence entre les notions d'intervalle et de partie connexe par arcs.

Dém :

- Si I est un intervalle, on sait que $\forall (a, b) \in I^2$, $a < b$, $[a, b] \subset I$. Il suffit alors de prendre $f(t) = t$ qui est continue (ou de reprendre la démonstration que l'on a faite pour les boules).

- Réciproque : soit I un ensemble connexe par arcs, $(a, b) \in I^2$, $a < b$. Par hypothèse, on sait qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha < \beta$ (par exemple), $f \in \mathcal{C}([\alpha, \beta], I)$ telle que $f(\alpha) = a$, $f(\beta) = b$.
On applique alors le théorème des valeurs intermédiaires : $\forall c \in]a, b[$, $\exists \gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(\gamma) = c$ donc $c \in I$.
On a ainsi prouvé que $[a, b] \subset I$ pour tout couple $(a, b) \in I^2$ donc I est bien un intervalle ■

Ce théorème se généralise dans les espaces vectoriels normés.

THÉORÈME 5.30. Si E est un espace vectoriel normé alors toute partie convexe de E est connexe par arcs.

Dém : C'est la même démonstration que celle qu'on a pu faire pour les boules (en plus simple). Si A est convexe et si $(a, b) \in A^2$ alors on prend $f(t) = (1-t)a + tb$. f est continue, à valeurs dans A car A est convexe et $f(0) = a$, $f(1) = b$ ■

PROPOSITION 5.2.1. *Si A et B sont deux parties connexes par arcs d'intersection non vide alors $A \cup B$ est aussi connexe par arcs.*

Dém : Soit $c \in A \cap B$ et $(a, b) \in (A \cup B)^2$. On traduit les hypothèses :

$$\exists f \in \mathcal{C}([\alpha, \beta], A \cup B) |\ f(\alpha) = a,\ f(\beta) = c$$
$$\exists g \in \mathcal{C}([\gamma, \delta], A \cup B) |\ g(\gamma) = c,\ g(\delta) = b$$

$(f([\alpha, \beta]) \subset A \subset A \cup B$, de même pour $g)$. On pose alors

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [\alpha, \beta] \\ g(x - \beta + \gamma) & \text{si } x \in [\beta, \beta + \delta - \gamma]. \end{cases}$$

h est continue à droite en β car $g(x - \beta + \gamma)$ l'est, h est continue à gauche en β car f l'est donc $h \in \mathcal{C}([\alpha, \beta + \delta - \gamma], A \cup B)$, $h(\alpha) = a$, $h(\beta + \delta - \gamma) = b$.
Conclusion : $A \cup B$ est connexe par arcs (cette propriété qui se généralise par récurrence à une réunion finie d'ensemble connexes par arcs $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ avec $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$) ■

Remarque* 5.2.5.** *Pour les formes différentielles, on a besoin de la notion de* ***partie étoilée *(i.e. A est étoilée ssi il existe $a \in A$ tel que pour tout $b \in A$, $[a, b] \subset A$). On vérifie facilement que toute partie étoilée est connexe par arcs.*

Dém : Soit A étoilée par rapport à a. Si $(x, y) \in A^2$ alors $[x, a]$ et $[a, y]$ sont connexes par arcs et $[x, a] \cap [a, y] \neq \emptyset$ donc $[x, a] \cup [a, y] \subset A$ est connexe par arcs d'où

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha < \beta,\ \exists f \in \mathcal{C}([\alpha, \beta], A) \mid f(\alpha) = x,\ f(\beta) = y$$

ce qui signifie que A est connexe par arcs ■

THÉORÈME 5.31. Soit $f \in \mathcal{C}(A, F)$ et $B \subset A$ une partie connexe par arcs alors $f(B)$ est une partie connexe par arcs. En d'autre termes, l'image continue d'un connexe par arcs est un connexe par arcs.

Dém : On utilise la composée d'applications continues :
Soit $f \in \mathcal{C}(A, F)$ et $B \subset A$ connexe par arcs. Si $(a', b') \in f(B)^2$ alors $a' = f(a)$ et $b' = f(b)$ où $(a, b) \in B^2$. On traduit l'hypothèse faite sur B :

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha < \beta,\ \exists g \in \mathcal{C}([\alpha, \beta], B) \mid g(\alpha) = a,\ g(\beta) = b.$$

$h = f \circ g \in \mathcal{C}([\alpha, \beta], f(B))$, $h(\alpha) = f(a) = a'$, $h(\beta) = f(b) = b'$ ce qui signifie que $f(B)$ est connexe par arcs ■

Exemples d'applications :

(*i*) Il n'existe pas d'application bicontinue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^2$.
Dém : Par l'absurde, on suppose que $\exists f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ bijective, $f^{-1} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $A = f(a) \in \mathbb{R}^2$. $\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}$ est connexe par arcs (il suffit de “faire le tour” de A) mais $f^{-1}(\mathbb{R}^2 \setminus \{A\}) = \mathbb{R} \setminus \{a\}$ n'est pas connexe par arcs (là, on ne peut pas “faire le tour”). On a donc une contradiction, l'image d'un connexe par arcs $(\mathbb{R}^2 \setminus \{A\})$ par f^{-1}, supposée continue, n'est pas connexe par arcs ■

(*ii*) Il n'existe pas d'application bicontinue de $[0, 2\pi[$ sur $\mathbb{U}$ (ensemble des nombres complexes de module 1), notamment $t \in [0, 2\pi[\mapsto e^{it}$ n'admet pas de fonction réciproque continue.

Dém : Toujours par l'absurde, soit $f \in \mathcal{C}([0, 2\pi[, \mathbb{U})$ bijective telle que $f^{-1} \in \mathcal{C}(\mathbb{U}, [0, 2\pi[)$. On utilise le même argument que ci-dessus :
$\mathbb{U} \setminus \{f(\pi)\}$ est connexe par arcs mais $[0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$ ne l'est pas ■

5.3 Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé

5.3.1 Suites et séries

DÉFINITION 5.3.1. ***Série dans un espace normé, somme partielle***
Soit E un espace normé, (u_n) une suite d'éléments de E, on appelle série associée à la suite (u_n), la suite (s_p) où $s_p = \sum\limits_{n=0}^{p} u_n$ que l'on notera $\sum u_n$.
La suite (s_p) est appelée suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

Exemples :

(*i*) **Série harmonique** $\sum \dfrac{1}{n}$.

(*ii*) **Série géométrique** $\sum ar^n$.

(*iii*) **Série télescopique** si $u_n = v_n - v_{n-1}$, $u_0 = v_0$ alors $s_n = v_n$: ceci est un exemple très intéressant dans la pratique et on l'utilise dans les deux sens. Avec $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ on aura $s_p = 1 - \dfrac{1}{p+1}$ (On a $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$).
Réciproquement, à partir d'une suite (v_n), on peut étudier la série $\sum u_n$ où $u_n = v_n - v_{n-1}$ appelée **série aux différences**.

DÉFINITION 5.3.2. ***Série convergente, somme d'une série***
Si la suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles d'une série est convergente alors on dit que la série $\sum u_n$ est convergente. La limite de cette suite est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ et est appelée somme de la série.

***Remarque* 5.3.1.** *Attention !, la notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ correspond à la limite de $\sum\limits_{n=0}^{p} u_n$ quand p tend vers $+\infty$. Ce n'est en aucun cas une somme !*

PROPOSITION 5.3.1. ***Espace vectoriel des séries convergentes***
L'ensemble des séries convergentes sur E est un espace vectoriel.

Dém : On définit

$$\sum u_n + \sum v_n \overset{\text{déf}}{=} \sum (u_n + v_n)$$
$$\lambda \sum u_n \overset{\text{déf}}{=} \sum \lambda u_n.$$

Grâce aux propriétés des limites et de la convergence, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum u_n + \sum v_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

De même $\lambda \sum u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Conclusion : la série nulle est convergente donc l'ensemble des séries convergentes n'est pas vide et on vient de montrer qu'il est stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ ■

***Remarque* 5.3.2.** *Dans un e.v.n. de dim. finie, une série converge ssi chacune des séries coordonnées converge.*

Dém : Si $\dim E = p$, soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $u_n = \sum_{i=1}^{p} u_{n,i} e_i$. On a alors $\sum u_n = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum u_{n,i}\right) e_i$ et on applique le résultat relatif aux suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie ■

THÉORÈME 5.32. Pour qu'une série converge, il est nécessaire mais non suffisant que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ (contre-exemple : $u_n = \ln(1 + 1/n)$).

Dém :

- Si $\sum u_n$ converge alors $u_n = s_n - s_{n-1}$ (s_n est la somme partielle). Or (s_n) et (s_{n-1}) sont deux suites qui admettent la même limite donc $u_n \to 0$.
- $u_n = \ln(1 + 1/n) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$ (pour $n \geqslant 1$).
  On a $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \ln(n+1) \to +\infty$ donc $\sum u_n$ diverge ■

DÉFINITION 5.3.3. ***Reste d'une série convergente***

Si $\sum u_n$ est une série convergente alors $r_p = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - s_p$ est appelé reste de la série.

On a alors $r_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n$.
Exemple des séries géométriques : $\sum ar^n$ converge ssi $|r| < 1$ (r peut être complexe) et on a $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}$.

Un résultat aussi intéressant : $r_p = \dfrac{ar^{p+1}}{1-r}$ car dans la pratique, le fait de connaître explicitement le reste d'une série peut rendre de grands services.

Dém : On utilise la formule donnant la somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{p=0}^{n} ar^p = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r} \text{ pour } r \neq 1.$$

On en déduit les 2 résultats : si $|r|<1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = \dfrac{a}{1-r}$ et $r_p = s - s_p = \dfrac{ar^{p+1}}{1-r}$ ■

***Remarque* 5.3.3.**

(*i*) *On ne modifie pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes (la notion de convergence pour une série est un caractère à l'infini).*

(*ii*) *Si les premiers termes d'une série ne sont pas définis (prendre par exemple $u_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$) alors il est d'usage de les remplacer par 0 sauf mention explicite du contraire.*

Théorème 5.33. **Théorème des séries alternées**

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, si $\begin{pmatrix} (i) & u_n u_{n+1} < 0 \\ (ii) & (|u_n|) \searrow \\ (iii) & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \end{pmatrix}$ alors $\sum u_n$ est convergente.

Si $u_{p+1} > 0$ alors $\sum_{n=0}^{p} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{p+1} u_n$.

On peut dire les choses d'une autre manière : le reste d'ordre p, r_p, d'une série alternée est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé (i.e. $|u_{p+1}|$) et est du signe de u_{p+1}.

Dém : On démontre ce résultat en prouvant que les suites (s_{2p}) et (s_{2p+1}) sont adjacentes :

Quitte à changer de signe, on peut supposer que $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n > 0$. Montrons que (s_{2p}) et (s_{2p+1}) sont adjacentes.

- $s_{2p+1} - s_{2p} = (-1)^{2p+1} v_{2p+1} = -v_{2p+1} \to 0$ et $s_{2p} > s_{2p+1}$ (hypothèse (*iii*)).
- $s_{2p+1} - s_{2p-1} = -v_{2p+1} + v_{2p} > 0$ car la suite (v_n) est décroissante (hypothèse (*ii*)).
- $s_{2p+2} - s_{2p} = v_{2p+2} - v_{2p+1} < 0$ (idem).

On peut donc appliquer le théorème des suites adjacentes, les suites (s_{2p+1}) et (s_{2p}) convergent vers la même limite par conséquent la suite (s_p) converge et on a

$$\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{2p+1} u_n < \sum_{n=0}^{+\infty} u_n < \sum_{n=0}^{2p} u_n ■$$

Exemple : La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ converge, sa somme vaut $\ln 2$.

Dém :

- $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ vérifie bien le théorème des séries alternées.

- Calcul de la somme : on parachute le résultat $\dfrac{1}{n+1} = \displaystyle\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x$, la somme partielle s'écrit alors

$$\begin{aligned}
s_p &= \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{p} (-1)^n \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{p} (-x)^n \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-x)^{p+1}}{1+x} = \underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x}}_{=\ln 2} + r_p
\end{aligned}$$

où $|r_p| = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p+1}\,\mathrm{d}x}{1+x} \leqslant \int_0^1 x^{p+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p+2}$ (on a majoré $\dfrac{1}{1+x}$ par 1). $r_p \to 0$ donc $s_p \to \ln 2$ ∎

Question : nature et éventuellement somme des séries de terme général

$$(i)\ \frac{\cos n}{2^n}, \quad (ii)\ \frac{n^2+n-3}{n!}, \quad (iii)\ \operatorname{Arctan}\frac{2}{n^2}, \quad (iv)\ 3^n \sin^3 \frac{\theta}{3^{n+1}}, \quad (v)\ \frac{(-1)^n}{\operatorname{th} n}$$

5.3.2 Séries de nombres réels positifs

a) Généralités

Théorème 5.34. Pour qu'une série $\sum u_n$ de nombres réels positifs converge, il faut et il suffit que la suite (s_p) des sommes partielles soit majorée. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_p s_p = \sup_p s_p$.

Dém : Comme $u_n \geqslant 0$, la suite (s_p) est croissante. On sait alors que, pour une telle suite, on a l'équivalence

$$(s_p) \text{ converge} \Leftrightarrow (s_p) \text{ majorée.}$$

et de plus $\lim\limits_{p\to+\infty} s_p = \sup\limits_p s_p$ ∎

Proposition 5.3.2.
Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ alors $\begin{cases} \sum u_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge} \\ \sum v_n \text{ converge} \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \end{cases}$.

Dém : On utilise le fait que, si $(s_n) \nearrow$ est majorée alors elle converge, sinon elle diverge (c'est le théorème précédent). On note s_p la somme partielle de la série $\sum u_n$ et s'_p celle de la série $\sum v_n$. On remarque que $s_p \leqslant s'_p$.

- Si $\sum u_n$ diverge, $s_p \to +\infty$ donc $s'_p \to +\infty$, la série $\sum v_n$ diverge.
- Si $\sum v_n$ converge alors $s'_p \leqslant \sup\limits_p s'_p$ donc la suite (s_p) est majorée et par conséquent, la série $\sum u_n$ converge ∎

***Remarque* 5.3.4.** *Cette dernière propriété subsiste si on suppose seulement $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.*

Dém : On suppose que l'on a $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour $n \geqslant n_0$. On écrit alors (pour $p \geqslant n_0$)

$$s_p = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{p} u_n = U + \sum_{n=n_0}^{p} u_n$$
$$s'_p = \sum_{n=0}^{n_0-1} v_n + \sum_{n=n_0}^{p} v_n = V + \sum_{n=n_0}^{p} v_n$$

d'où $s_p \leqslant U - V + s'_p$ et on peut reprendre la démonstration précédente ■

Applications :

(i) Convergence des séries de Riemann.

Si $\alpha > 1$ $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \geqslant (\alpha-1)\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha}}$ (T.A.F.) donc $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ C.

Dém : Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ où $\alpha > 1$. $f'(x) = (1-\alpha)\dfrac{1}{x^\alpha}$ et le théorème des accroissements finis appliqué à f entre n et $n+1$ donne

$$f(n) - f(n+1) = -1 \times f'(n+\theta) = \frac{\alpha-1}{(n+\theta)^\alpha},\ \theta \in]0,1[$$
$$\geqslant \frac{\alpha-1}{(n+1)^\alpha}$$

car $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est décroissante. Or la série $v_n = \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ est une série aux différences, de somme partielle $1 - \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$ qui converge donc, grâce au théorème de comparaison, la série $\sum \dfrac{\alpha-1}{n^\alpha}$ converge i.e. $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge ■

Si $\alpha \leqslant 1$ $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{n} \geqslant \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, donc $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ D.

Dém : Soit $v_n = \ln(1+1/)$, on sait (contre-exemple du théorème 5.32 page 304) que $\sum v_n$ diverge donc, par comparaison, $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge. Comme $\dfrac{1}{n^\alpha} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour $\alpha < 1$, il en est de même de $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ ■

$$\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ C ssi } \alpha > 1}$$

(ii) **Régle de Riemann** :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = l$ alors

	$\alpha \leqslant 1$	$\alpha > 1$
$l \neq 0$	D	C
$l = 0$	?	C
$l = \infty$	D	?

.

Dém : On distingue les trois cas

- Si $l > 0$ (on étudie ici les séries à termes positifs) alors, par définition de la limite, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0$ entraîne $l/2 \leqslant n^\alpha u_n \leqslant 2l$ soit
$$\frac{l}{2n^\alpha} \leqslant u_n \leqslant \frac{2l}{n^\alpha}.$$
Si $\alpha > 1$ alors on utilise l'inégalité $u_n \leqslant \dfrac{2l}{n^\alpha}$ et le théorème de comparaison pour conclure à la convergence de $\sum u_n$.
Si $\alpha \leqslant 1$, on utilise l'autre inégalité $\dfrac{l}{2n^\alpha} \leqslant u_n$, $\sum u_n$ diverge.
- Si $l = 0$ et $\alpha > 1$ alors il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow n^\alpha u_n \leqslant 1$ et comme ci-dessus, la série $\sum u_n$ converge.
Si $\alpha \leqslant 1$, on ne peut pas conclure avec par exemple $u_n = \dfrac{1}{n \ln^\beta n}$ qui converge si $\beta > 1$ et qui diverge si $\beta \leqslant 1$ (cf. séries de Bertrand question (i) page 318).
- Si $l = +\infty$ et $\alpha \leqslant 1$ alors il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow n^\alpha u_n \geqslant 1$, la série $\sum u_n$ diverge.
Si $\alpha > 1$, on ne peut pas conclure, on peut reprendre exactement l'exemple ci-dessus des séries de Bertrand ■

(iii) Comparaison à une série géométrique : si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant ar^n$ où $0 < r < 1$ alors $\sum u_n$ C.
Dém : C'est immédiat avec le théorème de comparaison ■

b) Développement décimal d'un réel

Proposition 5.3.3. *Si $a \in \mathbb{N}$, $a \geqslant 2$, si $(v_n) \in [0, a-1]^{\mathbb{N}}$ (v_n entier naturel) alors la série de terme général $u_n = \dfrac{v_n}{a^n}$ converge et on a*
$$0 \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leqslant 1.$$

Dém : Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a
$$0 \leqslant \frac{v_n}{a^n} \leqslant \frac{a-1}{a^n} = \frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{a^n}$$
et, en additionnant ces inégalités, $\forall p \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \sum\limits_{n=0}^{p} \dfrac{v_n}{a^n} \leqslant 1 - \dfrac{1}{a^p} \leqslant 1$. On en déduit deux choses :
$\sum \dfrac{v_n}{a^n}$ converge et, par passage à la limite, $0 \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{v_n}{a^n} \leqslant 1$ ■
On peut appliquer ce résultat en prenant $a = 10$; pour $\alpha \in [0, 1[$, on pose $v_n = [10^n\alpha] - 10[10^{n-1}\alpha]$, on a alors la propriété suivante :

Proposition 5.3.4. ***Développement décimal d'un réel***
$\alpha = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ noté $\alpha = \overline{0, v_1 v_2 \dots v_n \dots}$ appelé développement décimal de α.

Dém : Avec $v_n = [10^n\alpha] - 10[10^{n-1}\alpha]$, la somme partielle de la série s'écrit

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{v_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{[10^n\alpha]}{10^n} - \frac{[10^{n-1}\alpha]}{10^{n-1}} \right) = \frac{[10^p\alpha]}{10^p}.$$

Or, par définition de la partie entière, $10^p\alpha - 1 < [10^p\alpha] \leqslant 10^p\alpha$, soit, en divisant par 10^p,

$$\alpha - \frac{1}{10^p} < \underbrace{\frac{[10^p\alpha]}{10^p}}_{=\sum_{n=1}^{p}\frac{[10^n\alpha]}{10^n}} \leqslant \alpha$$

et, en prenant la limite quand $p \to +\infty$, on obtient bien

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{[10^n\alpha] - 10[10^{n-1}\alpha]}{10^n} \right) \blacksquare$$

***Remarque* 5.3.5.** *On a $\overline{0,99\ldots9\ldots} = 1$ et si dans un développement décimal on a $v_{p-1} < 9$ et $v_n = 9$ pour tout n supérieur à p alors $\alpha = \overline{0, v_1v_2\ldots(v_{p-1}+1)}$; α est en fait un nombre décimal.*

Dém : $\overline{0,99\ldots9\ldots}$ est une écriture imprécise (à cause des $\ldots$) et elle correspond en fait à la somme d'une série i.e.

$$\overline{0,99\ldots9\ldots} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{0,9}{1-0,1} = 1$$

qui est la somme de la série de raison $0,1$ et de premier terme $0,9$.
On écrit ensuite

$$\begin{aligned} \alpha &= \overline{0, v_1\ldots v_{p-1}99\ldots} = \overline{0, v_1\ldots v_{p-1}} + 10^{p-1}\overline{0,99\ldots9\ldots} \\ &= \overline{0, v_1v_2\ldots(v_{p-1}+1)} \ \blacksquare \end{aligned}$$

Non explicitement au programme, le théorème suivant est une application intéressante des séries.

THÉORÈME 5.35. **Caractérisation d'un rationnel**
On reconnaît un rationnel à la périodicité de son développement décimal i.e.

$$\alpha = \overline{0, v_1v_2\ldots v_n\ldots} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N}^*, \exists r \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant p,\ v_{n+r} = v_n.$$

Dém :

- ($\Rightarrow$) Si $\alpha = \dfrac{a}{b}$ on utilise l'algorithme de recherche du développement décimal.
  On suppose ici que $\alpha \in]0,1[$ pour éliminer une éventuelle partie entière.
  On fait des divisions euclidiennes :
  - $10a = bv_1 + a_1$, $0 \leqslant a_1 < b$ d'où $\dfrac{a}{b} = \dfrac{v_1}{10} + \dfrac{a_1}{10b}$,
  - puis $10a_1 = bv_2 + a_2$, $0 \leqslant a_2 < b$ d'où $\dfrac{a}{b} = \dfrac{v_1}{10} + \dfrac{v_2}{100} + \dfrac{a_2}{100b}$.

– L'algorithme se poursuit ainsi avec $10a_{n-1} = bv_n + a_n$ soit

$$\frac{a}{b} = \sum_{p=1}^{n} \frac{v_p}{10^p} + \frac{a_{n+1}}{10^n b}$$

S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{n+1} = 0$ alors $\frac{a}{b}$ est un nombre décimal, son développement est bien périodique (il n'y a que des 0).
Sinon, on utilise alors le fait que $n \mapsto a_n$ n'est pas injective (puisque les a_n prennent leurs valeurs dans $[\![1, b-1]\!]$ ensemble fini) : il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \mathbb{N}^*$ tels que $a_{n_0+r} = a_n$. Si on reprend l'algorithme ci-dessus on a $\begin{cases} 10a_{n_0} & = bv_{n_0+1} + a_{n_0+1} \\ 10a_{n_0+r} & = bv_{n_0+r+1} + a_{n_0+r+1} \end{cases}$.
Comme $a_{n_0} = a_{n_0+r}$ alors, par unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne, on a $v_{n_0+1} = v_{n_0+r+1}$ et $a_{n_0+1} = a_{n_0+r+1}$. Par une récurrence immédiate, on obtient $v_{n_0+k} = v_{n_0+r+k}$ donc (v_n) est périodique à partir d'un certain rang.

- ($\Leftarrow$) La périodicité à partir d'un certain rang du développement décimal de α se traduit par

$$\begin{aligned}
\alpha &= \overline{0, v_1 \dots v_{n_0-1}(v_{n_0} \dots v_{n_0+r-1}) \dots (v_{n_0} \dots v_{n_0+r-1}) \dots} \\
&= \underbrace{\overline{0, v_1 \dots v_{n_0-1}}}_{=\frac{\overline{v_1 \cdots v_{n_0-1}}}{10^{n_0-1}}} + \underbrace{\overline{0, 0 \dots 0 v_{n_0} \dots v_{n_0+r-1}}}_{=\frac{\overline{v_{n_0} \cdots v_{n_0+r-1}}}{10^{n_0+r-1}}} + \cdots \\
&= \frac{\overline{v_1 \dots v_{n_0-1}}}{10^{n_0-1}} + \frac{\overline{v_{n_0} \dots v_{n_0+r-1}}}{10^{n_0+r-1}}(1 + 10^{-r} + \cdots) \\
&= \frac{\overline{v_1 \dots v_{n_0-1}}}{10^{n_0-1}} + \frac{\overline{v_{n_0} \dots v_{n_0+r-1}}}{10^{n_0+r-1}} \frac{1}{1 - 10^{-r}} \\
&= \frac{\overline{v_1 \dots v_{n_0-1}}}{10^{n_0-1}} + \frac{\overline{v_{n_0} \dots v_{n_0+r-1}}}{10^{n_0-1}} \frac{1}{10^r - 1} \in \mathbb{Q} \blacksquare
\end{aligned}$$

c) Comparaison logarithmique

Proposition 5.3.5. *Si, pour tout entier n, $u_n > 0$ et $\alpha_n > 0$, et si, à partir d'un certain rang $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ alors $u_n = O(\alpha_n)$.*
En particulier $\sum \alpha_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.

Dém : On suppose qu'à partir du rang p, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}$ pour $n \geqslant p$. On peut encore écrire ceci sous la forme $\frac{u_{n+1}}{\alpha_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{\alpha_n}$. On montre par une récurrence immédiate sur $n \geqslant p$ que $\frac{u_n}{\alpha_n} \leqslant \frac{u_p}{\alpha_p} = k$ donc $u_n \leqslant k\alpha_n$ ce qui signifie que $u_n = O(\alpha_n)$.
Par le théorème de comparaison, on en déduit immédiatement que si $\sum \alpha_n$ converge alors $\sum u_n$ converge ■

Applications :

(*i*) **Régle de d'Alembert** : si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ alors $\begin{cases} l < 1 \text{ C} \\ l > 1 \text{ D} \\ l = 1^+ \text{ D} \end{cases}$ (on compare u_n à une série géométrique).

Dém : Là aussi on distingue les cas (comme pour la règle de Riemann).

- Si $l < 1$ alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1+l}{2}$ (par définition de la limite). On utilise la proposition précédente avec $\alpha_n = \left(\dfrac{1+l}{2}\right)^n$. $\sum \alpha_n$ est une série géométrique de raison < 1 donc elle converge, il en est alors de même de $\sum u_n$.
- Si $l > 1$ ou $l = 1^+$ (i.e. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 par valeurs supérieures) alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que (dans les 2 cas) $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$, la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang, elle ne peut donc pas tendre vers 0. La série $\sum u_n$ est par conséquent divergente ■

(*ii*) **Régle de Duhamel** : (cette règle n'est pas au programme mais elle est souvent utile) dans le cas où $l = 1^-$, si on peut faire le développement asymptotique suivant : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\beta}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ alors,

- si $\beta > 1$: $\sum u_n$ converge (on compare u_n à $\dfrac{1}{n^{\frac{1+\beta}{2}}}$)
- si $\beta < 1$: $\sum u_n$ diverge (on compare u_n à $\dfrac{1}{n}$).

Dém : On utilise toujours le critère logarithmique.

- Si $\beta > 1$ on prend $\alpha = \dfrac{1+\beta}{2} > 1$ (par exemple) et $\alpha < \beta$ et on pose $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. On écrit le développement limité de $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

d'où $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$. On en déduit que

$$n\left(\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \beta - \alpha + o(1) \to \beta - \alpha > 0$$

donc $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} - \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est positif à partir d'un certain rang i.e. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
Comme $\sum v_n$ converge ($\alpha > 1$) alors $\sum u_n$ converge.

- Si $\beta < 1$ on prend $v_n = \dfrac{1}{n}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ d'où

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\beta - 1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

qui tend vers 0 par valeurs négatives donc, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à partir d'un certain rang. Comme $\sum v_n$ diverge, $\sum u_n$ diverge ■

Questions :

(i) Étudier la convergence des séries de terme général

$$(a)\ \frac{1}{n^2+a^2},\ (b)\ \left|\tan\frac{a}{n} - \sin\frac{a}{n}\right|^{1/2},\ (c)\ \frac{x^n}{n^2}\ (x>0),\ (d)\ \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

(ii) Déterminer le rationnel $\alpha = 3,142857\ 142857\ldots$.

(iii) Si $\dfrac{p}{q} = \overline{0, v_1 \ldots v_n \ldots}$ alors montrer que la période r de la suite (v_n) vérifie $r < q$.

(iv) Étude des séries de terme général $(x > 0,\ a > 0,\ b > 0)$

$$(a)\ \frac{x^n}{n!},\quad (b)\ n!x^{n^2},\quad (c)\ \frac{n!}{x}\ln(1+x)\ldots\ln(1+x/n),\quad (d)\ \frac{a(a+1)(\ldots)(a+n)}{b(b+1)(\ldots)(b+n)}$$

et calculer la somme de la dernière série (lorsqu'elle converge).

5.3.3 Sommation des relations de comparaison

Théorème 5.36. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs.
Si $a_n \sim l.b_n$ $(l \neq 0)$ alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature et on a les propriétés suivantes :

(i) Si $\sum b_n$ converge alors $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim l \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.

(ii) Si $\sum b_n$ diverge alors $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \sim l \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$.

Dém : Il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0$ entraîne $l/2b_n \leqslant a_n \leqslant 2lb_n$ (pour $l > 0$) et on utilise la proposition 5.3.2 page 306 de comparaison des séries à termes positifs qui nous dit que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature (ne pas oublier ici que a_n et b_n sont à termes positifs).

(i) $\sum b_n$ converge, donc $\sum a_n$ converge aussi. On écarte le cas où (b_n) est la suite nulle, ce cas ne présente pas d'intérêt et l'hypothèse $a_n \sim l.b_n$ n'aurait pas de signification.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_1 tel que $k \geqslant n_1$ entraîne

$$(l-\varepsilon)b_k \leqslant a_k \leqslant (l+\varepsilon)b_k$$

(traduction de l'hypothèse). En sommant, de $k = n+1 \geqslant n_1$ à N ces inégalités, on obtient

$$(l-\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{N} b_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} a_k \leqslant (l+\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{N} b_k.$$

Comme les séries $\sum b_n$ et $\sum a_n$ convergent, on peut passer à la limite quand $N \to +\infty$ d'où

$$(l-\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k = (l-\varepsilon)r'_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = r_n \leqslant l+\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k = (l+\varepsilon)r'_n$$

(r_n et r'_n désignant les restes des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$).
On a donc prouvé que, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_1$ on a $(l-\varepsilon) \leqslant \dfrac{r_n}{r'_n} \leqslant (l+\varepsilon)$ (ici $r'_n > 0$ car la suite (b_n) n'est pas identiquement nulle).

Conclusion : on a bien $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k \sim l \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.

(*ii*) On a une démonstration analogue à la propriété de Césaro : en utilisant l'encadrement ci-dessus pour $n \geqslant n_1$. On sépare la somme en deux :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n_1} a_k + (l-\varepsilon)\sum_{k=n_1+1}^{n} b_k}_{\sum_{k=0}^{n_1}(a_k-b_k)+(l-\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} b_k \leqslant} \leqslant \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant \underbrace{\sum_{k=0}^{n_1} a_k + (l+\varepsilon)\sum_{k=n_1+1}^{n} b_k}_{\leqslant \sum_{k=0}^{n_1}(a_k-b_k)+(l+\varepsilon)\sum_{k=0}^{n} b_k}$$

On pose (pour simplifier) $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ et $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$. L'inégalité ci-dessus devient

$$S_{n_1} - S'_{n_1} + (l-\varepsilon)S'_n \leqslant S_n \leqslant S_{n_1} - S'_{n_1} + (l+\varepsilon)S'_n.$$

On divise par $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$ qui tend vers l'infini, n_1 étant fixé :

$$\underbrace{\frac{S_{n_1} - S'_{n_1}}{S'_n}}_{\to 0} + (l-\varepsilon) \leqslant \frac{S_n}{S'_n} \leqslant \underbrace{\frac{S_{n_1} - S'_{n_1}}{S'_n}}_{\to 0} + (l+\varepsilon)$$

et on choisit $n_2 \geqslant n_1$ tel que $\left|\dfrac{S_{n_1} - S'_{n_1}}{S'_n}\right| \leqslant \varepsilon$. On obtient alors

$$l - 2\varepsilon \leqslant \frac{S_n}{S'_n} \leqslant l + 2\varepsilon$$

pour $n \geqslant n_2$ ce qui donne $S_n \sim S'_n$ (on aurait pu couper les ε en 2...) ■
Ce théorème est très important.

***Remarque* 5.3.6.**

(*i*) *Important : pour ce théorème, il est* ***essentiel*** *que les suites* (a_n) *et* (b_n) *soient de signe constant à partir d'un certain rang comme le montre le contre-exemple suivant :* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_n = a_n + \dfrac{1}{n}$, $\sum a_n$ *converge et* $\sum b_n$ *diverge.*

(*ii*) *Si* $\sum |u_n|$ *converge alors* $\sum \max(u_n, 0)$ *et* $\sum \max(-u_n, 0)$ *convergent (par domination), il en est de même si* $u_n \in \mathbb{C}$ *(cf. séries absolument convergentes).*

Dém :

(*i*) $a_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, de même pour b_n. La série $\sum a_n$ converge en application immédiate du théorème des séries alternées. La série $\sum b_n$ diverge car elle est la somme d'une série convergente ($\sum a_n$) et d'une série divergente ($\sum \dfrac{1}{n}$).

(*ii*) Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on a bien sûr $\max(u_n, 0) \leqslant |u_n|$ donc, par domination, $\sum \max(u_n, 0)$ converge. De même $\max(-u_n, 0) \leqslant |u_n|$ donc $\sum \max(-u_n, 0)$ converge aussi. On utilise alors l'égalité $u_n = \max(u_n, 0) - \max(-u_n, 0)$ (immédiate en distinguant les cas) d'où $\sum u_n$ converge en tant que somme de deux séries convergentes.
Si $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ alors $|\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $|\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$ donc $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent (en appliquant ce que l'on vient de prouver).
$u_n = \mathrm{Re}(u_n) + i\,\mathrm{Im}(u_n)$ permet alors d'affirmer que $\sum u_n$ converge ■

THÉORÈME 5.37. Ici, on suppose que $\sum u_n$ est une série à termes complexes et que $\sum b_n$ est une série à termes positifs.

(*i*) Si $u_n = o(b_n)$ alors $\sum b_n$ C $\Rightarrow \sum u_n$ C et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$.

(*ii*) Si $u_n = O(b_n)$ alors $\sum b_n$ C $\Rightarrow \sum u_n$ C et $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} b_k\right)$.

Dém : On reprend la démonstration du théorème précédent mais en utilisant ici la convergence de $\sum |u_n|$ car la suite (u_n) est à termes complexes.

- (*i*) Il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0$ entraîne $|u_n| \leqslant b_n$ donc $\sum u_n$ est absolument convergente. On en déduit que $\sum u_n$ est convergente (c'est le (*ii*) de la remarque ci-dessus).
Puis, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_1 tel que $n \geqslant n_1$ entraîne $|u_n| \leqslant \varepsilon b_n$ d'où, en sommant de $k = n+1 \geqslant n_1$ à N, on obtient
$$\left|\sum_{k=n+1}^{N} u_k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} |u_k| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n+1}^{N} b_k$$
et, comme toutes ces quantités ont une limite quand $N \to +\infty$, on obtient $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \varepsilon \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k$ i.e. $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right)$.

- (*ii*) Même démonstration (on remplace ε par $M > 0$ ■

5.3.4 Comparaison d'une série à une intégrale

THÉORÈME 5.38. **Cas d'une série à termes positifs**
Si f est une fonction continue par morceaux, décroissante de $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ alors, la série de terme général

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n),\ n \geqslant 1$$

est convergente. En particulier, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite quand $x \to +\infty$.

Dém : Comme f est décroissante, $f(n) \leqslant f(t) \leqslant f(n-1)$ pour $t \in [n-1, n]$ d'où, en intégrant ces inégalités, on a $0 \leqslant w_n \leqslant f(n-1) - f(n)$.
On fait alors la somme pour n variant de 1 à p ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{p} w_n \leqslant f(0) - f(p) \leqslant f(0).$$

La série $\sum w_n$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées, elle est donc convergente.
Montrons maintenant l'équivalence :

- Si $\sum f(n)$ converge alors, vu que $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = w_n + f(n)$, la série $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge car elle est la somme de deux séries convergentes. Posons $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ qui est une fonction croissante. L'égalité $\sum\limits_{n=1}^{p} \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = \displaystyle\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t = F(p)$ nous permet de dire que $F(p)$ admet une limite L quand $p \to +\infty$. On a $F(x) \leqslant F([x]+1) \leqslant L$, F est croissante et majorée, elle admet une limite en $+\infty$.
- Si $F(x)$ admet une limite en $+\infty$ alors $F(p)$, $p \in \mathbb{N}$ admet aussi une limite donc, en utilisant les égalités ci-dessus, la série $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge donc $\sum f(n)$ converge (car $f(n) = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - w_n$ somme de deux séries convergentes) ■

On se sert souvent du dessin ci-dessous comme support de démonstration :

***Remarque* 5.3.7.**

(i) *Si $\sum f(n)$ diverge, on a le résultat utile dans la pratique : $s_p \sim \displaystyle\int_0^p f(x)\,\mathrm{d}x$ où $s_p = \sum\limits_{n=0}^{p} f(n)$.*

Dém : En fait $\displaystyle\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{p} f(n) = \sum_{n=1}^{p} w_n$ a une limite donc $s_p - \displaystyle\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite et comme $s_p \to +\infty$, on a bien $\dfrac{1}{s_p}\displaystyle\int_0^p f(t)\,\mathrm{d}t \to 1$ (mais en fait on a mieux). L'intérêt de ce résultat est que l'on a ainsi un équivalent

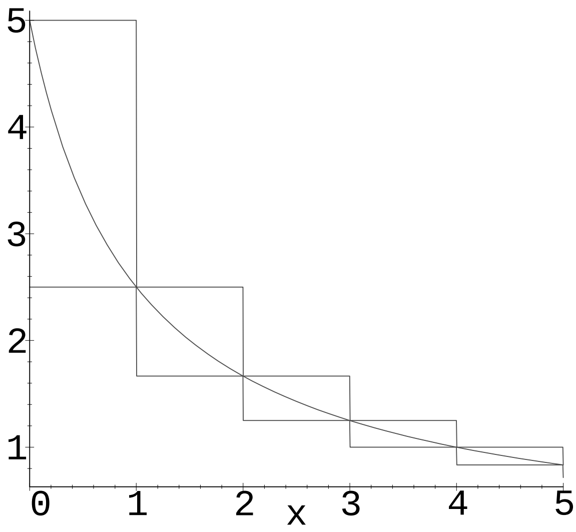


Figure 5.1: Comparaison série-intégrale

d'une somme partielle et il peut être utilisé avec le théorème 5.36 pour rechercher l'équivalent d'une somme (cf. exemple (ii) ci-après) ■

(*ii*) *Si la série converge, on a l'encadrement :* $\displaystyle\int_{p+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant r_p \leqslant \int_{p}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *et avec hypothèse* $\displaystyle\int_{p}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \sim \int_{p+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *alors on a* $\displaystyle r_p \sim \int_{p}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dém : On utilise ici les inégalités $\displaystyle\int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ *d'où, en les additionnant de* $p+1$ *à* N *:*

$$\int_{p+1}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=p+1}^{N} f(n) \leqslant \int_{p}^{N-1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

puis, en passant à la limite quand $N \to +\infty$

$$\int_{p+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=p+1}^{+\infty} f(n) \leqslant \int_{p}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

car toutes les expressions concernées ont une limite quand $N \to +\infty$.
Cet encadrement est souvent utile mais on n'y pense pas toujours.
$\displaystyle r_p \sim \int_{p}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *découle immédiatement de l'encadrement que l'on vient de trouver* ■

(*iii*) *Si* f *est croissante et admet une limite en* $+\infty$ *alors la série de terme général* $\displaystyle v_n = \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ *est convergente. Si* f *n'est pas bornée il sera tout de même intéressant d'encadrer* v_n.
Dém : Il suffit de renverser les inégalités de la démonstration du théorème, on note $l = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$.
Comme f *est croissante,* $f(n+1) \geqslant f(t) \geqslant f(n)$ *pour* $t \in [n, n+1]$ *d'où, en*

intégrant ces inégalités, on a $0 \leqslant v_n \leqslant f(n+1) - f(n)$*.*
On fait alors la somme pour n *variant de 1 à* p *ce qui donne*

$$\sum_{n=1}^{p} v_n \leqslant f(p+1) - f(1) \leqslant l.$$

La série $\sum v_n$ *est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées, elle est donc convergente* ■

Exemples :

(*i*) Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \displaystyle\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \gamma$ constante d'Euler.
Dém : f est décroissante sur $[1, +\infty[$, continue donc on peut appliquer le théorème de comparaison série-intégrale (sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et non sur $[0, +\infty[$). Le résultat est alors immédiat ■

(*ii*) Soit la série $\sum u_n$, si $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ (avec $\alpha > 1$) alors $r_n = O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$, si $u_n \sim \dfrac{A}{n^\alpha}$ alors $r_n \sim \dfrac{A}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ (on prend la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$).
Dém : On prend $f(t) = \dfrac{A}{t^\alpha}$, $\alpha > 1$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe donc $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge (on retrouve le résultat sur les séries de Riemann). On connaît alors l'encadrement du reste :

$$A\int_{p+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant r_p \leqslant A\int_p^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

et, après calculs des intégrales, $\dfrac{1}{(\alpha-1)(p+1)^{\alpha-1}} \leqslant r_p \leqslant \dfrac{A}{(\alpha-1)p^{\alpha-1}}$ par conséquent $r_p \sim \dfrac{A}{(\alpha-1)p^{\alpha-1}}$.
Si $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ alors on sait que le reste d'ordre p de $\sum u_n$ est majoré par r_p encadré ci-dessus donc c'est un $O\left(\dfrac{1}{p^{\alpha-1}}\right)$ ■

Théorème 5.39. Formule de Stirling
On a
$$\Gamma(n+1) = n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Dém : (Non exigible) On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}}$, $b_n = \ln a_n$.

On étudie la série aux différences : $\sum(b_n - b_{n-1})$ à l'aide d'un développement limité.

$$\begin{aligned}
b_n - b_{n-1} &= \ln \frac{a_n}{a_{n-1}} = \ln\left(\frac{n!\mathrm{e}^{-n}}{n^{n+1/2}} \times \frac{(n-1)^{n-1/2}}{(n-1)!\mathrm{e}^{-n+1}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{n}{e} \times \frac{(n-1)^{n-1/2}}{n^{n+1/2}}\right) = \ln \frac{(n-1)^{n-1/2}}{n^{n-1/2}} - 1 \\
&= (n-1/2)\ln\frac{n-1}{n} - 1 = -(n-1/2)\ln(1-1/n) - 1 \\
&= -(n-1/2).\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1
\end{aligned}$$

en utilisant le développement limité de $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + O(x^2)$

$$= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum b_n - b_{n-1}$ converge, on en déduit que b_n admet une limite b et comme $a_n = \mathrm{e}^{b_n}$, alors la suite (a_n) admet une limite $l = \mathrm{e}^b > 0$. On obtient la formule intermédiaire suivante

$$n! \sim l\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

On utilise alors la formule de Wallis $\pi = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2^n n!)^4}{n[(2n)!]^2}$ obtenue avec les intégrales de Wallis (cf. exemple (ii) page 361.
On a ainsi

$$\begin{aligned}
(2^n n!)^4 &\sim \frac{2^{4n} l^4 n^{4n} n^2}{\mathrm{e}^{4n}} = l^4 \frac{2^{4n} n^{4n+2}}{\mathrm{e}^{4n}} \\
n[(2n)!]^2 &\sim n l^2 \frac{(2n)^{4n} 2n}{\mathrm{e}^{4n}} = l^2 \frac{2^{4n+1} n^{4n+2}}{\mathrm{e}^{4n}}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\pi &\sim \frac{(2^n n!)^4}{n[(2n)!]^2} \sim l^4 \frac{2^{4n} n^{4n+2}}{\mathrm{e}^{4n}} \times \frac{\mathrm{e}^{4n}}{l^2 2^{4n+1} n^{4n+2}} \\
&\sim \frac{l^2}{2}
\end{aligned}$$

d'où $l = \sqrt{2\pi}$ d'où $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ ■

Questions :

(i) Nature des séries de Bertrand de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

(ii) Si $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, montrer que $s_n - \ln n - \gamma \sim \dfrac{1}{2n}$.

(iii) Chercher un équivalent de la fonction de Riemann $\zeta(t) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^t}$ quand $t \to 1$.

5.3.5 Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie

a) Critère de Cauchy

Théorème 5.40. Critère de Cauchy
Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie alors la série $\sum u_n$ converge ssi elle vérifie le critère de Cauchy i.e.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \|u_n + \cdots + u_{n+p}\| \leqslant \varepsilon.$$

Dém : L'équivalence est immédiate, il suffit d'exprimer que la suite des sommes partielles converge ssi c'est une suite de Cauchy car tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet ■

Définition 5.3.4. ***Série absolument convergente***
On dit que la série $\sum u_n$, où $u_n \in E$, est absolument convergente ssi$_{déf}$ la série $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Théorème 5.41. Convergence des séries absolument convergentes
Si $\sum u_n$ est absolument convergente dans E de dimension finie, alors elle converge. De plus, on a

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

Dém :

- On utilise $\|u_n + \cdots + u_{n+p}\| \leqslant \|u_n\| + \cdots + \|u_{n+p}\|$ et le critère de Cauchy : Notons $S_k = \sum_{n=0}^{k} u_k$ et $S'_k = \sum_{n=0}^{k} \|u_k\|$. Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors la suite (S'_k) est une suite de Cauchy donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \|u_n\| + \cdots + \|u_{n+p}\| \leqslant \varepsilon.$$

  Il suffit alors d'utiliser l'inégalité mentionnée en préambule pour en déduire que (S_k) est une suite de Cauchy et de conclure à la convergence de $\sum u_n$.

- L'inégalité s'obtient par passage à la limite grâce à la continuité de la norme :

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \|u_n\|$$

  et comme chacune des sommes admet une limite, on en déduit

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|$$

  par passage à la limite ■

DÉFINITION 5.3.5. ***Espace ℓ^1, espace ℓ^2***
On appelle ℓ^1 l'ensemble des séries (de complexes) absolument convergentes.
On appelle ℓ^2 l'ensemble des séries de (module) carré absolument convergentes.

THÉORÈME 5.42. ℓ^1 muni de la norme $u \mapsto N_1(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est un espace vectoriel normé.

Dém : On va montrer directement que N_1 est une norme (et on en déduira que ℓ^1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$) :
$N_1 \ : \ell^1 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est immédiat. Montrons les autres propriétés :

- Si $N_1(u) = 0$ alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,
$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{p} |u_n| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| = 0$$
donc $u_n = 0$ pour $n \in [\![0, p]\!]$. Comme ceci est vrai pour tout p, on en déduit que $u_n = 0$ pour tout n i.e. $u = 0$.
- $|\lambda u_n| = |\lambda|.|x_n|$ donc, en additionnant, de $n = 0$ à p, puis en passant à la limite sur p (par hypothèse, toutes les limites existent) on déduit que $\lambda u \in \ell^1$ et que $N_1(\lambda u) = |\lambda| N_1(u)$.
- De même $|u_n + v_n| \leqslant |u_n| + |v_n|$ par conséquent $u + v \in \ell^1$ et finalement $N_1(u + v) \leqslant N_1(u) + N_1(v)$ ■

Enfin, un dernier théorème qui constitue un exemple important (mais pas nécessairement au programme).

THÉORÈME 5.43. ℓ^2 muni du produit scalaire $(u, v) \mapsto (u|v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{u}_n v_n$ et de la norme N_2 associée est un espace de Hilbert.

Dém :

- N_2 est une norme : $N_2 \ : \ell^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est immédiat. Montrons les autres propriétés :
  - Si $N_2(u) = 0$ alors $\forall n \in [\![0, p]\!]$, $|u_n|^2 = 0$ donc, comme pour N_1, $u = 0$.
  - $|\lambda u_n| = |\lambda|.|u_n|$ donc en additionnant, de $n = 0$ à p, puis en passant à la limite sur p (par hypothèse, toutes les limites existent) on déduit que $\lambda u \in \ell^2$ et que $N_2(\lambda u) = |\lambda| N_2(u)$.
  - On utilise l'inégalité de Minkowski vue au chapitre 4 : pour tout $p \in \mathbb{N}$
  $$\left(\sum_{n=0}^{p} |u_n + v_n|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{n=0}^{p} |u_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=0}^{p} |v_n|^2\right)^{1/2}$$
  on passe ensuite à la limite quand $p \longrightarrow +\infty$
  $$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n + v_n|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|^2\right)^{1/2}$$
  On en déduit que $u + v \in \ell^2$ et que $N_2(u + v) \leqslant N_2(u) + N_2(v)$.

- Montrons que ℓ^2 est complet. Soit $(u^{(p)})$ une suite de Cauchy de ℓ^2 que l'on note $u^{(p)} = (u_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$. Il faut faire attention ici car on a deux indices n et p et on doit préciser quel est l'indice qui varie. On a donc $\forall\varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant P$, $\forall q \in \mathbb{N}$, $N_2(u^{(p+q)} - u^{(p)}) \leqslant \varepsilon$. Traduisons cette dernière inégalité :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n^{(p+q)} - u_n^{(p)}|^2\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon \qquad \text{(inégalité 1)}$$

soit, en élevant au carré et en majorant un terme de la série à terme positif par la somme de cette série :

$$|u_n^{(p+q)} - u_n^{p}|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n^{(p+q)} - u_n^{(p)}|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

donc chaque suite $(u_n^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc converge vers un complexe noté u_n.
On utilise à nouveau l'(inégalité 1)

$$\sum_{n=0}^{N} |u_n^{(p)} - u_n^{(p+q)}|^2 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n^{(p)} - u_n^{(p+q)}|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

pour $p \geqslant P$. On prend alors la limite quand $q \to +\infty$ dans l'inégalité $\sum\limits_{n=0}^{N} |u_n^{(p)} - u_n^{(p+q)}|^2 \leqslant \varepsilon^2$ (on a une somme finie donc il n'y a pas de problème) d'où

$$\sum_{n=0}^{N} |u_n^{(p)} - u_n|^2 \leqslant \varepsilon^2. \qquad \text{(inégalité 2)}$$

Ceci prouve que la série $\sum |u^{(p)} - u_n|^2$ converge (elle est à terme positifs et majorée) et, par inégalité triangulaire,

$$\left(\sum_{n=0}^{N} |u_n|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n^{(p)} - u_n|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=0}^{N} |u_n^{(p)}|^2\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon + N_2(u^{(p)}).$$

On en déduit que $u = (u_n) \in \ell^2$ et, en prenant la limite quand $N \to +\infty$ dans l'(inégalité 2)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n^{(p)} - u_n|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

ce qui signifie que $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente (vers u) ■

***Remarque* 5.3.8.** *On prouve de la même manière que ℓ^1 est un espace de Banach mais ce n'est pas un espace de Hilbert.*

Questions :

(i) Étudier la convergence absolue de la série de terme général $u_n = \dfrac{e^{in}}{n^\alpha}$.

(ii) Si $\sum u_n$ est absolument convergente, prouver que (v_n), où $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$, est absolument convergente. Généraliser.

b) Séries géométriques et exponentielles

Un théorème très utile.

Théorème 5.44. Convergence des séries géométriques

Étant donné une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie ayant e pour élément unité et u un élément de $\mathcal{A}$ tel que $\|u\| < 1$, la série $\sum u^n$ est absolument convergente, $e - u$ est inversible dans $\mathcal{A}$ et $(e-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

Dém :

- Comme $\|u^n\| \leqslant \|u\|^n$ par récurrence immédiate, la série $\sum u^n$ est absolument convergente (majorée par une série géométrique de raison < 1).
  Comme on a supposé que $\mathcal{A}$ est de dimension finie, c'est un espace de Banach donc la série $\sum u_n$ converge.
- Ensuite

$$\begin{aligned}(e-u)s_p = (e-u)\sum_{n=0}^{p} u^n &= \sum_{n=0}^{p} u^n - \sum_{n=1}^{p+1} u^n \\ &= e - u^{p+1} = s_p(e-u).\end{aligned}$$

  Grâce à la continuité du produit dans une algèbre normée alors

$$\begin{aligned}\lim_{p\to+\infty}(e-u)s_p = (e-u)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\right) &= \lim_{p\to+\infty} s_p(e-u) \\ &= e = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u^n\right)(e-u)\end{aligned}$$

  car $\|u^{p+1}\| \to 0$ donc $u^{p+1} \to 0$. On obtient bien le résultat annoncé ■

Ce théorème permet de prouver qu'un élément d'une algèbre normée est inversible.

Un autre théorème plein de conséquences.

Théorème 5.45. Série exponentielle

Étant donné une algèbre normée de dimension finie $\mathcal{A}$ ayant e pour élément unité alors, pour tout élément u de $\mathcal{A}$, la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ est absolument convergente.
On définit alors l'exponentielle de u par

$$\exp u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

Dém : On a là aussi $\|u^n\| \leqslant \|u\|^n$ donc $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ est absolument convergente donc convergente ■

Applications :

(*i*) Exponentielle d'un nombre complexe $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

(ii) Exponentielle d'un endomorphisme d'espace vectoriel normé E de dimension finie $\mathrm{e}^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$.

(iii) Exponentielle d'une matrice réelle ou complexe $\mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

Questions :

(i) Si $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, calculer e^A.

(ii) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $(u - \lambda\,\mathrm{Id})^p = 0$, calculer e^u (on utilisera le fait que si deux endomorphismes u et v commutent, alors $\mathrm{e}^{u+v} = \mathrm{e}^u \circ \mathrm{e}^v$).

c) Produit de Cauchy, séries doubles

Définition 5.3.6. ***Produit de Cauchy (ou produit de convolution)***
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries de nombres complexes alors on définit le produit de Cauchy de $\sum u_n$ par $\sum v_n$ avec

$$\left(\sum u_n\right) \times \left(\sum v_n\right) = \sum w_n \text{ où } w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = (u * v)_n.$$

Théorème 5.46. **Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes**
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, il en est de même de la série $\sum w_n$ où $w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$ et on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}.$$

Dém : La démonstration se fait en 2 temps :

- On suppose que $u_p \geqslant 0$ et $v_q \geqslant 0$. On montre l'encadrement

$$\sum_{p=0}^{N} u_p \times \sum_{q=0}^{N} v_q \leqslant \sum_{n=0}^{2N} w_n \leqslant \sum_{p=0}^{2N} u_p \times \sum_{q=0}^{2N} v_q$$

$v \setminus u$	u_0	u_1	$\dots$	u_N	u_{N+1}	$\dots$	u_{2N}
v_0	u_0v_0	u_1v_0	$\dots$	u_Nv_0	$u_{N+1}v_0$	$\dots$	$u_{2N}v_0$
v_1	u_0v_1	u_1v_1	$\dots$	u_Nv_1	$u_{N+1}v_1$	$\iddots$	$u_{2N}v_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$	$\iddots$	$\vdots$
v_N	u_0v_N	u_1v_N	$\dots$	u_Nv_N	$\dots$	$\vdots$	$u_{2N}v_N$
v_{N+1}	u_0v_{N+1}	u_1v_{N+1}	$\iddots$	u_Nv_{N+1}	$\dots$	$\dots$	$u_{2N}v_N$
$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$	$\iddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
v_{2N}	u_0v_{2N}	u_1v_{2N}	$\dots$	u_Nv_{2N}	$u_{N+1}v_{2N}$	$\dots$	$u_{2N}v_{2N}$

La somme $S_1(N) = \sum_{p=0}^{N} u_p \times \sum_{q=0}^{N} v_q$ correspond au termes écrits en rouge, à laquelle on rajoute les termes en noir pour avoir $S_2(N) = \sum_{n=0}^{2N} w_n$ et enfin, on prend les termes en vert pour avoir la dernière somme $S_3(N) = \sum_{p=0}^{2N} u_p \times \sum_{q=0}^{2N} v_q$.
D'un point de vue plus mathématique :

$$\begin{aligned} S_1(N) &= \sum_{(p,q)\in[\![0,N]\!]^2} u_p v_q, \\ S_2(N) &= \sum_{p+q\leqslant N} u_p v_q, \\ S_3(N) &= \sum_{(p,q)\in[\![0,2N]\!]^2} u_p v_q. \end{aligned}$$

Si on note $C_N = [\![0,N]\!]^2$, $T_N = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q \leqslant 2N\}$ alors on a les inclusions $C_N \subset T_N \subset C_{2N}$ justifiées par :

- Si $p \leqslant N$ et $q \leqslant N$ alors on a évidemment $p+q \leqslant 2N$ donc $C_N \subset T_N$.
- Si $p+q \leqslant 2N$ alors $p \leqslant 2N-q \leqslant 2N$ et $q \leqslant 2N-p \leqslant 2N$ soit $T_N \subset C_{2N}$.

Grâce à ces inclusions, on en déduit que $S_1(N) \leqslant S_2(N) \leqslant S_3(N)$ (on additionne des quantités positives).
On utilise alors le théorème d'encadrement pour en déduire que la série $\sum w_n$ converge et que $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$.

- Cas général : on pose $u'_n = |u_n|$, $v'_n = |v_n|$ et $w'_n = \sum_{p=0}^{n} u'_p v'_{n-p}$. En utilisant le premier point de la démonstration, on peut en déduire que $\sum w'_n$ converge et qu'on a l'égalité $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u'_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v'_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w'_n$. Ceci se traduit par le fait que $w'_N - \left(\sum_{p=0}^{N} u'_p\right) \times \left(\sum_{q=0}^{N} v'_q\right) = \varepsilon_N \to 0$.

$$|w_n| = \left|\sum_{n=0}^{p} u_p v_{n-p}\right| \leqslant \sum_{p=0}^{n} |u_p|.|v_{n-p}| = w'_n$$

par comparaison on en déduit que $\sum w_n$ est absolument convergente.
On reprend ensuite les notations du premier point : C_N et T_N. $C_N \subset T_N$ donc

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=0}^{2N} w_n - \left(\sum_{p=0}^{N} u_p\right) \times \left(\sum_{q=0}^{N} v_q\right)\right| &= \left|\sum_{(p,q)\in T_N} u_p v_q - \sum_{(p,q)\in C_N} u_p v_q\right| = \left|\sum_{(p,q)\in T_N\setminus C_N} u_p v_q\right| \\ &\leqslant \sum_{(p,q)\in T_N\setminus C_N} u'_p v'_q = \sum_{(p,q)\in T_N} u'_p v'_q - \sum_{(p,q)\in C_N} u'_p v'_q \\ &= w'_N - \left(\sum_{p=0}^{N} u'_p\right) \times \left(\sum_{q=0}^{N} v'_q\right) = \varepsilon_N. \end{aligned}$$

On sait que $\varepsilon_N \to 0$ donc $\sum_{n=0}^{2N} w_n - \left(\sum_{p=0}^{N} u_p\right) \times \left(\sum_{q=0}^{N} v_q\right) \to 0$ et comme chacune des séries converge, on a bien

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}$$

ce qui permet de conclure ■

Exemple : Si on pose $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ alors on peut montrer ainsi la propriété fondamentale de l'exponentielle : $\mathrm{e}^z.\mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}$.

Dém : Soit $u_p = \frac{z^p}{p!}$, $v_q = \frac{z'^q}{q!}$, les séries $\sum u_p$ et $\sum v_q$ convergent absolument.

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{z^p}{p!} \frac{z'^{n-p}}{(n-p)!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!} z^p z'^{n-p} = \frac{(z+z')^n}{n!} \end{aligned}$$

en utilisant la formule du binôme.
On applique alors le théorème précédent soit

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z.\mathrm{e}^{z'} &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^p}{p!}\right) \times \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{z'^q}{q!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \mathrm{e}^{z+z'} ■ \end{aligned}$$

THÉORÈME 5.47. Interversion de sommations, Théorème de Fubini
Soit $u = (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de réels ou de complexes. Si

- $\forall q \in \mathbb{N}$, $\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|$ est convergente,
- $\sum_q \left(\sum_p |u_{p,q}|\right)$ converge

alors $\sum_p u_{p,q}$, $\sum_q u_{p,q}$ convergent et $\sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$.

i.e. on peut intervertir les sommations.

Théorème admis.

***Remarque* 5.3.9.** *En fait, ce qui a été dit sur les séries de complexes absolument convergentes peut être élargi au cas des séries dans les espaces vectoriels et les algèbres normées en dimension finie. En particulier, si A et B sont deux matrices carrées qui commutent alors* $\exp(A+B) = \exp A. \exp B$. *Ce résultat est hors programme mais il est souvent invoqué ou utilisé dans les écrits et oraux de concours.*

Questions :

(*i*) Montrer que $\frac{1}{(1-z)^p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-p}{n} (-z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n-1}{n} z^n$ pour $|z| < 1$.

(*ii*) Si $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, que penser de la série $\sum(u * v)_n$?

(*iii*) Si $\zeta(q) = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{1}{p^q}$ calculer $\sum_{q=2}^{+\infty}(\zeta(q) - 1)$.

5.4 Suites et séries de fonctions

5.4.1 Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale

Dans un premier temps, toutes les fonctions considérées ici seront des fonctions définies sur A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie à valeurs réelles ou complexes. Dans un deuxième temps, on s'intéressera au cas où ces fonctions sont à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

a) Convergence simple et uniforme des suites et séries de fonctions

Définition 5.4.1. ***Convergence simple, convergence uniforme,***
Soit (f_n) une suite de fonctions, on définit alors

- *La convergence simple $f_n \xrightarrow[A]{C.S.} f$ ssi$_{déf}$ $\forall x \in A, \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.*
- *La convergence uniforme $f_n \xrightarrow[A]{C.U.} f$ ssi$_{déf}$ $\lim\limits_{n\to+\infty} N_\infty(f - f_n) = 0$ où N_∞ est la norme définie sur les fonctions bornées.*

***Remarque* 5.4.1.**

(*i*) *La convergence uniforme implique la convergence simple.*

(*ii*) *Il est très formateur d'écrire au moins une fois la définition ci-dessus avec des quantificateurs et de remarquer les différences !*
On écrit
convergence simple :

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

convergence uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

puis on permute les $\forall$ écrits en noir ce qui donne convergence simple :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in A,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

convergence uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall x \in A,\ \forall n \geqslant n_0,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Tout le problème ici pour passer de la convergence simple à la convergence uniforme consiste à permuter les quantificateurs en rouge, en fait cela revient à montrer que n_0 ne dépend que de ε mais pas de x, i.e. n_0 est uniforme par rapport à x d'où l'appellation

(iii) *On peut définir la convergence uniforme d'une suite de fonctions non bornées aussi, il faudra faire attention en manipulant cette norme.*

(iv) *La convergence uniforme sur tout intervalle* $[0, a]$ *pour* $0 < a < 1$ *n'entraîne pas la convergence uniforme sur* $[0, 1]$ *(prendre par exemple* $f_n(x) = x^n$*). Ceci est bien sûr vrai dans d'autres circonstances.*
Sur $[0, a]$*, on a* $\|f_n\|_\infty = a^n \to 0$ *donc* $f_n \xrightarrow[{[0,a]}]{C.U.} 0$ *mais sur* $[0, 1]$*,* $\|f_n\|_\infty = 1$ *donc* $f_n \not\twoheadrightarrow 0$.

(v) *Pour prouver que la suite* (f_n) *ne converge pas uniformément vers* f *sur* A*, il suffit de trouver* $\varepsilon > 0$ *et une suite* (x_n) *de* $A^{\mathbb{N}}$ *tels que* $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon$.
Dém : En effet, on aura dans ce cas $\|f - f_n\|_\infty \geqslant |f_n(x_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon$ *donc* $\|f - f_n\|_\infty \not\to 0$ ■

On donne les mêmes définitions pour les séries de fonctions, on trouvera ainsi les notions de convergence simple, uniforme pour une série de fonctions.

- On dit que $\sum f_n$ converge simplement sur A ssi$_{\text{déf}}$ la suite des sommes partielles converge simplement (et là on ne connaît pas forcément la limite comme dans le cas des suites de fonctions) et on l'écrit $\sum f_n$ C.S. sur A.
- On dit que $\sum f_n$ converge uniformément sur A ssi$_{\text{déf}}$ la suite des sommes partielles converge uniformément et on l'écrit $\sum f_n$ C.U. sur A.

PROPOSITION 5.4.1. *Si* (f_n) *converge vers* f *uniformément sur* A *et si, pour tout* n*,* f_n *est bornée sur* A*, alors* f *l'est aussi.*

Dém : Prenons dans la définition de la convergence uniforme $\varepsilon = 1$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant 1$. On a donc (en posant $M = \|f_n\|_\infty$)

$$\begin{aligned} \forall x \in A,\ |f(x)| &\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \\ &\leqslant \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty \leqslant 1 + M \end{aligned}$$

donc f est bornée par $1 + M$ ■

***Remarque* 5.4.2.** *Cette dernière proposition peut s'interpréter de la manière suivante : si* $(f_n) \in \mathcal{B}(A, F)^{\mathbb{N}}$ *et si* $N_\infty(f - f_n) \to 0$ *alors* $f \in \mathcal{B}(A, F)$*. On ne peut pas dire la même chose par exemple avec l'ensemble des fonctions continues sur* $[0, 1]$ *à valeurs réelles muni de la norme 1.*

Cela signifie que $\mathcal{B}(A, F)$ est "fermé" pour la norme infinie alors que $\mathcal{C}([0, 1])$ ne l'est pas pour la norme 1, la suite de fonctions f_n affine par morceaux sur $[0, 1]$ définie par $f_n = 1$ sur $[0, 1/2 - 1/n]$, $f_n = 0$ sur $[1/2 + 1/n, 1]$ (cf. page 292) converge pour N_1 vers la fonction $f = 1_{[0,1/2]}$ qui n'est pas continue.

THÉORÈME 5.48. **Théorème de double limite**
Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

$$\begin{pmatrix} (i)\ f_n \xrightarrow[A]{C.U.} f, \\ (ii)\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n \text{ continue en } a, \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (i)\ f \text{ est continue en } a \\ (ii)\ \lim\limits_{n\to+\infty}(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)) = \lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)) \end{pmatrix}$$

i.e. on peut permuter les limites.

Dém :

- On traduit d'abord la convergence uniforme :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \mid \|f - f_n\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et $|f(a) - f_n(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

- Puis, n étant choisi, on traduit la continuité de f_n en a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Montrons maintenant la continuité de f en a :

$$\begin{array}{rllll} |f(x) - f(a)| \leqslant & |f(x) - f_n(x)| & + |f_n(x) - f_n(a)| & + |f_n(a) - f_n(x)| \\ \leqslant & \frac{\varepsilon}{3} & + \frac{\varepsilon}{3} & + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{array}$$

On a utilisé la convergence uniforme pour majorer $|f(x) - f_n(x)|$ et $|f_n(a) - f_n(x)|$ et la continuité de f_n pour majorer $|f_n(x) - f_n(a)|$.
Conclusion : on a montré la continuité de f en a et, en prime on a pu échanger les limites :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to a} f_n(x)) &= \lim_{n\to+\infty} f_n(a) \\ &= f(a) \\ &= \lim_{x\to a} f(x) \\ &= \lim_{x\to a}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)) \blacksquare \end{aligned}$$

Corollaire 5.49. On suppose ici que $a \in \overline{A} \setminus A$ et que

$$\begin{pmatrix} (i)\ f_n \xrightarrow[A]{C.U.} f, \\ (ii)\ \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x\to a} f_n(x) \text{ existe}, \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (i)\ \lim_{x\to a} f(x) \text{ existe} \\ (ii)\ \lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to a} f_n(x)) = \lim_{x\to a}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)) \end{pmatrix}$$

C'est ce résultat qui est appelé théorème de double limite.
Dém : On utilise l'hypothèse (ii) pour prolonger les fonctions f_n par continuité en a. On note $f_n(a)$ cette limite.
Montrons que la suite $(f_n(a))$ est de Cauchy :
L'hypothèse (i) se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geqslant n_0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

(une suite convergente est une suite de Cauchy). Pour tout $x \in A$, on a par conséquent $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ et en prenant la limite quand $x \to a$, on obtient $|f_{n+p}(a) - f_n(a)| \leqslant \varepsilon$. La suite $(f_n(a))$ est de Cauchy, elle est donc convergente. On note $f(a)$ sa limite. Si on revient à l'égalité $|f_{n+p}(a) - f_n(a)| \leqslant \varepsilon$ et que l'on prenne la limite quand $p \to +\infty$ (c'est possible car on vient de prouver que cette limite existait) alors on obtient $|f(a) - f_n(a)| \leqslant \varepsilon$.
On a ainsi les mêmes hypothèses que pour le théorème de double limite en remplaçant A par $A' = A \cup \{a\}$. On peut donc utiliser sa conclusion $\blacksquare$

***Remarque* 5.4.3.** *On peut encore étendre le domaine de validité du corollaire précédent, si $E = \mathbb{R}$, au cas où $a = \pm\infty$.*
Si $A = \mathbb{N}$, on peut alors réécrire ce corollaire sous la forme suivante :
Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de complexes telle que

$$\begin{pmatrix} (i) \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup_{p\in\mathbb{N}} |u_{n,p} - u_p|\right) = 0, \\ (ii)\ \forall n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p} \textit{ existe}, \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} (i) \lim\limits_{p\to+\infty} u_p \textit{ existe }, \\ (ii) \lim\limits_{n\to+\infty} (\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p}) = \lim\limits_{p\to+\infty} (\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n,p}). \end{pmatrix}$$

Les choses se comprennent mieux si on écrit $u_n(p)$ à la place de $u_{n,p}$.

THÉORÈME 5.50. Si A est un compact de E alors $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}(A)$ muni de la norme N_∞.

Dém :

- Comme A est compact alors toute fonction continue sur A est bornée donc $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{B}(A)$.
- Soit $(f_n) \in (\mathcal{C}(A))^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[A]{C.U.} f$.
  Par hypothèse, pour tout x de A, f_n est continue en x donc, en application du théorème de double limite, f est continue en x et ceci pour tout $x \in A$ par conséquent $f \in \mathcal{C}(A)$.

Conclusion : $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}(A)$ muni de la norme N_∞ ■

b) CONVERGENCE NORMALE DES SÉRIES DE FONCTIONS

Pour les séries de fonctions il n'est pas toujours commode de prouver la convergence uniforme (en effet on ne connaît pas toujours la somme) aussi il est souvent intéressant d'utiliser la convergence normale comme critère de convergence uniforme pour les séries de fonctions.

DÉFINITION 5.4.2. ***Convergence normale***
Une série $\sum f_n$ de fonctions (de $\mathcal{B}(A, F)$) définies sur A est dite normalement convergente sur A ssi$_{déf}$ la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

***Remarque* 5.4.4.** *Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, il convient d'utiliser une série numérique convergente majorante $\sum \alpha_n$, c'est-à-dire telle que, pour tout n, $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$.*

THÉORÈME 5.51. Toute série normalement convergente sur A est absolument et uniformément convergente sur A et on a

$$N_\infty\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} N_\infty(f_n)$$

Dém : On utilise ici le fait que F étant un espace vectoriel normé, c'est un espace de Banach, toute suite de Cauchy converge et la convergence absolue entraîne la convergence simple.

- Pour tout $x \in A$, on a $|f_n(x)| \leqslant N_\infty(f_n)$ donc la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente pour tout $x \in A$ et elle converge simplement sur A.
- Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant n_0 + 1$ alors

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n_0+1}^{n} f_k(x)\right| &\leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{n} N_\infty(f_k)\\ &\leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} N_\infty(f_k).\end{aligned}$$

Donc $|r_{n_0}(x)| \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} N_\infty(f_k)$ soit $\|r_{n_0}\|_\infty \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} N_\infty(f_k) \to 0$ par conséquent r_{n_0} converge uniformément vers 0 i.e. $\sum f_n$ converge uniformément.

- On peut reprendre la démonstration ci-dessus en remplaçant $n_0 + 1$ par 0 et dans ce cas on obtient l'inégalité

$$N_\infty\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} N_\infty(f_n)\blacksquare$$

Traduction de ce théorème : Si la série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** et si, pour tout n, $\lim_{x\to a} f_n(x)$ existe alors $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ existe et on a

$$\boxed{\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).}$$

***Remarque* 5.4.5.** *On peut rassembler les résultats de convergence sur le schéma suivant*

$$\begin{array}{ccccc} & & C.U. & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ C.N & & & & C.S. \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & C.A. & & \end{array}$$

Où C.N. signifie convergence normale, C.U. convergence uniforme, C.A. convergence absolue et C.S. convergence simple.

Exemple d'application : Soit $z \in \mathbb{C}$ alors $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.
Dém : On développe avec la formule du binôme :

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{z^k}{n^k}\\ &= \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{(n-k)!n^k}}_{=a_{k,n}} \frac{z^k}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} \frac{z^k}{k!}\end{aligned}$$

avec $a_{k,n} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!n^k} & \text{si } k \leqslant n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$.

On prouve alors que cette série converge normalement pour $n \in \mathbb{N}$:

si $u_k(n) = a_{k,n}\dfrac{z^k}{k!}$ alors $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_k(n) = \dfrac{z^k}{k!} \\ |u_k(n)| \leqslant \dfrac{|z|^k}{k!} \end{cases}$ et comme $\sum \dfrac{|z|^k}{k!}$ converge on a bien la convergence normale.

On utilise finalement le théorème de double limite :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} u_k(n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!} = \mathrm{e}^z \blacksquare \end{aligned}$$

c) Extension au cas des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Tout ce qui a été dit ci-dessus, tant pour les suites que pour les séries se transmet sans problème au cas des fonctions à valeurs dans F e.v.n. de dimension finie.

Théorème 5.52. Si $\mathcal{A}$ est une algèbre normée de dimension finie alors

- $u \mapsto (e-u)^{-1}$ est continue sur la boule unité $\|u\| < 1$,
- $u \mapsto \exp(u)$ est continue sur $\mathcal{A}$.

Dém :

- Soit $0 < a < 1$, on pose $A = \overline{B(0,a)}$ boule fermée de rayon a de l'ensemble $\mathcal{A}$. On a vu que, sur A, $(e-u)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u^n$ (cf. théorème 5.44 page 322). On définit $f_n\ : u \in A \mapsto u^n$, f_n est continue sur A (par récurrence immédiate sur n, en utilisant la continuité du produit dans une algèbre normée).
  $\|u^n\| \leqslant \|u\|^n \leqslant a^n$ donc il y a convergence normale de la série $\sum u^n$ sur A, on en déduit la continuité de $u \mapsto (e-u)^{-1}$ sur A pour tout $a \in]0,1[$ (en application du théorème de double limite).
  Soit $u_0 \in B(0,1)$ alors il existe $r > 0$ tel que $B(u_0,r) \subset A$ pour $a \in]0,1[$: on peut prendre par exemple $r = \dfrac{1-\|u_0\|}{2}$ et $a = \dfrac{1+\|u_0\|}{2}$ alors pour tout $u \in B(u_0,r)$, $\|u\| \leqslant \underbrace{\|u-u_0\|}_{<r} + \|u_0\| < a$ i.e. $u \in A$ soit $B(u_0,r) \subset A$. Comme $f\ : u \mapsto (e-u)^{-1}$ est continue sur A alors f est continue en u_0 et ceci pour tout $u_0 \in B(0,1)$.
  Conclusion : $f\ : u \mapsto (e-u)^{-1}$ est continue sur $B(0,1)$.

- De même $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge normalement sur toute boule fermée $\overline{B(0,a)}$ de $\mathcal{A}$ ($\left\|\frac{u^n}{n!}\right\| \leqslant \frac{\|u\|^n}{n!} \leqslant \frac{a^n}{n!}$) et $g_n \ : u \mapsto \frac{u^n}{n!}$ est continue donc $e \ : u \mapsto \mathrm{e}^u$ est continue sur $\mathcal{A}$ ■

Reprenons l'exemple du b) alors on peut affirmer, par le même raisonnement, que $\left(1+\frac{u}{n}\right)^n \to \exp(u)$ quand $n \to +\infty$.

Questions :

(i) Étudier la convergence simple et uniforme (sur des ensembles à préciser) des suites de fonctions (f_n) :

$$(a)\ x\mathrm{e}^{-nx},\quad (b)\ \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2},\quad (c)\ \mathrm{e}^{-nx}\sin x,\quad (d)\ \frac{\sin nx}{1+n^2x^2}$$

(ii) Étudier la convergence normale (sur des ensembles à préciser) des séries de fonctions de terme général u_n :

$$(a)\ \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n^2},\quad (b)\ \frac{1}{n^{x+iy}},\quad (c)\ \frac{1}{n^2+\sin nx},\quad (d)\ \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$$

(iii) Que dire d'une suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$?

5.4.2 Intégration sur un segment des suites de fonctions continues

Le but de ce paragraphe est de faire le lien entre les notions de convergence uniforme, normale et l'intégration, la dérivation. On en profitera aussi pour illustrer certaine normes sur l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([a,b])$.

Théorème 5.53. **Norme de la convergence en moyenne**
Sur $E = \mathcal{C}([a,b])$ on définit $N_1(f) = \int_{[a,b]} |f|$ qui est bien entendu une norme.
En outre, on a

$$\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant N_1(f) \leqslant (b-a)\, N_\infty(f).$$

Dém :

- N_1 est une norme :
  - $N_1(f) = 0 \Rightarrow f = 0$ car $|f|$ est continue, positive.
  - $N_1(\lambda f) = \int_{[a,b]} |\lambda|.|f| = |\lambda| N_1(f)$.
  - $N_1(f+g) = \int_{[a,b]} |f+g| \leqslant \int_{[a,b]} (|f|+|g|) \leqslant N_1(f) + N_1(g)$.

- Montrons l'inégalité $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leqslant N_1(f)$: pour cela on passe par les sommes de Riemann en prenant $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ (ne pas perdre de vue que les fonctions considérées peuvent être à valeurs complexes).

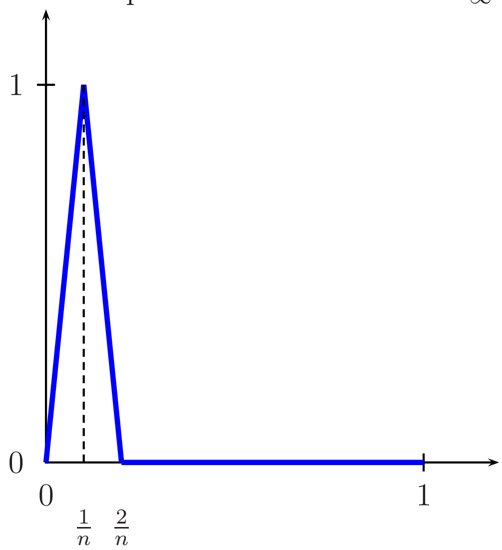
$$\underbrace{\frac{b-a}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right|}_{\to\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|} \leqslant \underbrace{\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|}_{\to\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t}$$

- L'inégalité $N_1(f) \leqslant (b-a)N_\infty(f)$ est immédiate ■

La dernière propriété permet donc de comparer les deux normes N_1 et N_∞, sachant que la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 2 - nx & \text{si } x \in]1/n, 2/n] \\ 0 & \text{si } x \in]2/n, 1] \end{cases}$$

tend vers 0 au sens de N_1 mais n'a pas de limite au sens de N_∞ (cf. dessin ci-dessous).



Théorème 5.54. La convergence uniforme de (f_n) suite de fonctions continues sur $[a,b]$ implique la convergence en moyenne et, en outre,

$$\int_{[a,b]} \lim_n f_n = \lim_n \int_{[a,b]} f_n.$$

Dém : On utilise l'inégalité $N_1(f-f_n) \leqslant (b-a)N_\infty(f-f_n)$ (cf. théorème précédent) :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b (f(t) - f_n(t))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\,\mathrm{d}t = N_1(f - f_n) \\ &\leqslant (b-a)N_\infty(f - f_n) \to 0\end{aligned}$$

donc $\displaystyle\int_{[a,b]} \lim_n f_n = \lim_n \int_{[a,b]} f_n$ ■

On a déjà vu l'exemple du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_{[a,b]} \bar{f}g$ sur $\mathcal{C}([a,b])$.

PROPOSITION 5.4.2. ***Norme de la convergence en moyenne quadratique*** *$\mathcal{C}([a,b])$ muni du produit scalaire ci-dessus est un espace préhilbertien. La norme associée $N_2(f) = \sqrt{\displaystyle\int_{[a,b]} |f|^2}$ est appelée norme de la convergence en moyenne quadratique.*
De plus, on a les inégalités

$$N_2(f) \leqslant \sqrt{b-a}\ N_\infty(f),$$
$$N_1(f) \leqslant \sqrt{b-a}\ N_2(f).$$

Dém :

- On a vu au chapitre 4 la première propriété (cf. exemple *(iii)* page 249.
- La première inégalité est immédiate :

$$N_2(f)^2 = \int_{[a,b]} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\ N_\infty(f)^2$$

  et on prend la racine carré.
- La deuxième inégalité est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$N_1(f)^2 = \left(\int_{[a,b]} 1\times f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_{[a,b]} 1\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_{[a,b]} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)$$
$$\leqslant (b-a)N_2(f)^2$$

  et, là encore, on prend la racine carrée ■

Cette dernière propriété nous permet d'affirmer que :

PROPOSITION 5.4.3. *La convergence uniforme de (f_n) sur $[a,b]$ implique la convergence en moyenne quadratique, qui implique elle-même la convergence en moyenne.*

Dém : C'est une conséquence immédiate des inégalités

$$N_1(f) \leqslant \sqrt{b-a}\, N_2(f) \leqslant (b-a)N_\infty(f) \ ■$$

Ce qui se traduit par

$$\text{C.U.} \Rightarrow \text{C.M.Q.} \Rightarrow \text{C.M.}$$

où C.M.Q. signifie convergence en moyenne quadratique et C.M. convergence en moyenne.

On verra dans le cours sur les séries de Fourier que la série de Fourier d'une fonction continue f converge en moyenne quadratique vers f et que si, en plus, f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, cette convergence est uniforme.

Théorème 5.55. Intégration terme à terme d'une série d'applications
Soit (f_n) une suite d'applications continues sur $[a,b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ la série des intégrales est convergente et

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n.$$

Dém : On applique le théorème 5.54 page 333 à la somme partielle $s_p = \sum_{n=0}^{p} f_n$. Comme la série $\sum f_n$ converge uniformément, elle converge simplement vers une fonction s qui est continue d'où

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b]} s &= \int_{[a,b]} \lim_{p\to+\infty} s_p && \text{au sens de la norme infinie}\\
&= \lim_{p\to+\infty} \int_{[a,b]} s_p && \text{théorème 5.54}\\
&= \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} \int_{[a,b]} f_n && \text{linéarité de l'intégrale}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemple : Soit $f_n(x) = (-1)^n x^n$ alors la série $\sum f_n$ converge uniformément (et même normalement) sur tout intervalle $[0,a]$ où $|a| < 1$. On a donc

$$\int_0^a \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n\right) \mathrm{d}x = \ln(1+a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^a (-1)^n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

***Remarque* 5.4.6.** *Lorsque la convergence est normale sur $[a,b]$, la série $\sum N_1(f_n)$ est convergente et*

$$N_1\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n).$$

Dém : Comme $N_1(f_n) \leqslant (b-a)\,N_\infty(f_n)$ et que $\sum N_\infty(f_n)$ converge alors, par domination, $\sum N_1(f_n)$ converge. On a alors

$$N_1\left(\sum_{n=0}^{p} f_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{p} N_1(f_n) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n)$$
$$N_1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n)$$

par passage à la limite $\blacksquare$

Questions :

(*i*) Montrer que, sur un ensemble à préciser, $\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

(*ii*) Trouver une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{C}([0,1])^{\mathbb{N}}$ telle que $N_1(f_n) \to 0$ et $N_2(f_n) = 1$.

5.4.3 Suites et séries de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 5.56. Primitivation de la limite d'une suite de fonctions
Soit $a \in I$, $(f_n) \in \mathcal{C}(I)^{\mathbb{N}}$ et, pour tout n, $h_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Si $f_n \xrightarrow[tt\ segment]{C.U.} f$ (i.e. converge uniformément sur tout segment de I vers f)

alors $h_n \xrightarrow[tt\ segment]{C.U.} h$ où $h(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dém : Soit $[\alpha, \beta] \subset I$ et $[\alpha', \beta']$ le plus petit segment contenant $[\alpha, \beta]$ et a. On note $N_\infty(g) = \sup\limits_{t\in[\alpha',\beta']} |g(x)|$. On a

$$\begin{aligned}\forall x \in [\alpha, \beta],\ |h_n(x) - h(x)| &= \left|\int_a^x (f_n(t) - f(t))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant |x-a|.N_\infty(f_n - f) \leqslant (\beta' - \alpha').N_\infty(f_n - f) \text{ d'où} \\ N_\infty(h_n - h) &\leqslant (\beta' - \alpha').N_\infty(f_n - f)\end{aligned}$$

et par conséquent sur $[\alpha, \beta]$ la suite (h_n) converge uniformément vers $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = h$.

Conclusion : on a prouvé que $h_n \xrightarrow[tt\ segment]{C.U.} h$ ■

***Remarque* 5.4.7.** *si $f \in \mathcal{C}(I)$ et si $[a, b] \subset I$ alors toute primitive h de f sur $[a, b]$ vérifie $N_\infty(h) \leqslant |h(a)| + \int_{[a,b]} |f|$.*

Dém : Grâce au théorème fondamental du calcul intégral, toute primitive h de f continue s'écrit $h(x) = h(a) + \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ d'où

$$|h(x)| \leqslant |h(a)| + \left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |h(a)| + \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

d'où on déduit la majoration

$$N_\infty(h) \leqslant |h(a)| + \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \ ■$$

Corollaire 5.57. **Primitivation d'une série de fonctions**

- Si $\sum f_n$ est une série de fonctions continues sur l'intervalle I, h_n la primitive de f_n qui s'annule en a.
- Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I,

alors la série $\sum h_n$ converge uniformément sur tout segment vers la primitive de $\sum f_n$ qui s'annule en a et on peut écrire

$$\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

i.e. on peut primitiver terme à terme.

Dém : On applique le théorème précédent aux sommes partielles de la série $\sum f_n$ (on note f la somme de la série $\sum f_n$ qui est bien définie grâce à la convergence uniforme) :

- Comme $\sum f_n \xrightarrow[tt\ segment]{C.U.} f$ alors $\sum h_n \xrightarrow[tt\ segment]{C.U.} h$ où h est la primitive de f qui s'annule en a.
- On peut intégrer terme à terme sur tout segment grâce encore à la convergence uniforme soit :
$$\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \ \blacksquare$$

Théorème 5.58. **Dérivation de la limite d'une suite de fonctions**
Soit (f_n) une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
$$\text{Si } \begin{pmatrix} f_n \xrightarrow[I]{C.S.} f \\ f'_n \xrightarrow[tt\ segment]{C.U.} h \end{pmatrix} \text{ alors } \begin{pmatrix} f_n \xrightarrow[tt\ segment]{C.U.} f \\ f \in \mathcal{C}^1(I) \\ f' = h. \end{pmatrix}$$

Dém : Soit $a \in I$, on pose $g(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x h(t)\,\mathrm{d}t$. On a $g'(x) = h(x)$ et $g(x) - f_n(x) = f(a) - f_n(a) + \displaystyle\int_a^x (h(t) - f'_n(t))\,\mathrm{d}t$. On note $N_\infty(u) = \sup_{t\in[a,b]} |u(t)|$ alors
$$\begin{aligned} N_\infty(g - f_n) &\leqslant |f(a) - f_n(a)| + \int_a^b |h(t) - f'_n(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant |f(a) - f_n(a)| + (b - a).N_\infty(h - f'_n) \end{aligned}$$
donc $\lim_{n\to+\infty} N_\infty(g-f_n) = 0$ soit $f_n \xrightarrow[[a,b]]{C.U.} g$. En particulier $f_n \xrightarrow[[a,b]]{C.S.} g$ et, par hypothèse, $f_n \xrightarrow[[a,b]]{C.S.} f$ donc, par unicité de la limite, on en déduit que $f = g$ sur $[a, b]$ et ceci pour tout segment $[a, b] \subset I$. On a alors $f = g$ sur I.
Conclusion : $f_n \xrightarrow[tt\ segment]{C.U.} f$, comme $f = g$ alors $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $f' = h$ $\blacksquare$

***Remarque* 5.4.8.** *On peut réécrire la conclusion du théorème précédent sous la forme*
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n.$$

Corollaire 5.59. **Dérivation d'une série de fonctions**
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
$$\text{Si } \begin{pmatrix} \sum f_n \text{ CS sur } I \\ \sum f'_n \text{ C.U. sur tout segment} \end{pmatrix} \text{ alors } \begin{pmatrix} \sum f_n \text{ C.U. sur tout segment} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}^1(I) \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n. \end{pmatrix}$$

Dém : Même chose, on applique le théorème précédent aux sommes partielles ■

THÉORÈME 5.60. Dérivation de l'exponentielle
Étant donné un élément a d'une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie, l'application $e_a : t \mapsto \exp ta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{D}\, e_a = a\, e_a = e_a\, a$.

Dém : On a besoin de la dérivation des fonctions vectorielles ici que l'on traitera dans le chapitre suivant. On utilisera la propriété simple suivante : si $f(t) = \alpha t^n$ où $\alpha \in \mathcal{A}$ alors f est dérivable et $f'(t) = n\alpha t^{n-1}$. Le théorème précédent s'étend lui aussi sans problème au cas des fonctions vectorielles (se ramener aux fonctions coordonnées). Une fois ceci acquis, on peut passer à la démonstration.

$\exp ta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} t^n$, on pose $f_n(t) = \frac{a^n}{n!} t^n$. Pour $n \geqslant 1$ on a $f_n'(t) = \frac{a^n}{(n-1)!} t^{n-1}$.
Soit $[-A, A] \subset \mathbb{R}$, $A > 0$ un segment de $\mathbb{R}$, on pose $N_\infty(u) = \sup_{t\in[-A,A]} \|u(t)\|$ pour u une fonction à valeurs dans $\mathcal{A}$.

$$\|f_n'(t)\| = |t|^{n-1} \left\| \frac{a^n}{n!} \right\| \leqslant A^{n-1} \frac{\|a\|^n}{(n-1)!} \text{ donc}$$

$$N_\infty(f_n') \leqslant A^{n-1} \frac{\|a\|^n}{(n-1)!}.$$

La série $\sum f_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-A, A]$ et $\sum f_n$ converge simplement par conséquent $e_a = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in \mathcal{C}^1([-A, A], \mathcal{A})$ pour tout $A > 0$ donc $e_a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ et $(e - a)'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(t)$.
Conclusion :

$$\begin{aligned}(\exp(at))' &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{(n-1)!} t^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a \frac{a^n}{n!} t^n = a \exp(at) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} t^n a = \exp(at) a.\end{aligned}$$

Et, par une récurrence simple, on prouve que $t \mapsto \exp ta$ est $\mathcal{C}^\infty$ ■

Applications :

(*i*) $t \mapsto \mathrm{e}^{tz}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $(\mathrm{e}^{tz})^{(k)} = z^k \mathrm{e}^{tz}$.

(*ii*) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, $t \mapsto \mathrm{e}^{tu}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $(\mathrm{e}^{tu})^{(k)} = u^k \mathrm{e}^{tu}$.

(*iii*) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\left(\mathrm{e}^{tA}\right)^{(k)} = A^k \mathrm{e}^{tA}$.

Cette dernière propriété sera utilisée pour les équations différentielles.

Question : Montrer que $\operatorname{Arctan} \frac{r \sin t}{1 - r \cos t} = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\sin nt}{n}$ pour $0 < r < 1$.

5.4.4 Approximation des fonctions d'une variable réelle

Dans ce paragraphe, les applications considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie.
Pour les fonctions en escalier, on reprend la même définition que celle donnée pour les fonctions à valeurs réelles.

Définition 5.4.3. ***Fonction en escalier***
$\varphi \in \mathcal{F}([a,b],F)$ est une fonction en escalier ssi$_{déf}$ il existe σ subdivision de $[a,b]$: $a < x_1 \ldots < x_n = b$ telle que φ est constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.
σ est dite subordonnée à φ.

L'ensemble des fonctions en escalier définies sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,F)$.
Tout comme sur $\mathbb{R}$, on étend la définition des fonctions en escalier sur $I = [a,b]$ au cas des fonctions en escalier sur $\mathbb{R}$ en prenant des fonctions nulles en dehors d'un segment.

Définition 5.4.4. ***Fonction continue par morceaux***
Soit $f \in \mathcal{F}([a,b],F)$, on dit que f est continue par morceaux sur $I = [a,b]$ ssi$_{déf}$ il existe une subdivision de $[a,b]$ $x_0 = a < x_1 \ldots < x_n = b$ telle que, pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction f_i de f à $]x_i, x_{i+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$

On étend la définition d'une fonction continue par morceaux au cas d'un intervalle I quelconque : sa restriction à tout segment est une fonction continue par morceaux (**mais elle n'est pas forcément nulle en dehors d'un segment**).

Théorème 5.61. **Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux par les fonctions en escalier**
Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ fonction en escalier sur $[a,b]$ telle que

$$N_\infty(f - \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

Dém : On se ramène au cas d'une fonction continue puis on utilise le théorème n ° 3 de Heine :
soit $\sigma = x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ une subdivision associée à la fonction continue par morceaux f. On note encore $f_i = f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ et $\overline{f_i}$ son prolongement continu sur $[x_i, x_{i+1}]$. $\overline{f_i}$ est continue sur un segment, elle est donc uniformément continue soit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_i > 0 \mid \forall (x,y) \in [x_i, x_{i+1}]^2,\ |x - y| \leqslant \eta_i \Rightarrow \|\overline{f_i}(x) - \overline{f_i(y)}\| \leqslant \varepsilon.$$

On prend alors une subdivision de $[x_i, x_{i+1}]$:

$$\sigma_i = x_{i_0} = x_i < x_{i,1} < \ldots < x_{i,n_i} = x_{i+1} \text{ telle que } \forall j,\ 0 < x_{i,j+1} - x_{i,j} \leqslant \eta_i$$

et on pose $\varphi(x) = \begin{cases} f_i(\frac{x_{i,j}+x_{i,j+1}}{2}) & \text{si } x \in]x_{i,j}, x_{i,j+1}[\\ f(x_{i,j}) & \text{si } x = x_{i,j} \end{cases}$.
La fonction φ est en escalier et, si $x \in]x_{i,j}, x_{i,j+1}[$

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - f(x)| &\leqslant |f_i(\tfrac{x_{i,j}+x_{i,j+1}}{2}) - f(x)| \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

car $|x - \frac{x_{i,j}+x_{i,j+1}}{2}| \leqslant \eta_i$.
Si $x = x_{i,j}$ alors $|\varphi(x) - f(x)| = 0$ donc on a bien $N_\infty(\varphi - f) \leqslant \varepsilon$ ■

THÉORÈME 5.62. **Approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions continues affines par morceaux**
Si $f \in \mathcal{C}([a,b], F)$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe ψ fonction continue affine par morceaux telle que

$$N_\infty(f - \psi) \leqslant \varepsilon.$$

Dém : Là encore, on utilise l'uniforme continuité de f sur $[a,b]$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall (x,y) \in [a,b]^2,\ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \eta$, on pose $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ pour $i \in [\![0,n]\!]$ et, pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $\psi(x) = \dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} f(x_{i+1}) + \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i)$ (c'est le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points x_i et x_{i+1}). ψ est une fonction affine par morceaux, continue sur $[a,b]$ et en remarquant que $1 = \dfrac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} + \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}$, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ on a

$$\psi(x) - f(x) = \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\left[f(x_{i+1}) - f(x)\right] + \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\left[f(x_i) - f(x)\right]$$

$$\|\psi(x) - f(x)\| \leqslant \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\underbrace{\|f(x_{i+1}) - f(x)\|}_{\leqslant \varepsilon} + \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}\underbrace{\|f(x_i) - f(x)\|}_{\leqslant \varepsilon}$$

car $|x - x_i| \leqslant \eta$ et $|x - x_{i+1}| \leqslant \eta$. On en déduit que $\|\psi(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \in [a,b]$ soit $N_\infty(\psi - f) \leqslant \varepsilon$ ■

Deux théorèmes importants que l'on nomme théorèmes de Weierstrass.

THÉORÈME 5.63. **Théorème de Weierstrass n ° 1**
Approximation polynomiale uniforme des fonctions continues sur un segment.
Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P tel que

$$N_\infty(f - P) \leqslant \varepsilon.$$

Dém : hors programme. Ce théorème est très utile en analyse, on peut le démontrer à l'aide des polynômes de Bernstein $B_n(f)(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f(\frac{k}{n})$ qui fournissent une expression de polynômes convergeant uniformément vers f sur $[0,1]$.

DÉFINITION 5.4.5. ***Polynôme trigonométrique***
On appelle polynôme trigonométrique toute fonction qui s'écrit

$$P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \mathrm{e}^{ikt}$$

***Remarque* 5.4.9.** *On peut prendre une sommation de $-m$ à n mais il est plus simple de sommer de $-n$ à n quitte à prendre des coefficients a_k nuls.*

Théorème 5.64. **Théorème de Weierstrass n ° 2**
Soit $f \in \mathcal{C}(T)$ ensemble des fonctions continues 2π-périodiques (T désigne le cercle unité sur $\mathbb{C}$ ou le tore–d'où le nom–). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que

$$N_\infty(f - P) \leqslant \varepsilon.$$

Dém : hors programme ■

Ce théorème sera très utile pour l'étude des séries de Fourier, une démonstration consiste à utiliser le noyau de Féjer

$$\frac{1}{2\pi n}\int_0^\pi [f(t-u)+f(t+u)]\frac{\sin^2(nu/2)}{\sin^2(u/2)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)\frac{\sin^2(nu/2)}{\sin^2(u/2)}\,\mathrm{d}u$$

qui fournit explicitement une écriture du polynôme P.

***Remarque* 5.4.10.** *Ces deux derniers théorèmes sont des cas particuliers d'un seul et même théorème, le théorème de Stone-Weierstrass.*