CHAPITRE 6

Fonctions vectorielles : dérivation et intégration

6.1 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

Les fonctions étudiées dans cette section sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1.1 Dérivée en un point, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Ici, on étend au cas des fonctions vectorielles les notions de dérivabilité.

DÉFINITION 6.1.1. ***Dérivée d'une fonction***

Soit $f \in \mathcal{F}(I, F)$, on dit que f est dérivable en a ssi$_{\text{déf}}$ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *existe (limite notée $f'(a)$ ou $\mathrm{D}\, f(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$).*

***Remarque* 6.1.1.** *En cinématique, la dérivée d'un point correspond au vecteur vitesse.*

Notation : On notera les dérivées à gauche et à droite : $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$.

DÉFINITION 6.1.2. ***Dérivée sur un intervalle***

On note $\mathcal{D}(I, F)$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I, f', $\mathrm{D}\, f$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ la fonction dérivée et $\mathcal{C}^1(I, F)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I i.e. dérivable et à dérivée continue.

THÉORÈME 6.1. $\mathcal{C}^1(I, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, F)$ et $\mathrm{D} : f \mapsto \mathrm{D}\, f$ est une application linéaire.

Dém : C'est immédiat en utilisant la linéarité de la limite :

- 0 l'application nulle est bien dans $\mathcal{C}^1(I, F)$ donc cet ensemble est non vide.
- Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on pose $h = \lambda f + \mu g$. Alors
$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \mu \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$
admet une limite quand $x \to a$ pour tout $a \in I$. On en déduit trois choses :

- h dérivable,
- $\mathrm{D}\,h = \lambda\,\mathrm{D}\,f + \mu\,\mathrm{D}\,g$,
- $\mathrm{D}\,h$ est continue.

D est donc une application linéaire de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ ■

Proposition 6.1.1. ***Propriétés de la dérivation***
Soient $f \in \mathcal{D}(I,F)$ et $g \in \mathcal{D}(I,G)$ où F et G sont deux espaces vectoriels de dimension finie.

- *Si $u \in \mathcal{L}(F,G)$ alors $u(f) \in \mathcal{D}(I,G)$ et $\mathrm{D}(u(f)) = u(\mathrm{D}\,f)$.*
- *Si B est une application bilinéaire de $F\times G$ dans H où H est un espace vectoriel de dimension finie alors $B(f,g) \in \mathcal{D}(I,H)$ et*
$$\mathrm{D}(B(f,g)) = B(\mathrm{D}\,f,g) + B(f,\mathrm{D}\,g).$$

Dém : On revient à la définition de la dérivée.

- Soit $u \in \mathcal{L}(F,G)$, comme on est en dimension finie, u est continue et, par linéarité,
$$\frac{u(f(x)) - u(f(a))}{x-a} = u\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) \to u(\mathrm{D}\,f(a))$$
par passage à la limite et continuité de u. On en déduit que $u(f)$ est dérivable en a pour tout $a \in I$ donc $u(f) \in \mathcal{D}(I,G)$ et que $\mathrm{D}(u(f)) = u(\mathrm{D}\,f)$.
- Soit $\Delta(x) = \dfrac{B(f(x),g(x)) - B(f(a),g(a))}{x-a}$ alors, en écrivant que $f(x) = (f(x)-f(a)) + f(a)$ et par linéarité,
$$\Delta(x) = B\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}, g(x)\right) + B\left(f(a), \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right).$$
$B\left(f(a), \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}\right)$ admet une limite quand $x \to a$ car en dimension finie, toutes les applications bilinéaires sont continues et cette limite vaut $B(f(a),\mathrm{D}\,g(a))$.
De même, $B\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, g(x)\right)$ tend vers $B(\mathrm{D}\,f(a),g(a))$.
$B(f,g)$ est donc dérivable pour tout $a \in I$. $B(f,g) \in \mathcal{D}(I,H)$ et
$$\mathrm{D}(B(f,g)) = B(\mathrm{D}\,f,g) + B(f,\mathrm{D}\,g)\ ■$$

Application : Si F est un espace préhilbertien de dimension finie alors la dernière propriété nous permet de dériver le produit scalaire $\mathrm{D}(f|g) = (\mathrm{D}\,f|g) + (f|\,\mathrm{D}\,g)$, le carré de la norme. Enfin, lorsque e est un vecteur unitaire alors $e \perp \mathrm{D}\,e$.
On peut aussi étendre ces propriétés au cas où F n'est plus de dimension finie grâce à la continuité du produit scalaire.

PROPOSITION 6.1.2. *Si* $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ *est une base de* F, *on écrit* $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$ *alors*

- *Si* f *est dérivable alors, pour toute base* (e_i), *les* f_i *sont dérivables.*
- *S'il existe une base* (e_i) *telle que les* f_i *soient dérivables alors* f *est dérivable.*

et, on a $\mathrm{D}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}\, f_i e_i$.

Dém : On utilise la propriété sur les fonctions vectorielles (cf. théorème 5.28 page 300) qui dit que si $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$ alors
si f est continue alors, pour toute base (e_i), les f_i sont continues,
s'il existe une base (e_i) telle que les f_i soient continues alors f est continue,
appliqué à l'existence de limite en remplaçant $f(x)$ par $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ■

***Remarque* 6.1.2.** *Si* f *est à valeurs complexes alors* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *ssi* $\bar{f}$ *l'est ssi* $\mathrm{Re}(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$ *le sont et on a*

$$\mathrm{D}(\bar{f}) = \overline{\mathrm{D}\, f}, \quad \mathrm{D}\, f = \mathrm{D}(\mathrm{Re}(f)) + i\, \mathrm{D}(\mathrm{Im}(f)).$$

THÉORÈME 6.2. Soient f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, f à valeurs dans F e.v.n., g à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\forall t \in [a, b]$, $\|f'(t)\| \leqslant g'(t)$ alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a).$$

Dém : On montre d'abord que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall t \in [a, b],\ \|f(t) - f(a)\| \leqslant \varepsilon(t - a) + g(t) - g(a) \tag{1}$$

Soit I_ε l'ensemble des $t \in [a, b]$ tels que (1) soit vérifié pour $u \leqslant t$.

- $I_\varepsilon \neq \emptyset$: $a \in I_\varepsilon$ est immédiat.
- I_ε est un intervalle : si $t_1 < t_2$ sont deux éléments de I_ε alors t_1 vérifie (1) et, si $u \in [t_1, t_2]$, (1) est aussi vérifié donc $[t_1, t_2] \subset I_\varepsilon$.
- Montrons que I_ε est fermé : soit $(t_n) \in I_\varepsilon^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $t \in [a, b]$, on a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|f(t_n) - f(a)\| \leqslant \varepsilon(t_n - a) + g(t_n) - g(a)$$
donc, à la limite, comme f et g sont continues,
$$\|f(t) - f(a)\| \leqslant \varepsilon(t - a) + g(t) - g(a)$$
Puis, si $u < t$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u \leqslant t_n$ donc (1) est vérifié aussi pour u et en conséquence, $t \in I_\varepsilon$.
- Montrons que son plus grand élément est b par l'absurde :
si $c = \sup I_\varepsilon < b$ alors on peut trouver $t > c$ tel que

(*i*) $\|f(u)-f(c)-f'(c)(u-c)\| \leqslant \varepsilon(u-c)/2$ pour $c \leqslant u \leqslant t$. En effet f est dérivable en c donc $f(u)-f(c)-f'(c)(u-c)+o(u-c)$ soit

$$\|f(u)-f(c)-f'(c)(u-c)\| = (u-c)\theta(u) \text{ où } \theta(u) \to 0 \text{ quand } u \to c.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\|f(u)-f(c)\| &\leqslant \underbrace{\|f(u)-f(c)-f'(c)(u-c)\|}_{\leqslant \varepsilon(u-c)/2} + \|f'(c)\|(u-c)\\ &\leqslant \varepsilon\frac{u-c}{2} + \|f'(c)\|(u-c).\end{aligned}$$

(*ii*) $|g(u)-g(c)-g'(c)(u-c)| \leqslant \varepsilon(u-c)/2$ pour $c \leqslant u \leqslant t$ (même chose avec la dérivabilité de g). Là aussi, on peut en déduire que (g est croissante donc $g(u)-g(c) \geqslant 0$)

$$\begin{aligned}|g'(c)(u-c)| &= |g'(c)(u-c)-[g(u)-g(c)]+g(u)-g(c)|\\ &\leqslant \underbrace{|g'(c)(u-c)-[g(u)-g(c)]|}_{\leqslant \varepsilon(u-c)/2} + g(u)-g(c)\\ &\leqslant g(u)-g(c)+\varepsilon\frac{u-c}{2}.\end{aligned}$$

d'où, comme $\|f(c)-f(a)\| \leqslant \varepsilon(c-a)+g(c)-g(a)$ ($c \in I_\varepsilon$),

$$\begin{aligned}\|f(u)-f(a)\| &\leqslant \|f(u)-f(c)\| + \|f(c)-f(a)\|\\ &\leqslant \varepsilon\frac{u-c}{2} + \|f'(c)\|(u-c) + \varepsilon(c-a) + g(c) - g(a)\\ &\leqslant \varepsilon\frac{u-c}{2} + g'(c)(u-c) + \varepsilon(c-a) + g(c) - g(a)\\ &\leqslant \varepsilon\frac{u-c}{2} + g(u)-g(c) + \varepsilon\frac{u-c}{2} + \varepsilon(c-a) + g(c) - g(a)\\ &\leqslant g(u)-g(a)+\varepsilon(u-c)+\varepsilon(c-a) = g(u)-g(a)+\varepsilon(u-a)\end{aligned}$$

donc $t \in I_\varepsilon$ et $t > c$, on arrive à une contradiction.

Là, je pense que les rédacteurs du programme actuel n'ont pas voulu imposer une telle démonstration, aussi, je conseille vivement de voir l'inégalité de la question page 416 : dans ce cas, la démonstration se simplifie terriblement :

$$\begin{aligned}\|f(b)-f(a)\| = \left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| &\leqslant \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_a^b g'(t)\,\mathrm{d}t = g(b)-g(a) \ \blacksquare\end{aligned}$$

Théorème 6.3. **Inégalité des accroissements finis**
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ alors on a

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant (b-a)\sup_{t\in[a,b]} \|f'(t)\|$$

Dém : $u \mapsto \|f'(u)\|$ est continue sur $[a,b]$ donc bornée et on applique le théorème précédent à f et g définie par $g(t) = (t-a)\sup_{u\in[a,b]}\|f'(u)\|$ $\blacksquare$

PROPOSITION 6.1.3. ***Caractérisation des fonctions constantes***
Si $f \in \mathcal{C}(I, F) \cap \mathcal{C}^1(\mathring{I}, F)$ *alors* f *est constante ssi* $f' = 0$ *sur* $\mathring{I}$.

Dém : L'implication directe ne pose pas de problème.
Pour la réciproque, on utilise l'inégalité des accroissements finis :
soit $a \in I$ alors, pour tout $b \in I$, $b > a$ on a $\sup_{t \in [a,b]} \|f'(t)\| = 0$ d'où $f(b) = f(a)$. Si $b < a$ c'est la même chose donc $f(b) = f(a)$ pour tout $b \in I$ i.e. f est constante ■

Questions :

(i) Soient $A(t)$ et $B(t)$ deux fonctions matricielles d'ordre n, dérivables, calculer $[A(t)B(t)]'$.

(ii) De même, calculer $[A^p(t)]'$.

6.1.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

DÉFINITION 6.1.3. ***Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$***
On dit que $f \in \mathcal{F}(I, F)$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *sur* I *ssi*$_{déf}$ f *est* k *fois dérivable et* $f^{(k)}$ *est continue. L'ensemble des fonctions de classe* $\mathcal{C}^k$ *est noté* $\mathcal{C}^k(I, F)$ *et on définit*

$$\mathcal{C}^\infty(I, F) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \mathcal{C}^k(I, F).$$

On note aussi $\mathrm{D}^k f$ *ou* $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$ *la dérivée* $k^{\text{ième}}$ *de* f.

PROPOSITION 6.1.4.
Si $0 \leqslant k \leqslant +\infty$, $\mathcal{C}^k(I, F)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}(I, F)$ *et si* $F = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *on a même une sous-algèbre.*

Dém : C'est la même démonstration que pour le théorème 6.1 page 343. Le cas où $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ utilise les propriétés de la dérivation du produit ■
On peut généraliser la formule de Leibniz de la manière suivante.

THÉORÈME 6.4. **Formule de Leibniz**
Si $f \in \mathcal{C}^k(I, F)$ et $g \in \mathcal{C}^k(I, G)$ et B une application bilinéaire de $F \times G$ dans H (où F, G, H sont trois espaces vectoriels de dimension finie) alors

$$\mathrm{D}^k[B(f, g)] = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} B(\mathrm{D}^p f, D^{k-p} g).$$

Dém : Par récurrence sur k avec l'aide de la formule du triangle de Pascal :

- $k = 1$: cf. proposition 6.1.1 : $\mathrm{D}(B(f, g)) = B(\mathrm{D} f, g) + B(f, \mathrm{D} g)$.

- On suppose la propriété vraie à l'ordre k.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{D}^{k+1}[B(f,g)] = \mathrm{D}[\mathrm{D}^k(B(f,g))] &= \mathrm{D}\left[\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}B(\mathrm{D}^p f, D^{k-p}g)\right] \\
&= \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}\mathrm{D}[B(\mathrm{D}^p f, D^{k-p}g)] \\
&= \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}B(\mathrm{D}^{p+1} f, D^{k-p}g) + \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}B(\mathrm{D}^p f, D^{k+1-p}g)
\end{aligned}
$$

et en décalant l'indice de la première somme : $p \to p-1$

$$
\begin{aligned}
&= B(\mathrm{D}^{k+1} f, g) + \sum_{p=1}^{k}\Bigg[\underbrace{\binom{k}{p-1}+\binom{k}{p}}_{=\binom{k+1}{p}}\Bigg]B(\mathrm{D}^p f, \mathrm{D}^{k+1-p}\, g) + B(f, D^{k+1}g) \\
&= \sum_{p=0}^{k+1}\binom{k+1}{p}B(\mathrm{D}^p f, D^{k+1-p}g)
\end{aligned}
$$

ce qui achève la récurrence ∎

Théorème 6.5. Dérivation des applications composées
Si $f \in \mathcal{C}^k(I,F)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^k(J,\mathbb{R})$ où $\varphi(J) \subset I$ alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^k(J,F)$.

Dém : On fait une récurrence finie sur $p \leqslant k$ (en supposant $k \geqslant 1$) :

- Si $p = 1$, c'est le théorème de dérivation composé.
- On suppose donc la propriété vraie pour $p < k$. $(f\circ\varphi)' = f'\circ\varphi.\varphi'$, or $f'\circ\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^p$ d'après l'hypothèse de récurrence donc $(f\circ\varphi)'$ est de classe $\mathcal{C}^p$. Finalement $f\circ\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ ∎

Définition 6.1.4. *$\mathcal{C}^k$-difféomorphisme*
On dit que $\varphi \in \mathcal{C}(J,\mathbb{R})$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J sur I ($k \geqslant 1$ et $I = \varphi(J)$) ssi$_{\text{déf}}$ φ est bijective, φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^k$.

Théorème 6.6. Caractérisation des difféomorphismes
Soit $\varphi \in \mathcal{C}^k(J,\mathbb{R})$ ($k \geqslant 1$), φ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J sur $I = \varphi(J)$ ssi, pour tout élément t de J, $\varphi'(t) \neq 0$.

Dém :

- Comme φ est dérivable, on peut dériver la relation

$$\forall t \in J,\ \varphi^{-1}(\varphi(t)) = t$$

donc $\forall t \in J$, $\varphi'(t){\varphi^{-1}}'(\varphi(t)) = 1$ par conséquent φ' ne s'annule pas sur J.

- Si φ' ne s'annule pas alors φ' garde un signe constant car φ' est continue sur l'intervalle J. φ est strictement monotone donc injective. φ est une bijection de J sur $I = \varphi(J)$. On note $\psi = \varphi^{-1}$, montrons que ψ est dérivable :
  soit $u_0 = \varphi(t_0)$, $u = \varphi(t)$ alors $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \to \varphi'(t_0) \neq 0$ et $\varphi(t) \neq \varphi(t_0)$ donc ce rapport ne s'annule jamais. On peut alors écrire
  $$\begin{aligned} \frac{t - t_0}{u - u_0} &= \frac{t - t_0}{\varphi(t) - \varphi(t_0)} \\ &= \frac{\psi(u) - \psi(u_0)}{u - u_0} \to \frac{1}{\varphi'(t_0)} \end{aligned}$$
  donc ψ est dérivable en u_0 pour tout $u_0 \in I$.
  On a donc $\psi'(u) = \dfrac{1}{\varphi'(\psi(u))}$ et on procède par récurrence finie sur $p \leqslant k$ en utilisant le théorème de dérivation des applications composées ci-dessus ■

Question :
Si $A(t)$ et $B(t)$ sont des fonctions matricielles d'ordre n, de classe $\mathcal{C}^k$, calculer $[A(t)B(t)]^{(k)}$.

6.2 Intégration sur un intervalle quelconque

Dans ce chapitre, toutes les fonctions sont continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes.

6.2.1 Fonction intégrable à valeurs positives

DÉFINITION 6.2.1. ***Fonction sommable,intégrale d'une fonction sommable***
Soit f continue par morceaux, positive, on dit que f est sommable sur I ssi$_{\text{déf}}$ il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout segment J contenu dans I, $\int_J f \leqslant M$.
On note alors $\int_I f = \sup_J \int_J f$ et $\mathrm{L}^1(I)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur I.

***Remarque* 6.2.1.** *Si par hasard I était un segment, on retrouve avec cette définition l'intégrale que l'on a vue en première année.*

Dém : Soit $I = [a, b]$, on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ l'intégrale vue en première année.

- Si $J = [\alpha, \beta] \subset I$ alors, comme f est positive, $\int_\alpha^\beta f \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ donc, en passant à la borne supérieure, $\int_I f \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Comme I est un segment contenu dans I (...) alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I f$.

En combinant les deux inégalités, on obtient $\int_I f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ■

Théorème 6.7. Critère de sommabilité

- Soit J_n une suite croissante de segments dont la réunion est égale à I et telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\int_{J_n} f \leqslant M$, alors f est sommable sur I.
- Si f est sommable alors pour toute suite croissante (J_n), la suite $\int_{J_n} f$ est bornée.

Dans ces conditions $\int_I f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{J_n} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$.

Dém :

- Soit $J = [a,b] \subset I$ alors, comme $a \in I = \bigcup J_n$, il existe $n_a \in \mathbb{N}$ tq $a \in J_{n_a}$. De même il existe n_b tel que $b \in J_{n_b}$.
  On pose $n = \max(n_a, n_b)$ donc $J \subset J_n$ et
  $$\int_J f \leqslant \int_{J_n} f \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{J_n} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f.$$
  f est par conséquent intégrable sur I.
- Réciproque : J_n est un segment contenu dans I donc $\int_{J_n} f \leqslant \sup_{J\subset I} \int_J f$. La suite $u_n = \int_{J_n} f$ est une suite croissante majorée elle converge et sa limite vérifie $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{J_n} f \leqslant \int_I f$ et ceci pour toute suite croissante (J_n).

En combinant les inégalités obtenues on conclut $\int_I f = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$ ■

Proposition 6.2.1. *Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$. En outre f est intégrable sur $]a,b]$, $[a,b[$ et $]a,b[$ et on a*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{]a,b]} f = \int_{[a,b[} f = \int_{]a,b[} f = \int_{[a,b[} f.$$

Dém :

- Montrons par exemple que $f \in \mathrm{L}^1([a,b[)$ avec égalité des intégrales. Soit $J \subset [a,b[$ alors $\int_J f \leqslant \int_{[a,b]} f$ donc $f \in \mathrm{L}^1([a,b[)$.
- Soit maintenant (b_n) une suite strictement croissante, de limite b alors
  $$\left|\int_{[a,b]} f - \int_{[a,b_n]} f\right| = \left|\int_{[b_n,b]} f\right| \leqslant (b-b_n)\|f\|_\infty$$
  donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[a,b_n]} f = \int_{[a,b]} f$ d'où l'égalité $\int_{[a,b[} f = \int_{[a,b]} f$ ■

On a alors les propriétés suivantes :

Proposition 6.2.2. ***"Pseudo-linéarité"***

(i) *Si f et g sont sommables sur I alors $f+g$ l'est aussi et $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.*

(ii) *Si f est sommable et si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ alors λf est sommable et $\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.*

Dém : On considère ici (J_n) une suite croissante de segments de réunion I.

(i) Par propriété des intégrales, on a

$$\int_{J_n}(f+g)=\int_{J_n} f+\int_{J_n} g \leqslant \int_I f+\int_I g$$

donc $f+g$ est intégrable et, en passant à la limite dans l'égalité ci-dessus, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty}(f+g)=\int_I (f+g)=\lim_{n\to+\infty}\int_{J_n} f+\lim_{n\to+\infty}\int_{J_n} g=\int_I f+\int_I g.$$

(ii) C'est la même démonstration pour λf (avec $\lambda \geqslant 0$) ■

Théorème 6.8. Théorème de comparaison, croissance
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux, positives sur I telles que $f \leqslant g$, si g est sommable alors f est sommable et on a $\displaystyle\int_I f \leqslant \int_I g$.
L'application qui à une fonction sommable fait correspondre son intégrale est croissante.

Dém : Pour tout segment $J \subset I$ on a $\int_J f \leqslant \int_J g \leqslant \int_I g$ donc $f \in \mathrm{L}^1(I)$ et $\int_I f = \displaystyle\sup_{J\subset I}\int_J f \leqslant \int_I g$ ■

On a ensuite une caractérisation très intéressante de la sommabilité d'une fonction à l'aide d'une limite :

Théorème 6.9. Sommabilité et intégrabilité
Soit f continue par morceaux sur $I=[a,b[$ (et, on le rappelle, à valeurs positives) où $b\in\overline{\mathbb{R}}$. On a alors

$$f \text{ sommable sur } I \text{ ssi } \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ admet une limite finie quand } x\to b$$

et, dans ce cas, $\displaystyle\int_I f=\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dém :

- Si f est sommable sur I alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{[a,x]} f \leqslant \int_I f$ donc la fonction $F\ :x\mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction croissante et majorée, elle admet une limite quand $x\to b^-$ et on a $\displaystyle\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I f$.
- Supposons que F admet une limite finie l quand $x\to b$.
  Soit (b_n) une suite strictement croissante de limite b avec $b_0=a$. On pose $J_n=[a,b_n]$.
  Comme F est croissante, $F(b_n)=\displaystyle\int_{J_n} f \leqslant l$. En application du théorème 6.7, on en déduit que f est sommable et $\displaystyle\int_I f=\lim_{n\to+\infty}\int_{J_n} f \leqslant \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

L'égalité est alors immédiate ■

***Remarque* 6.2.2.**

(*i*) *On obtient bien sûr le même résultat avec* $I =]a, b]$ *et on peut étendre ce résultat au cas des intervalles* $]a, b[$.

(*ii*) *Si* f *est intégrable sur* $[a, b[$, *on dit que* $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

(*iii*) *Si* $b = +\infty$ *et si* f *intégrable sur* I *a une limite en* $+\infty$ *alors cette limite est nulle.*
Dém : Soit $l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et supposons, par l'absurde, que* $l \neq 0$ *(donc* $l > 0$*).*
Il existe x_0 *tel que* $x \geqslant x_0 \Rightarrow f(x) \geqslant \dfrac{l}{2}$. *On a alors*

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t + (x - x_0)\frac{l}{2} \quad \to +\infty$$

donc f *n'est pas intégrable* ■
Attention, ici il n'y a pas de réciproque, i.e. si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *alors* f *n'est pas forcément intégrable !*

Théorème 6.10. **Intégrabilité des fonctions** $t \mapsto t^{\alpha}$
Sur $I = [a, +\infty[$ $(a > 0)$, $f(t) = \dfrac{1}{t^{\alpha}}$ est intégrable ssi $\alpha > 1$.
Sur $I =]0, a]$, $f(t) = \dfrac{1}{t^{\alpha}}$ est intégrable ssi $\alpha < 1$.

Dém : Immédiat, on intégre les fonctions : si $\alpha \neq 1$

$$\int_a^x \frac{1}{t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{-\alpha+1}\right]_a^x = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right].$$

- Si $I = [a, +\infty[$ alors $\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ n'a de limite en $+\infty$ que si $\alpha > 1$.
- Si $I =]0, a]$ alors $\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ n'a de limite en 0 que si $\alpha < 1$.

Et on remarque que dans tous les cas, $f(t) = \dfrac{1}{t}$ n'est pas intégrable ■

Un dernier théorème très utile :

Théorème 6.11. **Théorème des équivalents**
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux positives sur $I = [a, b[$. Si, au voisinage de b, on a $f \sim g$ et g intégrable sur $[a, b[$ alors f est intégrable.

Dém : Il existe $A \in I$ tel que, pour $x \geqslant A$, $f(x) \leqslant 2g(x)$ donc f est intégrable par théorème de comparaison ■

- Régle pratique d'intégrabilité sur $[a, b[$.

(*i*) Si $f \underset{b}{\sim} \dfrac{A}{v^\alpha}$ où $v = t$ si $b = \pm\infty$, $v = |t-b|$ ailleurs, on peut conclure.
Cf. théorème 6.10.

(*ii*) Si $f \underset{b}{\sim} g$ et on connaît une primitive de g.
On peut savoir alors si g est intégrable ou non et on utilise le théorème précédent.

(*iii*) Si $f \leqslant g$ et g intégrable ou $f \geqslant g$ et g non intégrable.
On utilise le théorème de comparaison.

(*iv*) Pour montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge, on cherche $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$.
On aura alors $f(x) = o\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ (en fait, il suffit d'avoir $f(x) = O\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$ pour conclure).

Si l'on veut montrer que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ ne converge pas, alors on essaie de prouver (par exemple) que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = +\infty$.
$f \gg \dfrac{1}{x}$ donc f n'est pas intégrable.

(*v*) On peut adapter le (*iv*) au cas où b est fini.

Questions :

(*i*) Étudier la convergence des intégrales suivantes

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\ln x)^4} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+\frac{1}{x})\ln\frac{1}{x}} \quad \int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\ln x}$$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-1/x} x^\alpha\,\mathrm{d}x \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^3-1|}} \quad \int_0^{+\infty} P(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x,\ P \in \mathbb{R}[X]$$

(*ii*) Trouver un exemple de fonction f non intégrable sur $[a, +\infty[$ de limite nulle en $+\infty$.

(*iii*) Montrer que si f est décroissante et si f est intégrable sur $[0, +\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. Trouver un exemple de fonction f décroissante non intégrable sur $[0, +\infty[$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

6.2.2 Fonctions intégrables à valeurs complexes

Définition 6.2.2. ***Fonctions à valeurs complexes sommables***
Soit f continue par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dit que f est sommable sur I ssi$_{\text{déf}}$ $|f|$ est sommable. On note $\mathrm{L}^1(I)$ l'ensemble des fonctions sommables sur I à valeurs réelles ou complexes (ou $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{R})$, $\mathrm{L}^1(I,\mathbb{C})$ si nécessaire).

***Remarque* 6.2.3.** *Si f est à valeurs positives, la définition ci-dessus s'applique sans problème.*

THÉORÈME 6.12. **Théorème de domination**
Si f et g sont continues par morceaux, si $|f| \leqslant g$ et si g est sommable alors f est sommable.

Dém : Immédiat par le théorème de comparaison (théorème 6.8 page 351) ■

PROPOSITION 6.2.3. ***Espace vectoriel des fonctions sommables***
L'ensemble $\mathrm{L}^1(I)$ des fonctions continues par morceaux sommables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}(I)$.

Dém :

- $0 \in \mathrm{L}^1(I)$ donc $\mathrm{L}^1(I)$ n'est pas vide.
- Soient f et g dans $\mathrm{L}^1(I)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a $|\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda|.|f| + |\mu|.|g|$. En utilisant la pseudo-linéarité (cf. proposition 6.2.2 page 350) on sait que $|\lambda|.|f| + |\mu|.|g| \in \mathrm{L}^1(I)$ donc, grâce au théorème précédent, $\lambda f + \mu g \in \mathrm{L}^1(I)$ ■

THÉORÈME 6.13. **Fonctions sommables de signe quelconque**
Si f est continue par morceaux à valeurs réelles alors f est sommable ssi f^+ et f^- le sont. Dans ce cas, on pose $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$.

Dém : On utilise l'égalité $|f| = f^+ + f^-$ et les majorations $f^+ \leqslant |f|$, $f^- \leqslant |f|$:

- Si f est sommable alors $f^+ \leqslant |f|$ donc, par le théorème de comparaison, f^+ est sommable, il en est de même pour f^-.
- Si f^+ et f^- sont sommables alors, par pseudo-linéarité, $|f| = f^+ + f^-$ est sommable, il en est de même pour f ■

THÉORÈME 6.14. **Fonctions sommables complexes**
Si f est continue par morceaux à valeurs complexes alors f est sommable ssi $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont. Dans ce cas, on pose $\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + i \int_I \operatorname{Im} f$.

Dém : On utilise les inégalités $|\operatorname{Re} f| \leqslant |f|$, $|\operatorname{Im} f| \leqslant |f|$ et $|f| \leqslant |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$ si f est complexe pour avoir les équivalences :

- Si f est sommable alors $|\operatorname{Re}(f)| \leqslant |f|$ donc, par le théorème de comparaison, $\operatorname{Re}(f)$ est sommable, il en est de même pour $\operatorname{Im}(f)$.
- Si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont sommables alors, toujours par pseudo-linéarité, $|f| \leqslant \operatorname{Re}(f) + \operatorname{Im}(f)$ est sommable, il en est de même pour f ■

On retrouve les propriétés que l'on a vues dans le cas des fonctions positives.

THÉORÈME 6.15. **Critère de sommabilité**
Soit J_n une suite croissante de segments dont la réunion est égale à I et telle que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\int_{J_n} |f| \leqslant M$, alors f est sommable sur I (réciproque immédiate). Dans ces conditions $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_{J_n} f$ existe et est indépendante de (J_n) et

$$\int_I f = \lim_{n \to +\infty} \int_{J_n} f.$$

Dém :

- On sait que $|f|$ est intégrable (cf. théorème 6.7 page 350). Toujours avec ce même théorème, si $f \geqslant 0$, $\int_I f = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f$ et cette limite est indépendante de la suite (J_n).
- Si f est de signe quelconque alors on écrit $f = f^+ - f^-$. On sait que f^+ et f^- sont intégrables (avant dernier théorème) et positives donc

$$\int_{J_n}^{f} = \int_{J_n} f^+ - \int_{J_n} f^- \to \int_I f^+ - \int_I f^-$$

  et cette limite est indépendante de (J_n).
- On procède de même avec $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$ ■

Proposition 6.2.4. *Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$. En outre f est intégrable sur $]a,b]$, $[a,b[$ et $]a,b[$ et on a*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{]a,b]} f = \int_{[a,b[} f = \int_{]a,b[} f = \int_{[a,b[} f.$$

Dém : On utilise la proposition 6.2.1 et on l'applique aux fonctions f^+, f^- si f est à valeurs réelles, puis à $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ si f est complexe ■

Proposition 6.2.5. *Si f est sommable sur $I = [a,b[$ alors, dans tous les cas, on a*

$$\int_{[a,b[} f = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

mais on n'a pas de réciproque.

Dém : On utilise le théorème 6.9 page 351 en écrivant directement

$$f = \mathrm{Re}(f)^+ - \mathrm{Re}(f)^- + i[\mathrm{Im}(f)^+ - \mathrm{Im}(f)^-].$$

Pour s'assurer que l'on n'a pas de réciproque, voir la question (i) à la fin de cette section ■
Grâce à la dernière remarque, on peut prouver les résultats suivants :

Proposition 6.2.6. ***Linéarité***
L'application qui à $f \in \mathrm{L}^1(I)$ fait correspondre $\displaystyle\int_I f$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire. On a donc

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g.$$

Dém : Soit (J_n) une suite croissante de segments de réunion I alors

$$\int_{J_n} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{J_n} f + \mu \int_{J_n} g$$

en utilisant les propriétés des intégrales sur un segment. Il suffit alors de passer à la limite quand $n \to +\infty$ ■

Un théorème qui généralise le théorème 5.53 page 332 :

Théorème 6.16. Majoration du module d'une intégrale
Si $f \in \mathrm{L}^1(I)$ alors

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|.$$

Dém : Là encore soit (J_n) une suite croissante de segments de réunion I alors $\left|\int_{J_n} f\right| \leqslant \int_{J_n} |f|$ et on passe à la limite ■

Proposition 6.2.7. *Si I' est un intervalle contenu dans I et si f est sommable sur I alors f est sommable sur I' et $\displaystyle\int_{I'} f = \int_I 1_{I'} f$ où $1_{I'}$ est la fonction caractéristique de I'.*

Dém :

- Si J' est un segment contenu dans I' alors J' est aussi un segment contenu dans I. On a alors $\int_{J'} |f| \leqslant \int_I |f|$ donc f est intégrable sur I'.
- Si $I' = (c,d)$ (on met des parenthèses pour remplacer les délimiteurs [et]) et si $c \in I$ alors $\int_{(c,d)} f = \int_{[c,d)} f$ (cf. proposition 6.2.4) et on remplace I' par $[c,d)$. On procède de même avec d.
  On se ramène ainsi à l'un des cas suivants :
  - I' est un segment (c et d sont dans I),
  - $I' =]c,d]$ ou $I' = [c,d[$ et c ou d est une borne de I,
  - $I' = I$.

  Grâce à cette remarque, si $J \subset I$ est un segment de I alors $J \cap I'$ est un segment de I' : on reprend les trois cas ci-dessus :
  - si I' est un segment alors $J \cap I'$ est aussi un segment (que l'on suppose non vide),
  - si $I' =]c,d]$, $J = [\alpha,\beta]$ alors $\alpha > c$ et $I' \cap J = [\alpha, \min(d,\beta)]$, idem avec $I' = [c,d[$,
  - et si $I' = I$ alors il n'y a rien à ajouter.
- Soit (J_n) une suite croissante de segment de réunion I alors, en posant $J'_n = J_n \cap I'$ ($J'_n \neq \emptyset$ pour n assez grand car si $x \in I'$, on sait qu'il existe n_x tel que $x \in J_{n_x}$).
  (J'_n) est une suite croissante de segments de réunion I' et on a

$$\int_{J'_n} f = \int_{J_n} 1_{J'_n} f = \int_I 1_{J_n \cap I'} f = \int_{J_n} 1_{I'} f$$

  car $1_{I' \cap J_n} = 1_{I'} 1_{J_n}$ et on prend la limite quand $n \to +\infty$ ■

On peut déduire de la propriété précédente que l'on a additivité par rapport à l'intervalle d'intégration.

THÉORÈME 6.17. Théorème de partition
Si $I = I' \cup I''$ avec $I' \cap I'' = \{c\}$ et si $f \in \mathrm{L}^1(I)$ alors $f_{I'} \in \mathrm{L}^1(I')$, $f_{I''} \in \mathrm{L}^1(I'')$ et

$$\int_I f = \int_{I'} f + \int_{I''} f.$$

Dém : Si f est sommable sur I, alors vu la proposition précédente, f est sommable sur I' et sur I''.
Sur I, on a $1_{I'} + 1_{I''} = 1 + 1_{\{c\}}$. On multiplie par f et on intègre :

$$\int_I f = \int_I (1_I + 1_{\{c\}}) f$$

car le fait de changer la valeur en c ne change pas l'intégrale

$$= \int_I 1_{I'} f + \int_I 1_{I''} f = \int_{I'} f + \int_{I''} f \blacksquare$$

DÉFINITION 6.2.3. ***Intégrale algébrique généralisée***

Soit $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, $f \in \mathrm{L}^1(]a,b[)$, *on pose* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{]a,b[} f & \text{si } a < b \\ -\int_{]b,a[} f & \text{si } b < a \end{cases}$

PROPOSITION 6.2.8. ***Chasles revisité***
Si a, b *et* c *sont 3 éléments de* $\overline{I}$ *et si* $f \in \mathrm{L}^1(I)$ *alors* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Dém : On distingue les cas selon les positions respectives de a, b, c et on utilise le théorème de partition. Supposons dans un premier temps que $a \leqslant b$.

- $a \leqslant b \leqslant c$: $\int_{[a,c]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f$ d'où $\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- $a \leqslant c \leqslant b$: $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$ d'où $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- $c \leqslant a \leqslant b$: $\int_{[c,b]} f = \int_{[c,a]} f + \int_{[a,b]} f$ d'où $\int_a^b f = \int_c^b f - \int_c^a f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Les trois autres cas se traitent en remplaçant f par $-f$ et en utilisant la propriété $\int_a^b (-f) = \int_b^a f$, on se ramène ainsi au cas $a \leqslant b$ $\blacksquare$

THÉORÈME 6.18. Changement de variable
Si $f \in \mathrm{L}^1(I)$ et φ une bijection de l'intervalle I' sur I de classe $\mathcal{C}^1$ alors

$$\int_I f = \int_{I'} f \circ \varphi . |\varphi'|.$$

Dém :

- φ est strictement monotone (sinon on obtient une contradiction avec le théorème des valeurs intermédiaires, cf. question (iv) page 65).

- Supposons que $\varphi' > 0$, on écrit $I = (a, b)$ où a et b sont dans $\overline{\mathbb{R}}$ mais pas nécessairement dans I.
  soit (J_n) une suite de segments croissante de réunion I', on écrit $J_n = [a_n, b_n]$ avec $a_n \searrow a$, $b_n \nearrow b$ et $\varphi(J_n) = [\alpha_n, \beta_n]$ où $\alpha_n = \varphi(a_n)$ et $\beta_n = \varphi(b_n)$.
  - Comme φ est croissante $(\varphi(J_n))$ est une suite croissante de segments.
  - $\varphi(J_n) \subset I$ donc $\bigcup \varphi(J_n) \subset I$ puis, si $x \in I$ alors $x = \varphi(y)$ où $y \in I'$. Comme I' est réunion des J_n alors il existe n_y tel que $y \in J_{n_y}$ donc $x \in \varphi(J_{n_y})$.
    Conclusion : par double inclusion on a $\bigcup \varphi(J_n) = I$.

  On utilise alors le théorème de changement de variable dans les intégrales sur un segment
  $$\begin{aligned}\int_{\varphi(a_n)}^{\varphi(b_n)} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{[\varphi(a_n),\varphi(b_n)]} f \\ &= \int_{a_n}^{b_n} f\circ\varphi(t).\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a_n,b_n]} f\circ\varphi.\varphi'\end{aligned}$$
  d'où l'égalité par passage à la limite $\int_I f = \int_{I'} f\circ\varphi.\varphi'$.

- Si $\varphi' < 0$ alors la dernière égalité s'écrit
  $$\int_{\varphi(a_n)}^{\varphi(b_n)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_n}^{b_n} f\circ\varphi(t).\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$
  mais, comme $\varphi(a_n) > \varphi(b_n)$, elle peut encore s'écrire
  $$\int_{\varphi(J_n)} f = -\int_{\varphi(a_n)}^{\varphi(b_n)} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{a_n}^{b_n} f\circ\varphi(t).\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{J_n} f\circ\varphi.|\varphi'|$$
  On a donc prouvé l'égalité dans tous les cas.

L'hypothèse φ bijective est essentielle comme le montre l'exemple suivant : $\int_{\mathbb{R}} \sin u \cos u$ n'est pas définie alors que le changement de variable $\varphi(u) = \sin u$ de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$ dans le théorème donnerait $\int_{\mathbb{R}} \sin u \cos u = \int_{[-1,1]} x = 0$ ■

Corollaire 6.19. On reprend les hypothèses du théorème précédent. Si I' admet pour bornes a et b alors
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dém : On a déjà prouvé ceci dans la démonstration précédente ■

Définition 6.2.4. ***Intégrale impropre, intégrale généralisée***
Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$, si la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite en b on note encore $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.
Dans ce cas on dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale impropre (ou généralisée) de f entre a et b. On dit aussi que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

PROPOSITION 6.2.9. *Si* $f \in \mathrm{L}^1([a,b[)$ *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge.*

Dém : On applique directement le théorème 6.9 page 351 aux fonctions $\mathrm{Re}(f)^+$, $\mathrm{Re}(f)^-$, $\mathrm{Im}(f)^+$, $\mathrm{Im}(f)^-$ ■

***Remarque* 6.2.4.**

(*i*) *Il faut faire très attention lorsqu'on utilise le théorème 6.18 et son corollaire car l'intégrale d'une fonction continue par morceaux peut se transformer en intégrale impropre. Prendre par exemple* $\int_0^{\pi/2}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ *lorsqu'on fait le changement de variable* $t = x^2$.

(*ii*) *Ne pas confondre les 2 notions d'intégrale, si on écrit* $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ *par exemple sans précision, on ne sait pas à priori si* f *est intégrable ou si c'est son intégrale qui converge.*

Questions :

(*i*) Prouver que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe (faire une intégration par parties). Est-ce que $\dfrac{\sin t}{t}$ est sommable sur $\mathbb{R}_+$?

(*ii*) Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x$ et calcul pour $\alpha = 2$.

6.2.3 Convergence en moyenne, en moyenne quadratique

THÉORÈME 6.20. **Norme de la convergence en moyenne**
L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I à valeurs complexes constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$.
$f \mapsto N_1(f) = \int_I |f|$ est une norme sur cet espace vectoriel appelée norme de la convergence en moyenne.

Dém : On reprend la démonstration du théorème 5.53 page 332. Il n'y a vraiment que la première propriété qui change :
Si $N_1(f) = 0$ alors $\displaystyle\sup_{J\subset I}\int_J |f| = 0$ donc, pour tout segment $J \subset I$, $\int_J |f| = 0$. Comme $|f|$ est continue et positive, on en déduit que $f_{|J} = 0$ pour tout J donc $f = 0$ ■
On note aussi $\mathrm{L}^1_c(I)$ l'ensemble des fonctions continues intégrables sur I.

DÉFINITION 6.2.5. ***Fonctions de carré intégrable***
Une fonction continue à valeurs complexes f *est dite de carré intégrable sur* I *ssi*$_{déf}$ $|f|^2$ *est intégrable sur* I.
L'ensemble des fonctions de carré intégrable est noté $\mathrm{L}^2_c(I)$.

PROPOSITION 6.2.10. ***Inégalité de Cauchy-Schwarz***
Si f *et* g *sont dans* $\mathrm{L}^2_c(I)$ *alors* fg *est dans* $\mathrm{L}^1(I)$ *et* $\left|\int_I fg\right|^2 \leqslant \int_I |f|^2 \times \int_I |g|^2$.

Dém :

- Tout d'abord $2|fg| \leqslant |f|^2 + |g|^2$ ce qui permet d'avoir la première conclusion : en effet, $|f|^2$ et $|g|^2$ sont intégrables donc, par le théorème de domination, on en déduit l'intégrabilité de $|fg|$ i.e. $fg \in \mathrm{L}^1(I)$.
- On utilise ensuite le fait que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est valable sur les segments et on passe à la limite :
  Soit (J_n) de réunion I alors $\left|\int_{J_n} fg\right|^2 \leqslant \int_{J_n} |f|^2 \times \int_{J_n} |g|^2$ (inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales sur un segment). Comme chaque quantité admet une limite, on passe à la limite d'où $\left|\int_I fg\right|^2 \leqslant \int_I |f|^2 \times \int_I |g|^2$. ■

THÉORÈME 6.21. Norme de la convergence en moyenne quadratique
$\mathrm{L}^2_c(I)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$.
$\mathrm{L}^2_c(I)$ est un espace préhilbertien muni du produit scalaire $(f|g) = \int_I \bar{f}g$.
La norme associée au produit scalaire $N_2(f) = \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2}$ est appelée norme de la convergence en moyenne quadratique.

Dém : On écrit

$$|f+g|^2 = |f|^2 + |g|^2 + \bar{f}g + \bar{g}f = |f|^2 + |g|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{f}g) \leqslant 2(|f|^2 + |g|^2)$$

car $|f-g|^2 = |f|^2 + |g|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\bar{f}g)$ (même calcul) donc $2\,\mathrm{Re}(\bar{f}g) \leqslant |f|^2 + |g|^2$. Si f et g sont dans $\mathrm{L}^2_c(I)$ alors $f+g \in \mathrm{L}^2_c(I)$.
$(f|g)$ est bien un produit scalaire (cf. proposition 5.4.2 page 334) ■

***Remarque* 6.2.5.**

(i) *On a prouvé* $|(f|g)| \leqslant N_1(fg) \leqslant N_2(f)N_2(g)$.

(ii) *Le produit scalaire est continu sur* $\mathrm{L}^2_c(I)$.

(iii) *Si* I *est borné alors* $\mathrm{L}^2_c(I) \subset \mathrm{L}^1_c(I)$.

6.2.4 Le théorème de Lebesgue de convergence dominée

Nous abordons dans ce paragraphe le théorème le plus important du programme. Ce théorème correspond à une version aménagée, au niveau des classes préparatoires, d'un théorème plus général qui a beaucoup servi aux mathématiciens depuis le début du vingtième siècle et qui est lié à la théorie de la mesure.

THÉORÈME 6.22. Théorème de convergence dominée
Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, φ une fonction continue par morceaux, si on a les hypothèses

- $f_n \xrightarrow[I]{C.S.} f \in \mathcal{CM}(I)$,
- $\forall n \in \mathbb{N},\ |f_n| \leqslant \varphi,\ \varphi \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{R}_+)$

alors $f \in \mathrm{L}^1(I)$ et $\int_I f = \lim_n \int_I f_n$.

Dém : hors programme ($\mathcal{CM}$ signifie continue par morceaux) ■

Exemples :

(*i*) Soit $f_n = \frac{1}{n}1_{[0,n]}$, $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{C.U.} 0$ mais $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ et $\int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n = 0$.

(*ii*) Soit $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n 1_{[0,\sqrt{n}]}$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$ sur $[0, +\infty[$ et $f_n \xrightarrow[{[0,+\infty[}]{C.S.} \mathrm{e}^{-x^2}$. On a donc $I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x \to \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. En posant $x = \sqrt{n}\sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, on obtient $I_n = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} t\,\mathrm{d}t$ et, avec les intégrales de Wallis, on prouve que $I_n \to \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. En effet :
En posant $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t\,\mathrm{d}t$ alors, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u = \cos^{n-1} t & \Rightarrow \mathrm{d}u = -(n-1)\cos^{n-2} t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = \cos t\,\mathrm{d}t & \Leftarrow v = \sin t \end{array}$$

on trouve (on a supposé $n \geqslant 2$)

$$\begin{aligned} J_n &= \underbrace{\left[\cos^{n-1} t \sin t\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t \sin^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{n-2} t(1 - \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n \end{aligned}$$

d'où $J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}$. La suite (J_n) est décroissante (car $\cos^n t \leqslant \cos^{n-1} t$) donc on a les inégalités

$$J_n \leqslant J_{n-1} \leqslant J_{n-2} = \frac{n}{n-1}J_n$$

en divisant par $J_n > 0$, on obtient $1 \leqslant \dfrac{J_{n-1}}{J_n} \leqslant \dfrac{n}{n-1}$ d'où $J_n \sim J_{n-1}$. Ensuite, en multipliant la relation $nJ_n = (n-1)J_{n-2}$ par J_{n-1}, on a

$$nJ_nJ_{n-1} = (n-1)J_{n-1}J_{n-2} = \frac{\pi}{2}$$

d'où, comme $J_{n-1} \sim J_n$, $J_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ soit $J_n \sim \frac{\pi}{\sqrt{2n}}$.
On en déduit alors que $J_{2n+1} = I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}$ d'où le résultat ■

THÉORÈME 6.23. Intégration terme à terme d'une série de fonctions
Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes telle que l'on ait les hypothèses
- la série $\sum \int_I |f_n|$ converge,
- $f_n \in \mathrm{L}^1(I)$,
- $\sum f_n \xrightarrow[I]{C.S.} f \in \mathcal{CM}(I)$,

alors
- $f \in \mathrm{L}^1(I)$,
- $N_1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n)$,
- $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Dém : hors programme ■

Question :

(*i*) Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer que $\displaystyle\frac{2x}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^{u^2} - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

(*ii*) Soit $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ nulle en dehors d'un segment.
Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+\frac{\pi}{n})\sin nt\,\mathrm{d}t$.
En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = 0$.

(*iii*) Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n \sin nx = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer par l'absurde que $b_n \to 0$.

6.2.5 Intégrales dépendant d'un paramètre

a) Les théorèmes

Théorème 6.24. Continuité sous le signe intégral
Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A\times I$ où A est une partie de $\mathbb{R}^m$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$, on suppose que

$$(\mathrm{H})\begin{cases}\bullet\ f(.,t)\ : x\in A\mapsto f(x,t)\in\mathcal{C}(A,\mathbb{C}),\\ \bullet\ f(x,.)\ : t\in I\mapsto f(x,t)\in\mathcal{CM}(I,\mathbb{C}),\\ \bullet\ \exists\varphi\in\mathrm{L}^1(I,\mathbb{R}^+)\mid\forall(x,t)\in A\times I,\ |f(x,t)|\leqslant\varphi(t)(\text{hypothèse de domination})\end{cases}$$

alors
- $\forall x\in A,\ f(x,.)\in\mathrm{L}^1(I)$,
- $g(x)=\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\in\mathcal{C}(A)$.

Dém :

- $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable (hypothèse de domination) donc g est bien définie.
- Soit (x_n) une suite d'éléments de A qui converge vers $x\in A$, on définit $f_n(t)=f(x_n,t)$ et on applique le théorème de convergence dominée aux intégrales $\int_I f_n$:
  - $f_n \xrightarrow[I]{C.S.} f(x,.)\in\mathcal{CM}(I)$ (en notant $f(x,.)$ la fonction qui, à x fixé, associe $f(x,t)$) car f est continue par rapport à x,
  - $\forall n\in\mathbb{N},\ |f_n|\leqslant\varphi$, où $\varphi\in\mathrm{L}^1(I,\mathbb{R}_+)$, c'est l'hypothèse de domination.

  On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n$ existe et que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n &= \lim_n g(x_n)\\ &= \int_I \lim_n f(x_n,t)\,\mathrm{d}t = g(x)\end{aligned}$$

  donc, par le critère séquentiel de continuité, g est continue en tout point x de A ■

***Remarque* 6.2.6.** *La continuité étant une notion locale, l'hypothèse de domination n'a pas besoin d'être valable sur A en entier mais au voisinage de chaque point de A (et on peut prendre un voisinage compact) i.e.*
$\forall x_0\in A,\ \exists V_{x_0},\ \exists\varphi_{x_0}$ *intégrable sur I telle que* $\forall x\in V_{x_0},\ \forall t\in I,\ |f(x,t)|\leqslant\varphi_{x_0}(t)$.

COROLLAIRE 6.25. Si I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$, si A est une partie de $\mathbb{R}^m$ alors, avec les hypothèses du théorème précédent,

$$G : (u, v, x) \mapsto \int_u^v f(x, t)\,\mathrm{d}t$$

est continue.

Dém : Il suffit en fait de prouver que $F(u, x) = \int_a^u f(x, t)\,\mathrm{d}t$ est continue car $G(u, v, x) = F(u, x) - F(v, x)$.
Soit $(u_0, x_0) \in I \times A$,

$$\begin{aligned} F(u, x) - F(u_0, x_0) &= \int_a^u f(x, t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{u_0} f(x_0, t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{u_0}^u f(x, t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{u_0} f(x, t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{u_0} f(x_0, t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{u_0}^u f(x, t)\,\mathrm{d}t + g(x) - g(x_0) \end{aligned}$$

où on a posé $g(x) = \int_a^{u_0} f(x, t)\,\mathrm{d}t$.

- g est continue par application du théorème précédent (on en a les hypothèses !) donc
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \mid \forall x \in \overline{B}(x_0, \eta) \cap A,\ |g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon/2.$$
- $|f(x, t)| \leqslant \varphi(t)$ donc
$$\left|\int_{u_0}^u f(x, t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left|\int_{u_0}^u \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \quad \text{(on peut avoir } u < u_0\text{)}$$
d'où l'existence de η' tel que $\forall u \in \overline{B}(u_0, \eta')$, $\left|\int_{u_0}^u \varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

On pose $\eta'' = \min(\eta, \eta')$ d'où

$$\forall (u, x) \in I \times A,\ \|(u, x) - (u_0, x_0)\|_\infty \leqslant \eta'' \Rightarrow |F(u, x) - F(u_0, x_0)| \leqslant \varepsilon$$

ce qui donne la continuité de F sur $I \times A$ ■

THÉORÈME 6.26. **Dérivation sous le signe intégral (formule de Leibniz)**
Soit A un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$ telle que $\begin{cases} \bullet\ f(x, .) \in \mathrm{L}^1(I, \mathbb{C}), \\ \bullet\ \dfrac{\partial f}{\partial x} \text{ vérifie (H) (cf. théorème 6.24)} \end{cases}$
Alors la fonction g définie au théorème précédent est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, et

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t.$$

Dém : On a par hypothèse l'existence, pour tout x de A, d'une fonction ψ continue, intégrable, positive telle que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant \psi(t)$.
On va prouver, grâce au théorème de convergence dominée (comme pour la continuité), que

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\,\mathrm{d}t$$

par le critère séquentiel d'existence d'une limite.
Soit $x \in A$ et (h_n) une suite d'éléments non nuls qui tend vers 0 et telle que, pour tout n, $x + h_n \in A$ alors grâce à l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout t de I,

$$|f(x+h_n,t) - f(x,t)| \leqslant |h_n| \sup_{\theta\in[0,1]} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta h_n, t)\right| \leqslant |h_n|\psi(t)$$

par conséquent on peut appliquer le théorème de convergence dominée aux intégrales $\displaystyle\int_I \frac{f(x+h_n,t)-f(x,t)}{h_n}\,\mathrm{d}t$ d'où

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{g(x+h_n)-g(x)}{h_n} &= \lim_{n\to+\infty} \int_I \frac{f(x+h_n,t)-f(x,t)}{h_n}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_I \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x+h_n,t)-f(x,t)}{h_n}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ■

Corollaire 6.27. **Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$**
Si f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$,..., $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ vérifient les hypothèses (H) du théorème de continuité sous le signe intégral alors g est de classe $\mathcal{C}^k$ et

$$\mathrm{D}^j\, g(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Dém : Il s'agit de faire une simple récurrence finie sur j à partir du précédent théorème (on suppose $k \geqslant 1$)

- Pour $j = 1$ c'est le théorème précédent.
- On suppose que la propriété vraie pour $j \leqslant k-1$. On a par conséquent $\mathrm{D}^j\, g(x) = \int_I \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t$ et on peut encore appliquer le théorème de dérivation à $\mathrm{D}^j\, g$ donc

  $$\mathrm{D}^{j+1}\, g(x) = \int_I \frac{\partial^{j+1} f}{\partial x^{j+1}}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

  ce qui prouve la récurrence.

Si $k = +\infty$ la démonstration ci-dessus est encore valable ■

***Remarque* 6.2.7.**

(*i*) *Le dernier théorème et son corollaire s'appliquent aussi aux dérivées partielles d'une fonction définie sur un ouvert A de $\mathbb{R}^m$.*

(*ii*) *La remarque 6.2.6 précédente est aussi valable, l'hypothèse de domination n'a besoin d'être valable qu'au voisinage de chaque point.*

(*iii*) *Si* u *et* v *sont continues,* $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t = G(u(x),v(x),x)$ *est continue.*

Dém : On utilise le théorème de composition des applications continues :

- $\varphi\ : x \in A \mapsto (u(x),v(x),x)$ *est continue car ses applications coordonnées sont continues,*
- $(u,v,x) \in I^2{\times}A \mapsto G(u,v,x)$ *est continue (cf. corollaire 6.25).*

Donc, par composition, $x \in A \mapsto G(u(x),v(x),x)$ *est continue* ■

(*iv*) *Si* u *et* v *sont dérivables,* f *continue,* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *existe et est continue par rapport à* x *alors, avec les hypothèses du théorème 6.26,* $\displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est dérivable et on a :*

$$\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t\right)' = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,\mathrm{d}t + f(x,v(x))v'(x) - f(x,u(x))u'(x).$$

Dém : On utilise ici la différentielle du composé de deux applications de classe $\mathcal{C}^1$*, plus précisément, ce qu'on a appelé la règle de la chaîne.*
Comme au corollaire 6.25 on se ramène à la fonction $F(u,x) = \displaystyle\int_a^u f(x,t)\,\mathrm{d}t.$

- F *est dérivable par rapport à* u *en vertu du théorème fondamental du calcul différentiel et* $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,x) = f(x,u)$ *est une fonction continue (par rapport à* (u,x)*).*
- F *est dérivable par rapport à* x *en vertu du théorème de dérivation sous le signe intégral et* $\dfrac{\partial F}{\partial x}(u,x) = \displaystyle\int_a^u \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ *est une fonction continue (par rapport à* (u,x)*) grâce au théorème de continuité sous le signe intégral.*

Conclusion : grâce au théorème fondamental des fonctions différentiables, F *est de classe* $\mathcal{C}^1$*. Comme* $x \mapsto (u(x),x)$ *est aussi de classe* $\mathcal{C}^1$*, on peut appliquer la fameuse règle de la chaîne,* $H(x) = F(u(x),x)$ *est dérivable et*

$$H'(x) = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = f(x,u(x)).u'(x) + \int_a^{u(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

On obtient alors facilement le résultat annoncé ■

Questions :

(*i*) Démontrer le résultat (*iv*) de la remarque 6.2.7.

(*ii*) Soit $f \in \mathcal{C}(I,E)$ où $I = [a,b]$ et $c \in [a,b]$, on définit la fonction $F_m(x) = \displaystyle\int_c^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer les dérivées successives de F_m.

(*iii*) Soit $F(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $F + F'' = g$.

Généralisation : soit (E) l'équation différentielle $y'' + by' + cy = g$ où b, c sont des constantes, α une solution de l'équation différentielle $y'' + by' + cy = 0$ vérifiant $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) = 1$. Exprimer une solution particulière de (E) sous forme intégrale.

(*iv*) Calculer les dérivées successives de $S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\,\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$.

(*v*) Soit $F_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+a^2)^{n+1}}$, montrer que $F_n'(a) = -2(n+1)aF_{n+1}(a)$, en déduire $F_n(a)$.

(*vi*) Transformée de Fourier : si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ on pose $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-ixu}\,\mathrm{d}u$.

Montrer que, si $u \mapsto u^n f(u)\mathrm{e}^{-ixu} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f} \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ et

$\widehat{f}^{(n)}(x) = (-i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} u^n f(u)\mathrm{e}^{-ixu}\,\mathrm{d}u$.

(*vii*) Transformée de Laplace : soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ telle que $|f|$ soit majorée par un polynôme (i.e. $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0$), on pose

$$F(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Prouver que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $F^{(n)}$.

b) Application à la fonction d'Euler

Définition 6.2.6. ***Fonction Γ d'Euler***
La fonction Γ d'Euler est définie sur $]0, +\infty[$ par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 6.2.11. ***Relations***

$$\forall x > 0,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n!,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Dém :

- La première relation s'obtient par une intégration par parties :

$$\begin{array}{ll} u = t^x & \Rightarrow \mathrm{d}u = xt^{x-1}\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t & \Leftarrow v = -\mathrm{e}^{-t} \end{array}$$

d'où $\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^x\,\mathrm{d}t = \left[-t^x\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$.

- $\Gamma(n+1) = n!$ est immédiat par récurrence.
- La dernière est une conséquence immédiate de l'exemple (*ii*) page 361 :
$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$
après le changement de variable $t = u^2$ ■

Une application du théorème de Leibniz de dérivation sous le signe intégral nous donne :

PROPOSITION 6.2.12. Γ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]0, +\infty[$ *et, pour tout entier* k,
$$\mathrm{D}^k\,\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t.$$

Dém : On utilise le théorème 6.4 sur tout segment $[a, b]$ de $]0, +\infty[$:
On pose $f(x, t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$.

- $f \in \mathcal{C}(]0, +\infty[^2)$,
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x^k}(x, t) = (\ln t)^k \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \in \mathcal{C}(]0, +\infty[^2)$,
- si $x \in [a, b] \subset]0, +\infty[$, $t^x \leqslant t^b$ si $t \geqslant 1$ et $t^x \leqslant t^a$ si $t \leqslant 1$ donc
$$\left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)\right| \leqslant |\ln t|^k \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t} \max(t^a, t^b) = \varphi_k(t).$$
Or $\varphi_k(t) \underset{0}{\sim} |\ln t|^k . t^{a-1}$ fonction intégrable au voisinage de 0 et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\varphi_k(t) = 0$ donc φ_k est intégrable au voisinage de $+\infty$.

Le théorème de Leibniz de dérivation sous le signe intégral s'applique sur tout intervalle $[a, b] \subset]0, +\infty[$ donc Γ est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et on a $\mathrm{D}^k\,\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ ■

Application :
La fonction Γ intervient dans de nombreuses formules grâce à ses propriétés, on la retrouve par exemple dans le développement en série des fonctions de Bessel
$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{-x^2}{4}\right)^n$$
dans les fonctions d'Airy
$$\mathrm{Ai}\,(x) = 3^{-2/3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{2}{3})} - 3^{-4/3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{4}{3})}$$
$$\mathrm{Bi}\,(x) = 3^{-1/6} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{2}{3})} + 3^{-5/6} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+1}}{9^n n!\Gamma(n+\frac{4}{3})}$$
et dans de nombreuses fonctions spéciales.
On a aussi une formule importante en théorie des nombres
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)(\ldots)(x+n)} = \Gamma(x)$$
et enfin une caractérisation classique, la fonction Γ est l'unique fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ qui vérifie
$$f(x+1) = xf(x), \quad f(1) = 1, \quad \ln f \text{ convexe .}$$

Questions :

(*i*) Soit $J_n = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $J_n = \dfrac{n^x n!}{x(x+1)(\ldots)(x+n)}$. En déduire $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)(\ldots)(x+n)}$.

(*ii*) Prouver la caractérisation classique de Γ (poser $\varphi(t) = \ln f(t)$ où f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ est convexe, $f(x+1) = xf(x)$, $f(1) = 1$ et $\ln f$ convexe, puis prouver que $f = \Gamma$ sur $]0,1]$).

6.3 Intégrales doubles

6.3.1 Intégrales doubles sur un produit d'intervalles

Théorème 6.28. Théorème de Fubini
Lorsque A est un intervalle de $\mathbb{R}$ et que f est continue sur $A\times[c,d]$ à valeurs complexes, alors pour tout segment $[a,b]$ inclus dans A

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y.$$

Dém : Soit $g(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$, $G(X) = \displaystyle\int_a^X g(x)\,\mathrm{d}x$ et $h(X,y) = \displaystyle\int_a^X f(x,y)\,\mathrm{d}x$, $H(X) = \displaystyle\int_c^d h(X,y)\,\mathrm{d}y$. f est bornée car c'est une fonction continue sur le compact $[a,b]\times[c,d]$, soit M une borne de $|f|$.

- g est continue car
  - f est continue par rapport à x (et aussi par rapport à y),
  - $|f(x,y)| \leqslant M$ qui est intégrable (!) sur $[c,d]$,

  donc le théorème de continuité sous le signe intégral s'applique.
  G est donc dérivable grâce au théorème fondamental du calcul différentiel et $G'(X) = g(X) = \displaystyle\int_c^d f(X,y)\,\mathrm{d}y$.

- h est continue par rapport à y (c'est encore le théorème de continuité sous le signe intégral), dérivable par rapport à X (théorème fondamental) et $\dfrac{\partial h}{\partial X}(X,y) = f(X,y)$. On peut appliquer le théorème de Leibniz car
  - $\dfrac{\partial h}{\partial X}(X,y) = f(X,y)$ est continue par rapport à X et par rapport à y,
  - $\left|\dfrac{\partial h}{\partial X}(X,y)\right| \leqslant M$ est intégrable sur $[c,d]$

donc H est dérivable et $H'(X) = \displaystyle\int_c^d \frac{\partial h}{\partial X}(X, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d f(X, y)\,\mathrm{d}y$.

On remarque alors que $G'(X) = H'(X)$ et $G(a) = H(a) = 0$ donc $G = H$, en particulier $G(b) = H(b)$ soit

$$\int_a^b \Big[\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y \ \blacksquare$$

Définition 6.3.1. **Intégrale double**

La valeur commune obtenue dans le théorème précédent est appelée intégrale double de f sur $[a, b]\times[c, d]$ notée $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f$.

***Remarque* 6.3.1.**

(i) *On a alors* $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y$.

(ii) *L'intégrale double est linéaire, si f est positive alors* $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f \geqslant 0$ *et* $\displaystyle\iint_{[a',b']\times[c',d']} f \leqslant \iint_{[a,b]\times[c,d]} f$ *si* $[a', b'] \subset [a, b]$ *et* $[c', d'] \subset [c, d]$.

Dém :

– *On a*

$$\begin{aligned}
\iint_{[a,b]\times[c,d]} (\lambda f + \mu g) &= \int_a^b \left(\int_c^d [\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)]\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\lambda \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y + \mu \int_c^d g(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \lambda \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \mu \int_a^b \left(\int_c^d g(x, y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \lambda \iint_{[a,b]\times[c,d]} f + \mu \iint_{[a,b]\times[c,d]} g
\end{aligned}$$

d'où la linéarité de l'intégrale double.

– *Si $f \geqslant 0$ alors* $g(x) = \displaystyle\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \geqslant 0$ *par conséquent on obtient* $G(b) = \displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

– *Enfin, toujours si $f \geqslant 0$ alors*

$$\begin{aligned}
\iint_{[a',b']\times[c',d']} f = \int_{c'}^{d'} \left(\int_{a'}^{b'} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \ &\leqslant \int_{c'}^{d'} \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&\leqslant \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&\leqslant \iint_{[a,b]\times[c,d]} f \ \blacksquare
\end{aligned}$$

(iii) *Si f est positive alors* $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f$ *représente le volume de la partie de l'espace* $V = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in[a,b]\times[c,d],\ 0\leqslant z\leqslant f(x,y)\}$.

DÉFINITION 6.3.2. ***Fonction intégrable,intégrale d'une fonction intégrable***
Soit f continue sur $I\times I'$ où I et I' sont 2 intervalles de $\mathbb{R}$, positive, on dit que f est intégrable sur $I\times I'$ ssi$_{déf}$ il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que, pour tout segment J contenu dans I, tout segment J' contenu dans I', $\displaystyle\iint_{J\times J'} f \leqslant M$.

On note alors $\displaystyle\iint_{I\times I'} f = \sup_{J,J'}\iint_{J\times J'} f$.

***Remarque* 6.3.2.**

(i) *Si par hasard I et I' étaient des segments, on retrouve avec cette définition l'intégrale que l'on a vue au début de la section (ne pas oublier que $f\geqslant 0$).*
Dém : Cf. remarque 6.2.1 page 349. Soit $I=[a,b]$ et $I'=[c,d]$.

- *Si $J=[\alpha,\beta]\subset I$ et $J'=[\gamma,\delta]\subset I'$ alors, comme f est positive,* $\iint_{J\times J'} f \leqslant \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ *donc, en passant à la borne supérieure,* $\int_{I\times I'} f \leqslant \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.
- *Comme I et I' sont des segments contenu dans I et I' (...) alors* $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \leqslant \int_{I\times I'} f$.

En combinant les deux inégalités, on obtient

$$\int_{I\times I'} f = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \ \blacksquare$$

(ii) *Si (J_m) et (J'_n) sont deux suites croissantes de segments de réunion respectives I et I' alors* $\lim\limits_{n\to+\infty}\iint_{J_n\times J'_n} f = \displaystyle\iint_{I\times I'} f$ *(comme avec les intégrales simples, cf. théorème 6.7 page 350).*
Dém : Soit $J=[a,b]\subset I$, $J'=[a',b']\subset I'$ alors, comme $a\in I=\bigcup J_m$, il existe $m_a\in\mathbb{N}$ tq $a\in J_{m_a}$. De même il existe m_b tel que $b\in J_{m_b}$.
On pose $m=\max(m_a,m_b)$ donc $J\subset J_m$. De même il existe n (que l'on peut prendre $\geqslant m$) tel que $J'\subset J'_n$.
On a alors $\iint_{I\times I'} f = \displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}}\iint_{J_n\times J'_n} f = \lim_{n\to+\infty}\iint_{J_n\times J'_n} f$ *(la suite est croissante) :*
en effet, $\iint_{J_n\times J'_n} f \leqslant \iint_{I\times I'} f$ *donc la suite double est majorée, si on note M sa borne supérieure, on a* $M\leqslant\iint_{I\times I'} f$. *Ensuite, vu ce que l'on vient de faire,*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists J\subset I,\ \exists J'\subset I' \mid \iint_{J\times J'} f \geqslant \iint_{I\times I'} f-\varepsilon$$

donc il existe n tel que $\iint_{J_n\times J'_n} f \geqslant \iint_{I\times I'} f-\varepsilon$ *i.e.* $M\geqslant\iint_{I\times I'} f$ *et par conséquent* $\lim\limits_{n\to+\infty}\iint_{J_n\times J'_n} f = \iint_{I\times I'} f \ \blacksquare$

Théorème 6.29. Critère d'intégrabilité
Soit $f \in \mathcal{C}(I \times I', \mathbb{R}^+)$, si on a les hypothèses

- $\forall x \in I,\ f(x,.) \in \mathrm{L}^1(I'),\quad x \mapsto \int_{I'} f(x,.) \in \mathrm{L}^1(I)$

alors $f \in \mathrm{L}^1(I \times I')$ et on a $\displaystyle\iint_{I\times I'} f = \int_I \left(\int_{I'} f(x,.)\right)$.

Dém : Soit J et J' 2 intervalles contenus respectivement dans I et I' alors, grâce au théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\iint_{J\times J'} f &= \int_J \left(\int_{J'} f(x,.)\right) \\ &\leqslant \int_J \left(\int_{I'} f(x,.)\right) && \text{car } f(x,.) \in \mathrm{L}^1(I) \\ &\leqslant \int_I \left(\int_{I'} f(x,.)\right) && \text{car } x \mapsto \int_{I'} f(x,.) \in \mathrm{L}^1(I).\end{aligned}$$

On en déduit que

- $f \in \mathrm{L}^1(I \times I')$,
- $\iint_{I\times I'} f \leqslant \int_I \left(\int_{I'} f(x,.)\right)$.

Inégalité dans l'autre sens : soit (J_m) et (J'_n) deux suites croissantes de segments de réunion respective I et I'. Comme f est intégrable, on sait que $\iint_{J_m\times J'_n} f \leqslant \iint_{I\times I'} f$. On pose alors $f_n(x) = \int_{J'_n} f(x,.)$ et on utilise le théorème de convergence dominée :

- On sait (première hypothèse) que $\forall x \in I,\ f(x,.) \in \mathrm{L}^1(I')$ donc la suite $(f_n(x))$ admet une limite soit $f_n \xrightarrow[I]{C.S.} \varphi$ où $\varphi\ : x \mapsto \int_{I'} f(x,.)$,
- puis, comme $f \geqslant 0$ alors $f_n(x) \leqslant \int_{I'} f(x,.) = \varphi(x)$ et par hypothèse, $\varphi \in \mathrm{L}^1(I)$ ce qui donne l'hypothèse de domination.

On a donc

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_{J_m} f_n &= \int_{J_m} \left(\int_{I'} f(x,.)\right) \\ &\leqslant \int_{I\times I'} f\end{aligned}$$

d'où $\lim\limits_{m\to+\infty} \int_{J_m} \left(\int_{I'} f(x,.)\right) = \int_I \left(\int_{I'} f(x,.)\right) \leqslant \int_{I\times I'} f$.
Par double inégalité on a $\iint_{I\times I'} f = \int_I \left(\int_{I'} f(x,.)\right)$ ■

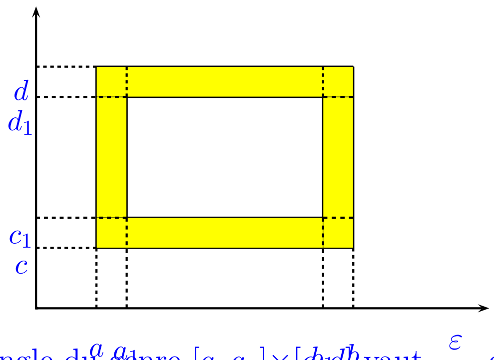
***Remarque* 6.3.3.** *On peut énoncer le même théorème en renversant les rôles des variables x et y.*

Proposition 6.3.1. *Si f est intégrable sur $I \times I'$ alors f est intégrable sur $\overset{\circ}{I} \times \overset{\circ}{I'}$ et $\iint_{I\times I'} f = \iint_{\overset{\circ}{I}\times \overset{\circ}{I'}} f$.*

Dém :

- Soit $J \subset \overset{\circ}{I} \subset I$ et $J' \subset \overset{\circ}{I'} \subset I'$ alors $\iint_{J\times J'} f \leqslant \iint_{I\times I'} f$ par conséquent $f \in \mathrm{L}^1(\overset{\circ}{I} \times \overset{\circ}{I'})$ et $\iint_{\overset{\circ}{I}\times\overset{\circ}{I'}} f \leqslant \iint_{I\times I'} f$.
- Soit $\varepsilon > 0$ alors il existe $J \subset I$ et $J' \subset I'$ segments tels que $\iint_{J\times J'} f \geqslant \iint_{I\times I'} f - \varepsilon/2$.
  - f étant continue sur $J\times J'$, qui est compact, est bornée par une constante A.
  - On prend alors $J_1 \subset J$ tel que $J_1 \subset \overset{\circ}{I}$, de même avec $J_1' \subset \overset{\circ}{I'}$ vérifiant aire $(J\times J' \setminus J_1\times J_1') \leqslant \varepsilon/(2A)$.

  Si $J = [a,b]$, $J' = [c,d]$, on peut prendre $J_1 = [a_1,b_1]$, $J_1' = [c_1,d_1]$ avec $a_1 = a + \frac{\varepsilon}{4A(d-c)}$, $b_1 = b - \frac{\varepsilon}{4A(d-c)}$, $c_1 = c + \frac{\varepsilon}{4A(b-a)}$ et $d_1 = d - \frac{\varepsilon}{4A(b-a)}$ (où ε est choisi assez petit pour que $b_1 > a_1$ et $d_1 > c_1$). Comme $b > a_1 > a$ alors $a_1 \in \overset{\circ}{I}$, de même pour b_1, c_1, d_1 i.e. $J_1 \subset \overset{\circ}{I}$ et $J_1' \subset \overset{\circ}{I'}$. On obtient le dessin suivant :



  L'aire de chaque rectangle du genre $[a,a_1]\times[c,d]$ vaut $\dfrac{\varepsilon}{4A}$ et la réunion de ces quatre rectangles recouvre l'ensemble $J\times J' \setminus J_1\times J_1'$.
  On a alors
$$\begin{aligned}\iint_{\overset{\circ}{I}\times\overset{\circ}{I'}} f \geqslant \iint_{J_1\times J_1'} f &\geqslant \iint_{J\times J'} f - \iint_{J\times J'\setminus J_1\times J_1'} f\\ &\geqslant \iint_{I\times I'} f - \frac{\varepsilon}{2} - A.\text{aire}\,(J\times J' \setminus J_1\times J_1')\\ &\geqslant \iint_{I\times I'} f - \varepsilon\end{aligned}$$
  pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\iint_{\overset{\circ}{I}\times\overset{\circ}{I'}} f \geqslant \iint_{I\times I'} f$.
  Par double inégalité, on a $\iint_{I\times I'} f = \iint_{\overset{\circ}{I}\times\overset{\circ}{I'}} f$ ■

Proposition 6.3.2. ***"Pseudo-linéarité"***

(i) *Si les fonctions f et g sont intégrables sur $I\times I'$ alors $f+g$ l'est aussi et $\iint_{I\times I'}(f+g) = \iint_{I\times I'} f + \iint_{I\times I'} g$.*

(ii) *Si $f \in \mathrm{L}^1(I\times I')$ et si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ alors $\lambda f \in \mathrm{L}^1(I\times I')$ et $\iint_{I\times I'} \lambda f = \lambda \iint_{I\times I'} f$.*

Dém : On procède comme avec les intégrales simples, i.e.

- $\iint_{J_n\times J_n'}(f+g) = \iint_{J_n\times J_n'} f + \iint_{J_n\times J_n'} g$ et on passe à la limite,
- $\iint_{J_n\times J_n'} \lambda f = \lambda \iint_{J_n\times J_n'} f$ et on passe à la limite ■

Théorème 6.30. Théorème de comparaison, croissance
Si f et g sont deux fonctions continues, positives sur $I\times I'$ telles que $f \leqslant g$, si g est intégrable alors f est intégrable et on a $\displaystyle\iint_{I\times I'} f \leqslant \iint_{I\times I'} g$.
L'application qui à une fonction intégrable fait correspondre son intégrale est croissante.

Dém : $\iint_{J_n\times J'_n} f \leqslant \iint_{J_n\times J'_n} g \leqslant \iint_{I\times I'} g$ donc $f \in \mathrm{L}^1(I\times I')$ et par passage à la limite on a $\iint_{I\times I'} f = \iint_{I\times I'} g$ ■

Définition 6.3.3. ***Fonctions à valeurs complexes intégrables***
Soit f continue sur $I\times I'$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on dit que f est intégrable sur $I\times I'$ ssi$_{\text{déf}}$ $|f|$ est intégrable. On note $\mathrm{L}^1(I\times I')$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $I\times I'$ à valeurs réelles ou complexes (ou $\mathrm{L}^1(I\times I',\mathbb{R})$, $\mathrm{L}^1(I\times I',\mathbb{C})$ si nécessaire).

***Remarque* 6.3.4.** *Si f est à valeurs positives, la définition ci-dessus s'applique sans problème.*

Théorème 6.31. Théorème de domination
Si f et g sont continues, si $|f| \leqslant g$ et si g est intégrable alors f est intégrable.

Dém : Immédiat avec le théorème précédent ■

Théorème 6.32. Fonctions intégrables de signe quelconque
Si f est continue à valeurs réelles alors f est sommable ssi f^+ et f^- le sont. Dans ce cas, on pose

$$\iint_{I\times I'} f = \iint_{I\times I'} f^+ - \iint_{I\times I'} f^-.$$

Dém : Comme avec les intégrales simples, on utilise l'égalité $|f| = f^+ + f^-$ et les majorations $f^+ \leqslant |f|$, $f^- \leqslant |f|$.
On remarque aussi que, si (J_m) et (J'_n) sont deux suites croissantes de segments de réunion I et I' alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \iint_{J_n\times J'_n} f = \iint_{I\times I'} f$ ■

Théorème 6.33. Fonctions intégrables complexes
Si f est continue à valeurs complexes alors f est intégrable ssi $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont. Dans ce cas, on pose

$$\iint_{I\times I'} f = \iint_{I\times I'} \operatorname{Re} f + i \iint_{I\times I'} \operatorname{Im} f.$$

Dém : Idem, on utilise les inégalités $|\operatorname{Re} f| \leqslant |f|$, $|\operatorname{Im} f| \leqslant |f|$ et $|f| \leqslant |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f|$ si f est complexe pour avoir les équivalences.
On remarque aussi que, si (J_m) et (J'_n) sont deux suites croissantes de segments de réunion I et I' alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \iint_{J_n\times J'_n} f = \iint_{I\times I'} f$ ■

Proposition 6.3.3. ***Espace vectoriel des fonctions intégrables***
L'ensemble $\mathrm{L}^1(I\times I')$ des fonctions intégrables sur $I\times I'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I\times I')$ et l'application qui à $f \in \mathrm{L}^1(I\times I')$ fait correspondre son intégrale est linéaire.

Dém :

- La fonction nulle est dans $\mathrm{L}^1(I\times I')$ donc cet ensemble est non vide.
- L'inégalité $|\lambda f + \mu g| \leqslant |\lambda|.|f| + |\mu|.|g|$ montre que si $(f, g) \in \mathrm{L}^1(I\times I')^2$ et $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{K})^2$ alors $\lambda f + \mu g \in \mathrm{L}^1(I\times I')$ donc $\mathrm{L}^1(I\times I')$ est bien un espace vectoriel.
- $\iint_{J_n\times J'_n}(\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_{J_n\times J'_n} f + \mu \iint_{J_n\times J'_n} g$ et on passe à la limite quand $n \to +\infty$, d'où $\iint_{I\times I'}(\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_{I\times I'} f + \mu \iint_{J_n\times J'_n} g$ ■

Théorème 6.34.
Soit f une fonction continue à valeurs complexes **intégrable** sur $I\times I'$. Si
$\begin{cases} \bullet\ \forall x \in I,\ f(x, .)\ : y \in I' \mapsto f(x, y) \in \mathrm{L}^1(I'), \\ \bullet\ g\ : x \in I \mapsto \int_{I'} f(x, .) \in \mathrm{L}^1(I) \end{cases}$ alors $\displaystyle\iint_{I\times I'} f = \int_I g.$

Dém : Hors programme ■

Théorème 6.35. **Formule de Fubini**
On reprend les hypothèses du théorème précédent et on rajoute les hypothèses suivantes :
$\begin{cases} \bullet\ \forall y \in I',\ f(., y)\ : x \in I \mapsto f(x, y) \in \mathrm{L}^1(I), \\ \bullet\ h\ : y \in I' \mapsto \int_I f(., y) \in \mathrm{L}^1(I') \end{cases}$ alors $\displaystyle\iint_{I\times I'} f = \int_I g = \int_{I'} h.$

Dém : Hors programme ■

Proposition 6.3.4. ***Passage en coordonnées polaires***
On retrouve la proposition 5.3.5 page 99. Soit $f \in \mathrm{L}^1(I\times I', \mathbb{C})$ (on suppose ici que $I\times I' \subset \mathbb{L} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^-$ alors, en passant en polaires, on a la formule :

$$\iint_{I\times I'} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{C(I\times I')} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

où C est l'application réciproque de $P : (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ définie à la proposition 5.3.4 page 99.

Dém : On utilise la formule donnée page 99 pour $J_n\times J'_n$ où (J_n) et (J'_n) sont deux suites croissantes de segments de réunion respectives I et I', $f \geqslant 0$:
avec $C(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$, on a

$$\iint_{J_n\times J'_n} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{C(J_n\times J'_n)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

on passe à la limite quand $n \to +\infty$ puis on étend la propriété au cas des fonctions à valeurs réelles et complexes.
Le seul ennui ici est que, en général, $C(J_n\times J'_n)$ n'est pas un produit de segment, on admet cependant que ce résultat reste valable ■
Questions

(i) Sur $I = I' = [a, +\infty[$ $(a > 0)$, chercher un critère d'intégrabilité pour la fonction $f(x, y) = \dfrac{1}{x^\alpha y^\beta}$.

(ii) Même question sur $I = I' =]0, a]$.

(iii) Montrer que $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}_+^2)$. En faisant un changement de variables, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(iv) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2)$ telle que

(a) $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ f(.,t) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}_+),\ t \mapsto \int_0^{+\infty} |f(x,t)|\,\mathrm{d}x \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}_+)$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x,.) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}_+),\ x \mapsto \int_0^{+\infty} |f(x,t)|\,\mathrm{d}t \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}_+)$

montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$.

6.3.2 Intégrales doubles sur une partie élémentaire

Définition 6.3.4. ***Partie élémentaire***
Une partie A du plan $\mathbb{R}^2$ est dire élémentaire ssi$_{déf}$ elle admet les 2 définitions suivantes :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$$
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leqslant y \leqslant d,\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$$

où $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{C}([a,b])^2$ vérifient $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ pour $x \in]a,b[$ et $(\psi_1, \psi_2) \in \mathcal{C}([c,d])^2$ vérifient $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ pour $y \in]c,d[$.

Proposition 6.3.5. *Si A est une partie élémentaire alors, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe (α, β) deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^2$, nulles en dehors d'une partie bornée et telles que*

$$\alpha \leqslant 1_A \leqslant \beta \text{ et } \iint_{\mathbb{R}^2} (\beta - \alpha) \leqslant \varepsilon$$

Dém : Soit $\eta > 0$, on prolonge les fonctions φ_1 et φ_2 sur l'intervalle $[a - \eta, b + \eta]$ par $\varphi_i(x) = \varphi_i(a)$ sur $[a - \eta, a]$ et par $\varphi_i(x) = \varphi_i(b)$ sur $[b, b + \eta]$. On définit les ensembles $C_\eta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a + \eta \leqslant x \leqslant b - \eta,\ \varphi_1(x) + \eta \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) - \eta\}$ et $B_\eta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a - \eta \leqslant x \leqslant b + \eta,\ \varphi_1(x) - \eta \leqslant y \leqslant \varphi_2(x) + \eta\}$.
On pose alors

$$\alpha(x,y) = \frac{\mathrm{d}((x,y), A^c)}{\mathrm{d}((x,y), C_\eta) + \mathrm{d}((x,y), A^c)},\quad \beta(x,y) = \frac{\mathrm{d}((x,y), B_\eta^c)}{\mathrm{d}((x,y), B_\eta^c) + \mathrm{d}((x,y), A)}.$$

On vérifie que les fonctions α et β satisfont les $1^{\text{ère}}$ conditions :

- Si $(x,y) \in C_\eta$ alors $\mathrm{d}((x,y), C_\eta) = 0$ donc $\alpha(x,y) = 1$ et comme $C_\eta \subset A$, $\mathrm{d}((x,y), A) = 0$ on a aussi $\beta(x,y) = 1$.
- Si $(x,y) \in A \setminus C_\eta$ alors $\alpha(x,y) \leqslant 1$ et $\beta(x,y) = 1$.
- Si $(x,y) \in A^c \cap B_\eta$ alors $\alpha(x,y) = 0$ et $\beta(x,y) \geqslant 0$.

- Enfin, si $(x,y)\in B_\eta^c$ alors $\alpha(x,y)=\beta(x,y)=0$.

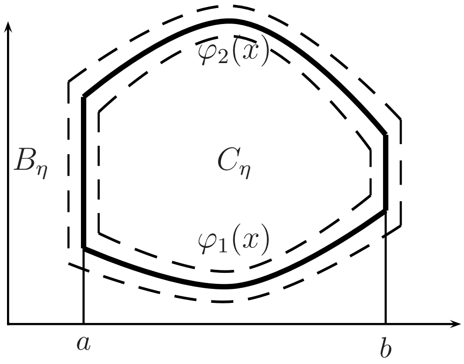
On a $\beta-\alpha=\begin{cases}0 & \text{sur } C_\eta\\ 0 & \text{sur } B_\eta^c\end{cases}$ et $\beta-\alpha\leqslant 1$ sur $B_\eta\cap C_\eta^c$ d'où

$$\iint_{\mathbb{R}^2}(\beta-\alpha)\leqslant\iint_{B_\eta\cap C_\eta^c}1\leqslant 2\eta(b-a)+4\eta[\max(\varphi_2)-\min(\varphi_1)]$$

et on prend η suffisamment petit ■

e pense que cette démonstration n'est pas réellement exigible, il faut quand même rester raisonnable.

On obtient à peu près le dessin ci-contre :



Théorème 6.36. Intégrale double sur A
Soit $f\in\mathcal{C}(A)$ où A est une partie élémentaire, $\widehat{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ obtenue en prolongeant f par 0 sur le complémentaire de A alors les intégrales

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \text{ et } \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

ont un sens et prennent la même valeur.
On définit alors l'intégrale double de f sur A par $\displaystyle\iint_A f=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ par exemple.

Dém : On commence par le cas $f\geqslant 0$, et on prolonge f à une fonction F continue sur $\mathbb{R}^2$, nulle en dehors d'un compact et telle que $F.1_A=f=\widehat{f}.1_A$
(prendre par exemple

$$F(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & \text{si } (x,y)\in A,\\ f(x,\varphi_2(x))\times(\varphi_2(x)+1-y) & \text{si } \varphi_2(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)+1,\ a\leqslant x\leqslant b\\ f(x,\varphi_1(x))\times(-\varphi_1(x)+1+y) & \text{si } \varphi_1(x)\geqslant y\geqslant\varphi_2(x)-1,\ a\leqslant x\leqslant b\\ F(b,y)\times(b+1-x) & \text{si } b\leqslant x\leqslant b+1\\ F(a,y)\times(-a+x+1) & \text{si } a-1\leqslant x\leqslant a\end{cases}$$

0 ailleurs)
et on prouve que F est continue—faire un dessin—et $\|F\|_\infty=\|f\|_\infty$...).
On a alors $\alpha F\leqslant\widehat{f}\leqslant\beta F$ d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(x,y)F(x,y)\,\mathrm{d}y\leqslant\underbrace{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}y}_{=g(x)}\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(x,y)F(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

g est continue, positive, intégrable (car elle est nulle en dehors d'un compact) et $\iint_{\mathbb{R}^2} \alpha F \leqslant \int_{\mathbb{R}} g \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} \beta F$ et on fait de même avec $h(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ ce qui donne les inégalités $\iint_{\mathbb{R}^2} \alpha F \leqslant \int_{\mathbb{R}} h \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} \beta F$. On fait alors les différences d'où

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\alpha - \beta)F \leqslant \int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} h \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} (\beta - \alpha)F$$

i.e. $\forall \varepsilon > 0$, $\left|\int_{\mathbb{R}} g - \int_{\mathbb{R}} h\right| \leqslant \varepsilon \|f\|_\infty$ d'où l'égalité. On généralise alors au cas où f est réelle puis f complexe ■

Là aussi, je pense que cette démonstration n'est pas réellement exigible, il faut quand même rester raisonnable.

DÉFINITION 6.3.5. ***Aire d'une partie élémentaire***
$v_2(A) = \iint_A 1 = \iint_{\mathbb{R}^2} 1_A$ est appelé aire de A (v_2 pour volume en dimension 2).

DÉFINITION 6.3.6. ***Partie simple***
Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$, on dit que A est une partie simple ssi$_{\text{déf}}$ A est la réunion finie de parties élémentaires dont les intérieurs sont 2 à 2 disjoints i.e. $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ où A_i est une partie élémentaire et où $i \neq j \Rightarrow \mathring{A}_i \cap \mathring{A}_j = \emptyset$.

DÉFINITION 6.3.7. ***Intégrale sur une partie simple***
Soit A une partie simple, on écrit $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ où les A_i sont des parties élémentaires, $f \in \mathcal{C}(A)$, on définit $\iint_A f = \sum_{i=1}^{n} \iint_{A_i} f$ et on admet que cette définition est indépendante du découpage de A en parties élémentaires.

***Remarque* 6.3.5.** *Si $A = A_1 \cup A_2$ est une partie simple et A_1, A_2 des parties élémentaires alors $1_A = 1_{A_1} + 1_{A_2} - 1_{A_1 \cap A_2}$. or $A_1 \cap A_2$ est une portion de courbe d'aire nulle d'où la définition suivante.*

DÉFINITION 6.3.8. ***Aire d'une partie simple***
Soit A une partie simple, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ où les A_i sont des parties élémentaires, on définit l'aire de A comme

$$v_2(A) = \iint_A 1 = \sum_{i=1}^{n} \iint_{A_i} 1 = \sum_{i=1}^{n} v_2(A).$$

PROPOSITION 6.3.6. *Si A est la réunion de parties simples B_i, $i \in [\![1,p]\!]$ dont les intérieurs sont 2 à 2 disjoints alors*

$$v_2(A) = \sum_{i=1}^{p} v_2(B_i).$$

Dém : On écrit $B_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} A_{ij}$ où les A_{ij} sont des parties élémentaires ce qui donne $A = \bigcup_{i,j} A_{ij}$.

Montrons que les intérieurs des A_{ij} sont disjoints :
On utilise tout d'abord la propriété suivante : si A et B sont deux sous-ensembles d'un espace vectoriel normé alors

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}},$$

par définition, $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$ est le plus grand ouvert contenu dans $A \cap B$ or $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$ d'où l'inclusion annoncée. Cette propriété se généralise au cas d'une intersection d'une famille finie.

- Si $i_1 \neq i_2$ on a alors

  $$\emptyset = \mathring{B}_{i_1} \cap \mathring{B}_{i_2} \supset \left(\bigcup_{j_1} \mathring{A}_{i_1 j_1} \right) \cap \left(\bigcup_{j_2} \mathring{A}_{i_2 j_2} \right) \supset \mathring{A}_{i_1 j_1} \cap \mathring{A}_{i_2 j_2}$$

  donc $\mathring{A}_{i_1 j_1} \cap \mathring{A}_{i_2 j_2} = \emptyset$.

- Si $i_1 = i_2$ alors $\mathring{A}_{i_1 j_1} \cap \mathring{A}_{i_2 j_2} = \emptyset$ par hypothèse.

On en déduit que A est une partie simple et que

$$\begin{aligned} v_2(A) = \sum_{i,j} v_2(A_{ij}) &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n_j} v_2(A_{ij}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} v_2(B_i) \ \blacksquare \end{aligned}$$

Le théorème de changement de variables dans un cas plus général que ce qui a été vu.

THÉORÈME 6.37. Changement de variables dans les intégrales doubles
Soit f une fonction continue sur A une partie simple de $\mathbb{R}^2$, φ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de B sur $\varphi(B) = A$ alors

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_B f(\varphi(u,v))|\det J_\varphi(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Dém : Théorème admis. On peut détailler ce théorème de la façon suivante : soit $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ (notations commodes mais fallacieuses) alors

$$\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{(x(u,v),y(u,v))\in A} f(x(u,v),y(u,v)) \left| \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right| (u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

et le problème souvent dans ce théorème et de déterminer l'ensemble B $\blacksquare$

Ce théorème s'applique alors dans les deux cas qui ont été traités dans le cours de première année i.e. le changement de variable affine et le passage en polaires.

Questions :

(i) Calculer $I = \iint_E (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où E est l'intérieur de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$.

(ii) Calculer $I = \iint_E (MF + MF')^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où E est l'intérieur de l'ellipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} \leqslant 1$ et $F(1,0)$ et $F'(-1,0)$ sont les foyers de cette même ellipse (on prendra des ellipse homofocales de foyers F et F').

(iii) Soit $A = [a,b]\times[c,d]$, on pose
$\varphi_1(x,y) = (y,x)$, $\varphi_2(x,y) = (x+y,y)$, $\psi_\alpha(x,y) = (x,\alpha y)$.
Montrer la formule du changement de variables dans le cas où $\varphi \in \{\varphi_1, \varphi_2, \psi_\alpha\}$ à l'aide du théorème de Fubini. En déduire la formule dans le cas plus général où $\varphi \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

6.4 Courbes d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Cette section est reprise en deuxième année dans le but de consolider les connaissances sur les notions abordées en première année ainsi que leur extension au cas d'un espace vectoriel normé F de dimension finie.

6.4.1 Courbes paramétrées

Cf paragraphe 2.3.1. des révisions du cours de première année, on remplace $\mathbb{R}^2$ par F.

Définition 6.4.1. ***Courbes $\mathcal{C}^k$-équivalentes***
Deux courbes paramétrées (I,f) et (J,g) de classe $\mathcal{C}^k$ sont dit $\mathcal{C}^k$-équivalentes ssi$_{\text{déf}}$ il existe $\theta \in \mathcal{C}^k(I)$ bijective de I sur J vérifiant $\theta^{-1} \in \mathcal{C}^k(J)$ (on dit que θ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme) et telle que $f = g \circ \theta$.

Définition 6.4.2. ***Arc géométrique, paramétrage admissible***
L'ensemble des courbes paramétrées de classe $\mathcal{C}^k$ qui sont toutes équivalentes est appelé arc géométrique de classe $\mathcal{C}^k$.
Si Γ est un arc géométrique, tout élément de Γ est appelé paramétrage admissible.

***Remarque* 6.4.1.**

(i) *On peut dire qu'un arc géométrique est une façon de décrire le support $f(I)$.*

(ii) *On pourra orienter un arc géométrique en choisissant un paramétrage admissible (I,f) et en posant $\Gamma^+ = \{(J,g) \in \Gamma \mid \theta' > 0\}$ où θ a été défini ci-dessus (on pourra alors définir Γ^- et obtenir $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$).*

(iii) *Les notions de points régulier et birégulier ne dépendent pas du paramétrage admissible choisi.*
Dém : On rappelle tout d'abord que

- *un point régulier (pour un arc géométrique de classe $\mathcal{C}^1$) est un point $M = f(t)$ tel que $f'(t) \neq 0$ (on dit aussi que M n'est pas stationnaire)*
- *et qu'un point birégulier (pour un arc géométrique de classe $\mathcal{C}^2$) est un point $M = f(t)$ tel que $(f'(t), f''(t))$ est une famille libre.*

Dans le premier cas, si (I, f) et (J, g) sont deux paramétrages admissibles, on a $f(t) = g(\theta(t))$ donc $f'(t) = g'(\theta(t)).\theta'(t)$ avec $\theta'(t) \neq 0$ donc, en posant $u = \theta(t)$

$$f'(t) \neq 0 \Leftrightarrow g'(u) \neq 0.$$

Dans le deuxième cas on a $f''(t) = g''(\theta(t))\theta'(t)^2 + g'(\theta(t))\theta''(t)$, avec les mêmes notations, soit $f''(t) \in \mathrm{Vect}(g'(u), g''(u))$ (toujours avec $u = \theta(t)$). Comme $f'(t) \in \mathrm{Vect}(g'(u), g''(u))$ (on vient de le voir dans le premier cas) alors $\mathrm{Vect}(f'(t), f''(t)) \subset \mathrm{Vect}(g'(u), g''(u))$ et $\mathrm{Vect}(g'(u), g''(u)) \subset \mathrm{Vect}(f'(t), f''(t))$ par symétrie, d'où l'égalité de ces deux sous-espaces vectoriels (cf. proposition 6.4.1). On obtient alors immédiatement l'équivalence suivante :

$$(f'(t), f''(t)) \text{ libre } \Leftrightarrow (g'(u), g''(u)) \text{ libre} \blacksquare$$

Questions :

(i) Que dire d'un mouvement tel que $(f'|f'') = 0$ pour tout t ?

(ii) Comment caractériser un mouvement à accélération centrale à l'aide des vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$?

6.4.2 Étude locale d'un arc orienté Γ de classe $\mathcal{C}^k$

a) Étude qu voisinage d'un point

DÉFINITION 6.4.3. ***Demi-tangentes, tangente***
Soit $A = f(t_0)$ un point de Γ un arc géométrique orienté, si $M = f(t_0 + h)$, on dit que Γ admet une demi-tangente en A à Γ ssi$_{\text{déf}}$ $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$ admet une limite quand $h \to 0^+$. De même si $h \to 0^-$.
On dit que Γ admet une tangente à Γ s'il admet des demi-tangentes colinéaires (elles seront égales ou opposées).

THÉORÈME 6.38. **Existence de la tangente**
Si A est un point régulier alors Γ admet en A une tangente.

Dém : Soit $A = f(t_0)$ et $M = f(t_0 + h)$ alors

$$\overrightarrow{AM} = f(t_0 + h) - f(t_0) = hf'(t_0) + o(h)$$
$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|} = \frac{hf'(t_0) + o(h)}{\|hf'(t_0 + h) + o(h)\|} = \pm\frac{f'(t_0) + o(1)}{\|f'(t_0) + o(1)\|}$$
$$\to \pm\frac{f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}$$

selon le signe de h. Les deux demi-tangentes sont colinéaires donc Γ admet en A une tangente ■

Exemple : Si $f(t) = \begin{cases} (\mathrm{e}^{-1/t^2}, 0) & \text{si } t \geqslant 0 \\ (0, \mathrm{e}^{-1/t^2}) & \text{si } t < 0 \end{cases}$ alors l'arc géométrique associé possède en 0 deux demi-tangentes non colinéaires (il est pourtant de classe $\mathcal{C}^\infty$).

Dém : On sait que la fonction $u(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/t^2} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (toutes ses dérivées ont une limite en 0). Or $f(t) = (u(t), u(-t))$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. En $t = 0$ on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{\|f(h)\|} = \begin{cases} (1, 0) & \text{si } h \to 0^+ \\ (0, 1) & \text{si } h \to 0^- \end{cases}$$

donc l'arc géométrique associé ne possède pas de tangente en O ■

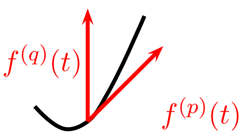
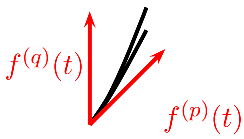
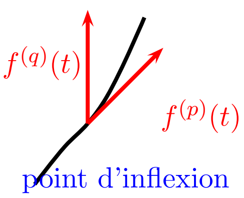
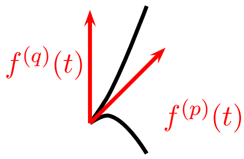
Définition 6.4.4. ***Tangente unitaire***
Dans le cas où la tangente existe, on définit la tangente unitaire comme étant la limite quand $h \to 0$ de $\dfrac{\overrightarrow{AM}}{AM}$.

Étude de la position locale de Γ par rapport à la tangente

On se ramène au cas où $A = f(0)$ par translation sur le paramètre. On suppose que f est suffisamment dérivable et que ses dérivées ne sont pas toutes nulles au point 0. On peut alors écrire la formule de Taylor avec reste d'Young :

$$f(t) = A + tf'(0) + \cdots + \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(t^k).$$

La tangente est donnée par le premier vecteur dérivée non nul $f^{(p)}(0) = e_1$.
Pour rechercher la concavité, on recherche (s'il existe) le vecteur dérivée suivant non colinéaire à e_1 que l'on note $f^{(q)}(0) = e_2$. On aura alors les cas suivants :

$q \setminus p$	impair	pair
pair	 point ordinaire	 point de rebroussement de $2^{\text{ième}}$ espèce
impair	 point d'inflexion	 point de rebroussement de $1^{\text{ière}}$ espèce

Proposition 6.4.1. *Si (I, f) et (J, g) sont deux courbes paramétrées de classe $\mathcal{C}^k$ $\mathcal{C}^k$-équivalentes ($f = g \circ \theta$) alors, si $u = \theta(t)$ on a l'égalité :*

$$\mathrm{Vect}(f'(t), \ldots, f^{(p)}(t)) = \mathrm{Vect}(g'(u), \ldots, g^{(p)}(u))$$

pour tout $p \in [\![1, k]\!]$.

Dém : On utilise le calcul des dérivées successives d'une composée d'applications : Montrons par récurrence finie sur $p \leqslant k$ que $f^{(p)}(t) = \sum_{q=1}^{p} \lambda_{p,q}(t) g^{(q)}(u)$ où $\lambda_{p,q}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-p}$.

- Si $p = 1$, on sait que $f'(t) = g'(u).\theta'(t)$ avec $\theta' = \lambda_{1,1}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.
- On suppose la propriété vraie pour $p \leqslant k-1$ alors on peut dériver l'expression $f^{(p)}(t) = \sum_{q=1}^{p} \lambda_{p,q}(t) g^{(q)}(u)$:

$$\begin{aligned} f^{(p+1)}(t) &= \sum_{q=1}^{p} \left[\lambda'_{p,q}(t) g^{(q)}(u) + \lambda_{p,q}(t) g^{(q+1)}(u)\theta'(t)\right] \\ &= \sum_{q=1}^{p+1} \lambda_{p+1,q}(t) g^{(q)}(u) \end{aligned}$$

où $\lambda_{p+1,q}(t) = \lambda'_{p,q}(t) + \lambda_{p,q-1}(t)\theta'(t)$ en posant, par convention, $\lambda_{p,0}(t) = 0$ et $\lambda_{p+1,p+1}(t) = \lambda_{p,p}(t)\theta'(t)$. On vérifie alors que $\lambda_{p+1,q}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-(p+1)}$.

On en déduit l'appartenance de $f^{(q)}(t)$ à $\mathrm{Vect}(g'(u), \dots, g^{(p)}(u))$ pour $q \leqslant p$ d'où l'inclusion $\mathrm{Vect}(f'(t), \dots, f^{(p)}(t)) \subset \mathrm{Vect}(g'(u), \dots, g^{(p)}(u))$.
Pour l'inclusion dans l'autre sens, on se sert de la symétrie $g = f \circ \theta^{-1}$ et on renverse les rôles de f et g.
Conclusion : on a bien prouvé que, pour tout $p \leqslant k$,

$$\mathrm{Vect}(f'(t), \dots, f^{(p)}(t)) = \mathrm{Vect}(g'(u), \dots, g^{(p)}(u)) \blacksquare$$

b) Branches infinies

Définition 6.4.5. ***Direction asymptotique***
Soit (I, f) un arc paramétré, on dit que $f(I)$ présente une direction asymptotique de pente $m \in \overline{\mathbb{R}}$ quand $t \to t_0$ si $\lim\limits_{t \to t_0} \|f(t)\| = +\infty$ et $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f_2(t)}{f_1(t)} = m$ (où $f = (f_1, f_2)$).

On étudie alors la limite de $f_2 - m f_1$ en t_0 si m est fini.

Définition 6.4.6. ***Asymptote, branche parabolique***
Si $f_2 - m f_1$ a une limite finie p quand $t \to t_0$, alors la droite d'équation $y = mx + p$ est dite asymptote à la courbe paramétrée (I, f).
Si $f_2 - m f_1$ a une limite infinie alors on parle de branche parabolique de pente m.

***Remarque* 6.4.2.** *Dans le cas d'une asymptote, il est souvent recommandé d'étudier la position de la courbe par rapport à cette asymptote en étudiant le signe de la quantité $f_2(t) - m f_1(t) - p$ (on opérera de même pour une courbe asymptote d'équation $F(x, y) = 0$ en étudiant l'équivalent de $F(f(t), g(t))$).*

Questions :

(*i*) Soit (I, f) un arc paramétré régulier de classe $\mathcal{C}^2$ tel que $f''(t)) \in \operatorname{Vect}(f'(t))$ pour tout $t \in I$.

Montrer que $f(I)$ est contenu dans une droite.

(*ii*) Soit (I, f) un arc paramétré birégulier de classe $\mathcal{C}^3$ tel que, pour tout t, $f'''(t) \in \operatorname{Vect}(f'(t), f''(t))$.

Montrer que $f(I)$ est contenu dans un plan.

6.4.3 Théorème du relèvement

THÉORÈME 6.39. L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ définit une bijection continue de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{U}$ privé de -1, dont l'application réciproque $u \mapsto \operatorname{Arg} u$ est continue.

Dém : Si $u = x + iy$, $x^2 + y^2 = 1$, $x \neq -1$ alors $\operatorname{Arg} u = 2 \operatorname{Arctan} \dfrac{y}{1+x}$:
en effet, $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$ où $\theta = \operatorname{Arg} u \in]-\pi, \pi[$ donc

$$\frac{y}{1+x} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2\sin\theta/2\cos\theta/2}{2\cos^2\theta/2} = \tan\theta/2$$

or $\theta/2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\operatorname{Arctan}\tan(\theta/2) = \theta/2$ d'où la formule.
Il est intéressant de savoir retrouver cette formule et pour cela penser à utiliser l'angle moitié.
Ceci nous permet de prouver que $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un homéomorphisme de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$ dont l'application réciproque est $u \mapsto \operatorname{Arg} u$ ■

***Remarque* 6.4.3.** *Lorsque u tend vers -1 en restant tel que $\operatorname{Im} u > 0$ (resp. $\operatorname{Im} u < 0$), $\operatorname{Arg} u$ admet pour limite π (resp. $-\pi$). En particulier, l'application $u \mapsto \operatorname{Arg} u$ ne se prolonge pas en une application continue sur $\mathbb{U}$. On retrouve bien un résultat que l'on avait annoncé lors de l'étude de la connexité par arcs.*

THÉORÈME 6.40. **Théorème du relèvement**
Soit $f \in \mathcal{C}^1(I)$ telle que $f(I) \subset \mathbb{U}$ alors il existe $g \in \mathcal{C}^1(I)$ à valeurs réelles et telle que $f = e^{ig}$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \geqslant 2$ alors g est aussi de classe $\mathcal{C}^k$.

Dém :

- Analyse : on cherche g tel que $f = e^{ig}$ et on pose $f = f_1 + if_2$. En remarquant que $f' = ig'e^{ig} = ig'.f$ et que $|f|^2 = f_1^2 + f_2^2 = 1 \Rightarrow f_1'f_1 + f_2'f_2 = 0$ (en dérivant), on obtient

$$\begin{aligned} g' &= -i\frac{f'}{f} = -i\frac{(f_1' + if_2')(f_1 - if_2)}{|f|^2} \\ &= -i[\underbrace{(f_1'f_1 + f_2'f_2)}_{=0} + i(f_2'f_1 - f_1'f_2)] \\ &= f_2'f_1 - f_1'f_2 \end{aligned}$$

- Synthèse : on pose $g(x) = \operatorname{Arg} f(a) + \int_a^x (f_1(t)f_2'(t) - f_1'(t)f_2(t))\,\mathrm{d}t$ et $h(x) = \mathrm{e}^{ig(x)}$.
  On a alors
  $$\begin{aligned} \frac{h'}{h} &= ig' = f_2' f_1 - f_1' f_2 \\ &= \frac{f'}{f} = \alpha(\text{notation}) \end{aligned}$$
  et $h(a) = f(a)$.
  h et f sont solutions de la même E.D. $y' = \alpha y$ avec la même condition initiale $h(a) = f(a)$ donc elles sont égales.
  Conclusion : on a prouvé qu'il existait g de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $f = \mathrm{e}^{ig}$ ■

Question
Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $f(t) \neq 0$ pour tout t.
Montrer qu'il existe h et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles telles que $f(t) = h(t)\mathrm{e}^{ig(t)}$.

6.4.4 Étude métrique d'un arc orienté

Cf paragraphe 6.1.1. et 6.1.2. des révisions du cours de première année.
On définit de même l'abscisse curviligne et la tangente unitaire. Pour un point birégulier on peut aussi définir la normale (ici F est muni d'une structure euclidienne) en choisissant le vecteur normal à la tangente unitaire contenu dans le plan $\operatorname{Vect}(f'(t), f''(t))$ tel que la composante de $f''(t)$ sur ce vecteur soit positive. Enfin l'abscisse curviligne est un paramétrage admissible.

Calcul de l'abscisse curviligne dans un espace euclidien de dimension 3
$\rightarrow$ En cylindriques : on écrit $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u} + z\overrightarrow{k}$ alors $\mathrm{d}\overrightarrow{M} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u} + r\overrightarrow{v}\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{k}$ où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur directement perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$ dans le plan xOy. On a alors

$$\mathrm{d}s^2 = \overrightarrow{\mathrm{d}M}^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2.$$

$\rightarrow$ En sphériques : on a de même $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}$ avec dans ce cas $r = OM$ et $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{OM}$.
On pose $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial\varphi}$ et $\overrightarrow{w} = -\dfrac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial\theta}$ de sorte que la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est orthonormée directe. On a donc $\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u} + r\sin\theta\,\overrightarrow{v}\,\mathrm{d}\varphi - r\overrightarrow{w}\,\mathrm{d}\theta$ d'où

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2.$$

Questions : Rechercher l'abscisse curviligne des courbes (avec un minimum de calcul)

(*i*) $r = \dfrac{a}{\operatorname{ch} m\theta}$, $z = a \operatorname{th} m\theta$ en cylindriques où $a > 0$ et $m \in \mathbb{R}$.

(*ii*) $\begin{cases} x = u\sqrt{2} + \operatorname{ch} u + \sqrt{2}\operatorname{sh} u \\ y = -u\sqrt{2} + \operatorname{ch} u + \sqrt{2}\operatorname{sh} u \\ z = -\sqrt{2}\operatorname{ch} u + 2\operatorname{sh} u \end{cases}$ (*iii*) $\begin{cases} x = \sin u \operatorname{ch} u + \cos u \operatorname{sh} u \\ y = \sin u \operatorname{sh} u - \cos u \operatorname{ch} u \\ z = 2\operatorname{sh} u \end{cases}$