EXERCICES 5/2

Exercice 1. Prouver l'égalité

$$\binom{3n}{n} = \sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{q=0}^{n-p} \binom{n}{p} \binom{n}{q} \binom{n}{p+q} \right).$$

Exercice 2. Simplifier

$$S_n = \sum_{0 \leqslant j < k \leqslant n+1} \binom{n}{j} \binom{n+1}{k}.$$

Exercice 3. Montrer que tout monoïde fini vérifiant la règle de simplification est un groupe.
Montrer que tout ensemble fini muni d'une loi de composition interne associative vérifiant la règle de simplification est un groupe.

Exercice 4. Soit E un ensemble et $*$ une loi de composition interne, associative telle que :

$$\forall (a,b) \in E^2,\ \exists (x,y) \in E^2 \mid ax = ya = b.$$

Montrer que $(E,*)$ est un groupe.

Exercice 5. Soit G un groupe, on pose $Z_0(G) = \{e\}$ et

$$Z_n(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G,\ x^{-1}y^{-1}xy \in Z_{n-1}(G)\}.$$

Montrer que $(Z_n(G))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-groupes de G.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$E_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leqslant p < q \leqslant n,\ p+q > n,\ p \wedge q = 1\}.$$

Calculer $S_n = \sum_{(p,q) \in E_n} \frac{1}{pq}$.

Exercice 7. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$

$$2^{n+1} \text{ divise } E_n = E\left[(1+\sqrt{3})^{2n+1}\right].$$

(On pourra chercher une relation de récurrence vérifiée par E_n, E_{n-1} et E_{n-2}.)

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, N le nombre de diviseurs de n, P le produit de ces diviseurs.
Donner une relation en n, N et P.

Exercice 9. Montrer que

$$n! = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{p^i}\right]}$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f^2 = -\operatorname{Id}_E$. Si $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (a et b réels) et $x \in E$, on définit :

$$z * x = ax + bf(x).$$

Montrer que $(E, +, *)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Calculer $\dim_{\mathbb{C}} E$.

Exercice 11. Soit A un anneau, $x \in A$. S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1-x)^p = 0$, montrer que x est inversible.
Montrer aussi que $(1-x^{-1})^p = 0$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$ admettant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ comme racines distinctes.
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tels que

$$A^{(n)}P - A^{(n-1)}P' + \cdots + (-1)^n AP^{(n)} = 0.$$

Exercice 13. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$, $n \geqslant 1$. Si a est une racine complexe de P de multiplicité m avec $2m > n$ vérifier que $a \in \mathbb{Q}$.

Exercice 14. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$(X+3)P(X) = XP(X+1).$$

Exercice 15. Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ n entiers, montrer que le polynôme

$$1 + \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)^2$$

est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 16. Soient $x_1, \ldots, x_n$ n complexes tels que

$$\forall k \in [1, n],\ \sum_{i=1}^{n} x_i^k = n.$$

Montrer que : $\forall i \in [1, n]$, $x_i = 1$.

Exercice 17.

(1) Calculer de 2 manières

$$S_{n,d} = \sum_{k=1}^{n} \left[k^d(k+1)^d - k^d(k-1)^d\right]$$

(2) Montrer que

$$\forall d \in \mathbb{N}^*,\ \exists P_d \in \mathbb{R}[X] \mid \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_d(n(n+1)) = \sum_{k=1}^{n} k^{2d-1}.$$

(3) Montrer que

$$\forall d \in \mathbb{N}^*,\ \exists Q_d \in \mathbb{R}[X] \mid \forall n \in \mathbb{N},\ (2n+1)Q_d(n(n+1)) = \sum_{k=1}^{n} k^{2d}.$$

(4) Pour $d \in \{1, 2, 3\}$ calculer P_d et Q_d.

Exercice 18. Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ a toutes ses racines réelles alors $P'^2 \geqslant PP''$.
Réciproque ?

Exercice 19. Montrer que, sur $\mathbb{C}[X]$, tout polynôme P peut s'écrire

$$P = P_1(P_2)^2 \dots (P_k)^k$$

où P_i est le produit des facteurs binômes dont l'ordre de multiplicité est i (on pose $P_i = 1$ si aucune racine n'a cet ordre de multiplicité).

(1) Calculer $D_1 = P \wedge P'$ et prouver que $\dfrac{P}{D_1}$ ne contient que des racines simples. Quelles sont ces racines ?

(2) Calculer $D_2 = D_1 \wedge D_1'$. En déduire P_1. Comment obtenir P_2, P_3,...

Quelles conclusions en tirer pour la recherche des racines de P ?

Exercice 20. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 5, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

Montrer que $45 < u_{1000} < 45,1$.

Exercice 21.
Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles croissantes de limite infinie.
On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$.
Soit $E = \{a_n - b_m,\ (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$.
Prouver que E est dense dans $\mathbb{R}$.
Application : montrer que la suite $\cos(\ln n)$ est dense dans $[-1,1]$.

Exercice 22. Soit (u_n) une suite de termes positifs telle que

$$\lim_{n\to+\infty} n(u_n + u_{2n}) = 1.$$

Montrer que $v_n = nu_n$ admet une limite finie.

Exercice 23. Trouver $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$f(2x+1) = f(x)$$

Exercice 24.
Soit $E = \{f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ continue en } 0\}$, on définit

$$\varphi\ : f \in E \mapsto g = \varphi(f) \text{ où } g(x) = f(x) + f(2x).$$

Prouver que φ est injective.

Exercice 25. Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle qu'il existe $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \alpha(|f(x) - x| + |f(y) - y|).$$

Prouver que f possède un unique point fixe.

Exercice 26. Soit $a \in \mathbb{R}$, $z = 8a^2 - (1+a^2)^2 + 4a(1-a^2)i$.
Chercher les racines $4^{\text{ième}}$ de z.
Étudier le cas où $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 27. Soit $S^{(0)} = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et α une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité. On pose

$$u_i = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{ij} z_j \text{ et } T^{(0)} = (u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})..$$

(1) Exprimer z_j en fonction des u_i.

(2) On définit par récurrence : $z_i^{(p)} = \dfrac{1}{2}\left[z_i^{(p-1)} + z_{i+1}^{(p-1)}\right]$ (en prenant $z_n = z_0$) et on pose $T^{(p)} = (u_0^{(p)}, u_1^{(p)}, \ldots, u_{n-1}^{(p)})$ à partir des $(z_i^{(p)})$.
Calculer $T^{(1)}$ en fonction de $T^{(0)}$, faire de même avec $T^{(p)}$.
Déterminer $\lim\limits_{p\to+\infty} T^{(p)}$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} S^{(p)}$.
En donner une interprétation géométrique.

Exercice 28. Soit $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, on pose $z = u + iv$.
Si $|z|^2 = u^2 + v^2$ alors prouver que soit $z = 0$ soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 29. Soit $P = n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)+1+i}{k(k+1)+1-i}$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n$.

EXERCICE 30.
Soit $f\ : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{2}(z + z^{-1})$.

(1) Chercher $f(D)$ où D est une droite passant par O.
(2) Chercher $f(C)$ où C est un cercle de centre O.

EXERCICE 31.
Soit $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $|b_i| \leqslant 1$ pour tout i.
Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que

$$\forall k \in [1, n],\ |\varepsilon_1 b_1 + \varepsilon_2 b_2 + \cdots + \varepsilon_k b_k| \leqslant \sqrt{3}.$$

EXERCICE 32.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrer que, si $(F_i)_{i \in [1,p]}$ est une famille finie de sous-espace vectoriels tous distincts de E alors

$$\bigcup_{i=1}^{p} F_i \neq E.$$

EXERCICE 33.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. On suppose que $v \circ u = 0$ et que $u + v$ est surjective.
Montrer que $\mathrm{Rg}(u) + \mathrm{Rg}(v) = n$.

EXERCICE 34.
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AMB = 0$$

montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 35. Soit P la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ d'un projecteur de $\mathbb{R}^n$. On définit

$$\Psi\ : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto PX + XP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Chercher $\mathrm{Tr}(\Psi)$.

Exercice 36. Soit $K = \{X = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}\}$ et $T = \{Y = \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1/u \end{pmatrix},\ u > 0,\ v \in \mathbb{R}\}$.
Prouver que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = KT$ et prouver que cette décomposition est unique.

Exercice 37.
Soit $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_1 & a_2 & & a_n \end{pmatrix}$. Chercher une C.N.S. pour que M soit inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 38.
Soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = 0$ et $\mathrm{Rg}(A) = 2n$.
Prouver que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 39. Si $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, calculer $\det(m_{ij})$ où $m_{ij} = (a_i + b_j)^n$, $(i,j) \in [0,n]^2$.

Exercice 40.
Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t+t^2}.$$

Vérifier que N est bien définie.
N est-elle une norme ? Si oui, préciser la sphère unité.

Exercice 41.
Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $\varphi : f \in E \mapsto e^f \in E$.
Montrer que φ est continue.

Exercice 42.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et $f : E \to E$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant M.$$

(1) Montrer que, si $M = 0$ et si f est bornée sur un ouvert non vide, alors f est linéaire et continue.
(2) On suppose f continue et E complet. En étudiant la suite $g_n(x) = 2^{-n} f(2^n x)$, montrer que f se décompose de manière unique en somme d'une fonction linéaire et d'une fonction bornée.

Exercice 43.
Soit $E_p = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Rg}(A) \geqslant p\}$. E_p est-il
(i) ouvert, (ii) fermé, (iii) dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 44. Soit $A \subset E$ où E est un espace vectoriel normé, on note $u(A) = \overline{\mathring{A}}$ et $v(A) = \mathring{\overline{A}}$.

(1) Montrer que u et v sont des applications de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même qui respectent l'inclusion.
(2) Montrer aussi que $u^2 = u$ et $v^2 = v$.
(3) En déduire que, à partir d'un ensemble $A \subset E$, en prenant successivement l'adhérence et l'intérieur (ou le contraire), on ne peut avoir au maximum que 7 ensembles distincts.

Exercice 45. Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P a n racines réelles simples.
Soit $Q(X) = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_0 \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que, si $|b_i - a_i| \leqslant \eta$ pour tout i, alors Q a toutes ses racines réelles simples.
η peut être très petit comme le montre l'exemple du polynôme de Wilkinson

$$P(X) = \prod_{k=1}^{20}(X - k) + 10^{-9}X^{19}$$

qui a pour racines (en arrondissant à 2 décimales)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	9,99	11,05	11,83

$13,35 \pm 0,53i$	$15,46 \pm 0,9i$	$17,66 \pm 0,7i$	19,23	19,95

Exercice 46. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des rationnels de $[0,1]$. On pose $L(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n f(q_n)$ pour $f \in E$.

(1) Prouver que L est une forme linéaire continue sur E.
(2) Montrer que $\sup_{\|f\| \leqslant 1} |L(f)|$ n'est pas atteint.

Exercice 47. Soit $E = \ell^\infty$ muni de la norme infinie. On note $F = \ell^1$ sous-espace vectoriel de E muni de la norme 1.

(1) Si $u \in E$ et $v \in F$, prouver que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est absolument convergente.
(2) On définit $f_v : u \in E \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \in \mathbb{R}$ (où v désigne la suite (v_n) de F). Montrer que f_v appartient au dual fort E' de E (i.e. l'ensemble des formes linéaires continues sur E).
(3) Trouver φ une isométrie bijective de F sur E'

Exercice 48. Soit V un espace euclidien et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de V telle que : $i \neq j \Rightarrow (e_i|e_j) \leqslant 0$.
Soit $x \in V$ vérifiant : $\forall i \in [1, n]$, $(x|e_i) \geqslant 0$.
Montrer que les coordonnées de x dans (e_i) sont positives.
(On pourra montrer au préalable que, si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille de vecteurs tels qu'il existe θ une forme linéaire vérifiant $\theta(x_i) > 0$ pour tout i et si $(x_i|x_j) \leqslant 0$ alors (x_i) est une famille libre.)

Exercice 49. Soient E un espace euclidien et $f : E \to E$ telle que $\forall (x, y) \in E^2$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.
Montrer que f est la composée d'une translation et d'un automorphisme orthogonal.

Exercice 50. Soit (a, b, c) les longueurs des cotés d'un triangle d'aire S. Montrer que

$$S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Cas d'égalité ?

Exercice 51. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$. On dit que la famille $(x_i)_{i\in[1,n]}$ est régulière ssi

$$\forall i \in [1,n],\ \|x_i\| = 1,\ \forall (i,j) \in [1,n]^2,\ i \neq j,\ \|x_i - x_j\| = 1.$$

(1) Prouver qu'il existe des familles régulières sur E et que ce sont des bases.
(2) Si $(x_i)_{i\in[1,n]}$ est régulière et si $(e_i)_{i\in[1,n]}$ est la base orthonormée de Schmidt associée, déterminer la matrice de passage de $(e_i)_{i\in[1,n]}$ à $(x_i)_{i\in[1,n]}$.

Exercice 52. Soit E un espace euclidien de dimension $n > 0$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on dit que la famille $(x_1,\dots,x_p) \in E^p$ est obtusangle ssi $i \neq j \Rightarrow (x_i|x_j) < 0$.
(1) Montrer qu'une famille obtusangle ne peut pas avoir strictement plus de $n+1$ éléments.
(2) Soit φ l'angle (que l'on suppose constant) entre x_i et x_j pour $i \neq j$. Montrer que $1 + (p-1)\cos\varphi \geqslant 0$ et qu'il y a égalité si $p = n+1$.

Exercice 53. Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}, \quad 0 < a < b \text{ et } u_0 > 0.$$

(1) Étudier la convergence de la suite $\ln\left(n^{b-a}u_n\right)$. Trouver une C.N.S. pour que $\sum u_n$ converge.

(2) Si $b-a>1$, prouver l'existence de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(u_{n+1}-u_n) = S$ et transformer S. En déduire la calcul de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

EXERCICE 54.
Soit (a_n) une série à termes positifs décroissante et (p_n) une suite d'entiers strictement croissante. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} - p_n < M(p_n - p_{n-1}).$$

Montrer que les séries $\sum a_n$ et $\sum (p_{n+1} - p_n) a_{p_n}$ sont de même nature.

EXERCICE 55.
Soit (u_n) une suite à termes positifs, décroissante telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = C \text{ et } u_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Montrer que $\forall x \in]0, C[,\ \exists (n_k)$ strictement croissante telle que $x = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{n_k}$.

EXERCICE 56.
Soit (a_n) une suite de $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. On suppose que $\exists \lambda > 0$, $\exists \alpha > 1$ tel que $a_{n+1} - a_n \sim -\lambda a_n^{\alpha}$.
Étudier la nature de la série $\sum a_n$.

EXERCICE 57.
Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une injection, on pose $u_n = \dfrac{f(n)}{n^2}$, $n \geqslant 1$.
Nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 58. Soit $(z_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes non nuls tels que
$$i \neq j \Rightarrow |z_i - z_j| > 1.$$
Montrer que I est dénombrable et que, pour $\alpha > 2$, la famille $(|z_i|^{-\alpha})_{i\in I}$ est sommable (recouvrir le plan complexe par des carrés de coté $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$).

Exercice 59. Soit $r_n = \sum\limits_{p=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{p-1}}{p^\alpha}$ avec $\alpha > 0$ (!).

(1) Trouver la nature de la série $\sum r_n$.

(2) Montrer que, pour $\alpha > 1$, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha-1}}$$

Exercice 60. Soit (a_n) une suite de réels telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = 0$.

(1) Prouver que $\sum\limits_{k=1}^{n} k a_k = o(n)$.

(2) On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n a_n \geqslant -c$.
Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} k|a_k| \leqslant 2cn + o(n).$$

(3) On pose enfin $t_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \dfrac{|a_k|}{k}$.

a) Existence de t_n ?

b) Montrer qu'il existe $\beta > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $t_n \leqslant \dfrac{\beta}{n}$.

Exercice 61. Soit (a_n) une suite de réels telle que $|a_n| < 1$ pour tout n. On pose $P_n = \displaystyle\prod_{q=1}^{n}(1+a_q)$. Étudier les implications entre les propriétés suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P_n > 0$.

(ii) $\sum a_n$ et $\sum a_n^2$ convergent.

(iii) $\sum a_n$ et $\sum a_n^2$ convergent ou $\sum a_n$ et $\sum a_n^2$ divergent.

Que penser de l'exemple suivant : $a_1 = a_2 = 0$, $a_{2n-1} = -\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, $a_{2n} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$?

Exercice 62. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\alpha)}{k+n}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

On fera intervenir la somme $S_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\alpha)$.

Exercice 63.

Soit $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$, on suppose que $g(x) = \dfrac{f(\lambda x) - f(x)}{x}$ a une limite en 0 et que f est continue en 0.

Prouver que f est dérivable en 0

Exercice 64. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\ g(x) = \frac{f(x+y) - f(x-y)}{2y}.$$

Trouver f.

Que se passe-t-il si l'on suppose seulement g localement bornée ?

Exercice 65. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f'' \leqslant 1\}$, on pose, pour tout f de E,

$$A(f) = f(1) - 2f(\frac{1}{2}) + f(0).$$

Montrer que $A(f)$ est majoré sur E.
Si $M = \sup\{A(f),\ f \in E\}$, déterminer M et les solutions de l'équation $A(f) = M$.

Exercice 66. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) \leqslant (f(x))^2.$$

Prouver que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f''(x) \leqslant (f'(x))^2.$$

Exercice 67. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0,\ f(1) = 1,$ $f'(0) = f'(1) = 0.$ Montrer que

$$\exists c \in]0,1[\mid |f''(c)| \geqslant 4.$$

Exercice 68. Soit x_n l'unique racine positive de l'équation

$$x^n + \cdots + x = 1.$$

(1) Montrer que (x_n) admet une limite l.
(2) Déterminer l'équivalent de $x_n - l$.

Exercice 69.

Soit $g \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ où I est un intervalle, si $x \in \overset{\circ}{I}$, on dit que g est pseudo-dérivable en x ssi $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x-h)}{2h}$ existe (limite que l'on note $\tilde{g}(x)$).

(1) Quelles sont les implications entre g dérivable en x et g pseudo-dérivable en x ?

(2) a) On suppose que g vérifie

$$\forall x \in \overset{\circ}{I},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall h \in [0,\varepsilon],\ g(x+h)-g(x-h) \geqslant 0.$$

Montrer que g est croissante.

b) On suppose que $\forall x \in \overset{\circ}{I}$, $\tilde{g}(x) \geqslant 0$. Montrer que g est croissante.

Exercice 70.

À l'aide de la convexité, prouver que

$$\forall t \in [0,1],\ \frac{1-t}{n^t} \leqslant \frac{(1-t)(2-t)(\ldots)(n-t)}{n!} \leqslant \frac{1}{(n+1)^t}.$$

Exercice 71.

Soit f une fonction dérivable et convexe sur $[0,+\infty[$.

(1) Montrer que $\varphi(x) = f(x) - xf'(x)$ est décroissante.

(2) Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = b$, montrer qu'il existe une asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$.

Exercice 72.

Soit $f\ : I \to \mathbb{R}_+^*$ où I est un intervalle. Montrer que

$$(\ln f \text{ convexe}) \Leftrightarrow (\forall a \in \mathbb{R},\ e^{ax} f(x) \text{ convexe})$$

Exercice 73.
Soit f une application de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f+f''\geqslant 0$. Montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)+f(x+\pi)\geqslant 0.$$

Exercice 74. On pose $u_n=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$. Montrer que
$$u_n=\ln n+K+o(1)$$
où K est une constante que l'on explicitera à l'aide d'une intégrale.

Exercice 75. Soit $f\in\mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$, convexe. Les tangentes en A et B au graphe de f se coupent en T.
Prouver que $\overset{\frown}{AB}\leqslant AT+TB$.

Exercice 76. Déterminer $f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ telle que
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}+\int_0^1 f(x^2)^2\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 77. Soit $E=\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\mid \lim_{n\to+\infty}x_n=0\}$ muni de la norme $\|x\|=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$.

(1) Montrer que $(E,\|.\|)$ est un espace de Banach.

(2) Soit $e_k=(\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$, prouver que $x=\sum_{n=0}^{+\infty}x_ne_n$ où $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$.

(3) Si $u\in\mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})$, prouver que $\sum_{n=0}^{+\infty}|u(e_n)|$ converge.

Étudier la réciproque : si $\sum a_n$ est A.C. alors $\exists! u\in\mathcal{L}_c(E,\mathbb{R})$ tel que $u(e_n)=a_n$.
Donner l'expression de $u(x)$ et calculer $\|u\|$.

Exercice 78. Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissantes, vérifiant $f(x+1) = f(x) + 1$ pour tout x.

(1) Munir E d'une distance appropriée associée à la convergence uniforme. Montrer que E muni de cette distance est une partie complète.

(2) Soit φ une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} \exists k > 1 \mid \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) \geqslant h \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x+1) = \varphi(x) + n \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $f \in E$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (\varphi \circ f)(x) = f(nx)$$

Exercice 79.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, prouver qu'il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leqslant 2n$ tel que

$$P_n^{(k)}(0) = 1 \text{ si } k \in [0, n]$$
$$P_n^{(k)}(1) = P_n(1) \text{ si } k \in [1, n]$$

(2) Montrer que $P_n \xrightarrow[K]{CU}$ vers une fonction à déterminer.

Exercice 80. Soit $f\ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |f(x)| < |x| \tag{1}$$

(1) Montrer que

$$\forall (\varepsilon, M) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \exists k \in]0,1[,\ \forall x \in [\varepsilon, M],\ |f(x)| \leqslant k|x|. \tag{2}$$

(2) On pose $f_n = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (n fois). Si $x \in \mathbb{R}$, étudier la convergence de la suite $(f_n(x)$.

(3) Montrer que $f_n \xrightarrow[{[-M,M]}]{C.U.} 0$ pour tout $M > 0$.

Exercice 81. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (g_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\dots\cos\frac{x}{2^n}.$$

Exercice 82. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on définit

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{n}f(\frac{k}{n})\right).$$

(1) Étudier la convergence simple de la suite (u_n).
(2) Étudier la convergence uniforme de cette même suite.
(3) Donner un équivalent de $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p(x) - u_n(x)$ lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 83. Soit $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ où

$$u_n(x) = \ln n + \frac{x}{n} - \ln(n+x).$$

(1) Chercher le domaine de définition de S.
(2) Soit $t(x) = e^{S(x)}$, montrer que

$$\frac{t(x+1)}{t(x)} = (1+x)e^{\gamma}$$

où γ est la constante d'Euler ($\gamma = \lim\limits_{N\to+\infty}\left(\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \ln N\right)$).
(3) On pose $A(x) = \frac{1}{x}e^{-\gamma x}t(x)$.
Calculer $A(x+1)$ en fonction de $A(x)$ et x.
Montrer que $\ln(A(x)$ est convexe.

Exercice 84. Étudier la convergence uniforme de
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}.$$
Chercher l'équivalent de f quand $x \to 0$.

Exercice 85. Soit φ une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ strictement décroissante, f continue sur $[0, +\infty[$ et $A > 0$. On pose
$$u_n = \frac{\int_0^A f(t)\varphi^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^A \varphi^n(t)\,\mathrm{d}t}.$$
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = f(0)$.

Exercice 86. Trouver, pour toute fonction continue bornée,
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)\,\mathrm{d}x}{1+n^2x^2}.$$

Exercice 87.

(1) Soit $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x^\beta)}$, avec $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$. Discuter la convergence de I.

(2) On pose $g_n(\lambda) = \displaystyle\int_1^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+\lambda x^\beta)}$ pour $\lambda > 0$. Discuter la convergence uniforme de (g_n) (distinguer les cas $\alpha > 1$, $\alpha \leqslant 1$).

(3) On définit, pour $\alpha < 1$
$$g(\lambda) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+\lambda x^\beta)} \text{ et } A = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x^\beta)}.$$
Calculer $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} \left[g(\lambda) - \lambda^{\frac{\alpha-1}{\beta}} A\right]$.

Exercice 88.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on suppose que, pour $A > 0$, $\dfrac{f(t)}{t}$ est intégrable sur $\{t \in \mathbb{R} \mid |t| \geqslant A\}$. Montrer que

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin[a(t-x)]}{t-x}\,\mathrm{d}t = f(x)\pi$$

en utilisant la propriété $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 89.

Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{(a+\sin t)^3}$

(on utilisera le résultat : $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$).

Exercice 90.

Soit $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)\mathrm{d}\theta$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $f^2(x) + g(x)$ est constant et retrouver la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 91.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0,+\infty[,\mathbb{R})$, $f > 0$ et $\displaystyle\lim_{+\infty}\frac{f'}{f} = 0$. On suppose que (a_n) est une suite de réels > 0 qui tend vers $a \neq 0$.

Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$, montrer que

$$a\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \sim \sum_{p=0}^{n} a_p f(p).$$

EXERCICE 92.
On définit $\ln_p = \ln_{p-1} \circ \ln$ (logarithme itéré). Quel est, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, la nature de $\sum u_n$ où

$$u_n = \frac{1}{n \ln n \ln_2(n) \ldots \ln_{p-1}(n)(\ln_p(n))^{\alpha}}.$$

EXERCICE 93.
Soient α et β deux réels > 0, on considère la série $\sum u_n$ où

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)^{\alpha}(n+i+1)^{\beta}}.$$

Converge-t-elle dans le cas où $\alpha + \beta = 1$?
Étude des autres cas.

EXERCICE 94.
Si $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a_n = \alpha_n + i\beta_n$ où $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$.
Soient R, R_1, R_2 les rayons de convergence des séries $\sum a_n x^n$, $\sum \alpha_n x^n$, $\sum \beta_n x^n$. Montrer que $R = \min(R_1, R_2)$.

EXERCICE 95.
Soit (a_n) une suite de complexes non nuls. Comparer les rayons de convergence des séries :

$$\sum a_n z^n \text{ et } \sum \frac{1}{a_n} z^n.$$

EXERCICE 96.
Étudier la série $\sum a_n x^n$ où

$$a_n = 1 + 3\varphi(\frac{n}{3}) - 4\varphi(\frac{n}{4})$$

où $\varphi(t) = t - [t]$. Donner l'expression de sa somme.

Exercice 97. Soient a, b, λ, μ, ν des réels non nuls, on considère les séries

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{a + bx^{2n-1}} \text{ et } g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda x^n}{\mu + \nu x^{2n}}.$$

(1) Si ces sommes sont définies dans un voisinage de 0, donner des conditions sur a, b, c, λ, μ, ν, pour qu'elles soient égales.
(2) Prouver alors qu'elles sont effectivement égales sur un voisinage de 0.

Exercice 98. Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.

(1) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$, en déduire une expression de a_n.
(2) Calculer $\mathrm{Card}\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^2 = \mathrm{Id}\}$.

Exercice 99. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n+n^2 ix}$, prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
Que penser de la série de Taylor de f ?

Exercice 100. Chercher les développement en série entière de

$$f(x) = \cos(\sqrt{2}\,\mathrm{Arccos}\,x) \text{ et } g(x) = \sin(\sqrt{2}\,\mathrm{Arccos}\,x).$$

Exercice 101. Théorème de Bernstein.

(1) Soit a un réel > 0 et $g \in \mathcal{C}^\infty([-a,a],\mathbb{R})$ paire telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $g^{(2n)}(x) \geqslant 0$.
a) Montrer que $g^{(2n)}$ est croissante sur $[0,a]$.
b) Montrer qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (u,v)\ : 0 \leqslant u \leqslant v \leqslant a,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{(v-u)^n}{n!} g^{(n)}(u) \leqslant M.$$

c) Montrer que $I_n(x) = g(x) - \sum\limits_{p=0}^{n} \dfrac{x^{2p}}{(2p)!} g^{(2p)}(0)$ est une fonction paire, positive sur $[-a,a]$ et qu'elle s'écrit

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} g^{(2n+2)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

d) En déduire que

$$\forall x \in [-a,a],\ g(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} g^{(2p)}(0).$$

(2) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([-a,a],\mathbb{R})$ telle que $f^{(2n)} \geqslant 0$ (on ne suppose pas f paire). En étudiant la partie paire de f, prouver que

$$\forall x \in [-a,a],\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0).$$

Exercice 102.
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui admettent une limite en $+\infty$.
Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme T de E tel que

$$\forall f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = f(x+1).$$

Exercice 103. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée s'écrivant $\begin{pmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \dots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_n & \dots & b_n & a_n+b_n \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $\det A$.
(2) Si $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ et si, pour tout i, $b_i > 0$, montrer que toutes les valeurs propres sont réelles.

Exercice 104. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que les hyperplans vectoriels stables par A admettent l'équation $y_1x_1 + \cdots + y_nx_n = 0$ où $(y_1, \ldots, y_n)$ est vecteur propre de A^{T}.
Réciproque ?

Exercice 105. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la suite de matrice par récurrence avec

$$A_0 = I_n,\ \forall k \in [1, n],\ A_k = AA_{k-1} - \frac{1}{k}\operatorname{Tr}(AA_{k-1})I_n.$$

Montrer que $A_n = 0$ (on démontrera et utilisera la propriété $(\det M(t))' = \operatorname{Tr}[M'(t)(\operatorname{com}(M(t)))^{\mathrm{T}}]$).

Exercice 106. Soient u, v, w trois endomorphismes de E, espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$, tels que $w \neq 0$ et $u \circ w = w \circ v$. Montrer que $\deg(p_u \wedge p_v) \geqslant \operatorname{Rg}(w)$.

Exercice 107. Soit $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & 0 \\ b_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall i \in [1, n]$, $a_i > |b_i| + |b_{i-1}|$ (avec $b_0 = b_n = 0$). Montrer que, si $\lambda \in \operatorname{Sp}(M)$ alors $0 < \lambda < 2\sup(a_i)$.

Exercice 108. Chercher les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}$.

Exercice 109. Si $A = (a_{ij})$ et B sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on leur associe la matrice $C = A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nn}B \end{pmatrix}$.
Montrer que, si A et B sont diagonalisables, alors C est aussi diagonalisable.

Exercice 110. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $B^p = A$.
(1) Montrer que B est aussi diagonalisable.
(2) Examiner le cas où A n'est pas inversible.

Exercice 111. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que P_u est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ ssi $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espaces stables par u.

Exercice 112. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_n$.
Montrer que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projection que l'on déterminera.

Exercice 113. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(u, v, f, \alpha, \beta) \in \mathcal{L}(E)^3 \times \mathbb{K}^2$ tel que

$$\forall i \in \{1, 2, 3\},\ f^i = \alpha^i u + \beta^i v.$$

Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 114. Soit A une matrice diagonalisable.

(1) Prouver que : $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)$ est diagonalisable.
(2) Utiliser cette méthode pour diagonaliser la matrice

$$B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 115. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, trouver l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables.
Étudier le cas de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On pourra s'aider du lemme suivant :
soit $P_n(X) = X^p + a_{p-1,n}X^{p-1} + \cdots + a_{0,n}$ une suite de polynômes unitaires réels, scindés, de degré p fixe. Si, pour tout $k \in [0, p]$, la suite $(a_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_k \in \mathbb{R}$, alors

$$P = X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \cdots + a_0$$

est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 116. Soit $A = \left(\dfrac{1}{i+j+1}\right)_{(i,j)\in[1,n]^2}$, prouver que A est définie positive.

Exercice 117. Soient (u, v) des endomorphismes symétriques positifs de E espace euclidien.
Vérifier que $0 \leqslant \operatorname{Tr}(u \circ v) \leqslant \operatorname{Tr}(u)\operatorname{Tr}(v)$.

Exercice 118. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, montrer qu'il existe une b.o.n. $(e_1, \dots, e_n)$ telle que $(Ae_1, \dots, Ae_n)$ soit une famille orthogonale.

Exercice 119. Soient A et B deux matrices symétriques réelles d'ordre n, B positive.
On suppose que, pour toute matrice unicolonne $X \neq 0$

$$X^{\mathrm{T}} B X = 0 \Rightarrow X^{\mathrm{T}} A X > 0.$$

Montrer que, pour λ assez grand, $A + \lambda B$ est définie positive.

Exercice 120. Soient u et v deux endomorphismes symétriques vérifiant

$$\forall x \in E \begin{cases} (u(x)|x) \geqslant 0 \\ (v(x))|x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que $\det(u + v) \geqslant \det u + \det v$.
Cas d'égalité ?

Exercice 121. Trouver une fonction 2π-périodique dont la série de Fourier s'écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3}$$

Exercice 122. Calculer $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$.
Soit g impaire, 2π-périodique, continue telle que

$$g_{|[0,1]} \text{ soit affine et } g_{|[1,\pi]} = S_{|[1,\pi]}.$$

À l'aide de g, prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$.
Calculer enfin $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4}$.

Exercice 123. Soit $E = \mathcal{C}(T)$ ensemble des fonctions continues, 2π-périodiques. On note F le sous-espace vectoriel de E tel que $\forall f \in F$, $\forall p \in \mathbb{Z}$, $\widehat{f}(p) = 0$. On veut prouver que $F = \{0\}$ sans utiliser le résultat du cours.
Si $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on note $P_\delta(\theta) = 1 - \cos\delta + \cos\theta$.

(1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,[P_\delta(\theta)]^n \,\mathrm{d}\theta = 0.$$
(2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\delta \leqslant |\theta| \leqslant \pi} f(\theta)\,[P_\delta(\theta)]^n \,\mathrm{d}\theta = 0.$
(3) Montrer que $f(0) = 0$.
(4) Montrer que $f = 0$.

Exercice 124. Soit $(a_n) \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence $R \geqslant 1$. On pose alors, pour $|z| < 1$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Si f est bornée sur $D(0,1)$ prouver que f est un polynôme.

Exercice 125.
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, chercher les solutions périodiques de l'équation différentielle
$$y'' - 4y' + 4y = f(x)$$

Exercice 126. Trouver $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x > 0$, $f(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 127. Soit

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x} = A(t)x \end{cases}$$

dans $\mathbb{R}^n$.

(1) Montrer que il existe une application Ω de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, qui à t associe la matrice de l'application linéaire qui à x_0 associe la solution $x(t)$ de (I) avec $x(0) = x_0$ pour $t \geqslant 0$ $(\Omega(t)(x_0) = x(t))$.

(2) On suppose

$$(A(t)x|x) \leqslant -\lambda\|x\|^2$$

où $\lambda > 0$. Montrer que

$$\|\Omega(t)\| \leqslant e^{-\lambda t} \text{ pour } t \geqslant 0$$

en norme subordonnée.

(3) On considère

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x} = A(t)x + f(t) \end{cases}$$

Montrer que

$$x(t) = \Omega(t,0)x_0 + \int_0^t \Omega(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$$

où $\Omega(t,s)$ associe à x_0 la solution de (I) qui vérifie $x(s) = x_0$.

Exercice 128. Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue et $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la solution de $X'(t) = A(t)X(t)$, $X(0) = X_0$. Montrer qu'il existe une application continue $\Omega : \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n$, $X(t) = \Omega(t)X_0$.

Exercice 129. On reprend les notations de l'exercice 128.
On suppose que $n = 2p$, que $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et que $A(t)$ s'écrit par blocs $A(t) = \begin{pmatrix} R(t) & S(t) \\ 0 & T(t) \end{pmatrix}$ avec $R(t), S(t), T(t) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et qu'il existe λ, μ, B réels strictement positifs tels que pour tout $u \in \mathbb{R}^p$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on ait $(R(t).u|u) \leqslant -\lambda\|u\|^2$, $(T(t).u|u) \leqslant -\mu\|u\|^2$, $\|S(t)\| \leqslant B$.
On pose $X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}$.
Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\|X_2(t)\| \leqslant e^{-\mu t}\|X_0\|$ et donner une majoration de $\|X_1(t)\|$.

Exercice 130.

(1) Montrer qu'il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$u' + u \wedge u' = -u \wedge (u_3 e_3),\ \ u(0) = u_0 \text{ avec } \|u_0\| = 1$$

où u_i désignent les coordonnées de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(2) Comportement de u lorsque $t \to +\infty$?

Exercice 131. Soient u, v, w, trois fonctions $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}^3$
Soit e un vecteur constant de norme 1.
On considère le système d'équations différentielles suivant

$$\begin{cases} u' + u \wedge u' = u \wedge (v + e) & (1) \\ u' + v' = -w & (2) \\ w' = v & (3) \end{cases}$$

(1) Montrer que les solutions sont bornées
(2) Montrer que $\|u'\|^2$ est sommable sur $\mathbb{R}_+$
(3) Montrer qu'il existe une suite (t_n) de réels vérifiant les deux conditions

$$\begin{cases} \lim_n t_n = +\infty \\ \lim_n u(t_n) = U \end{cases}$$

Exercice 132.

(1) Résoudre le système différentiel ($\mu > 0$) $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = -y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & = -\mu x \end{cases}$

Tracé graphique des trajectoires.

(2) Soit le nouveau système modifié $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = -y \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & = -\mu x + bx^2 \end{cases}$

a) Chercher les points d'équilibre.
b) Chercher F telle que $-y^2 = F(x) + K$ où K est une constante.
c) Tracé de $F(x)$.
d) Tracé des trajectoires.

Exercice 133. Soit l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad x'(t) = x(t) - x^2(t) + \frac{1}{t}$$

Soit (I, x) une solution maximale de E telle que $I \cap]0, +\infty[\neq \emptyset$. Soit $t_0 \in I \cap]0, +\infty[$ tel que $x(t_0) > 1$.

(1) Montrer que si $t \in I$ et $t \geqslant t_0$ alors $x(t) > 1$.
(2) Montrer que $[t_0, +\infty[\subset I$.
(3) Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 1$.

Exercice 134. Soit $f : R^+ \to R$, de classe C^1 vérifiant
$f(0) = f(1) = 0$
$f > 0$ sur $]0, 1[$
$f'(0) > 0, f'(1) < 0$
On considère pour $n \in N^*$ l'équation différentielle : $y' = f(y)$ avec condition initiale $y(0) = 1/n$.
Montrer que $\exists! t_n > 0, y(t_n) = 1 - 1/n$. Nature de la suite (t_n)?

Exercice 135. Résoudre le système

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = x + y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} & = -x + y + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$$

Exercice 136.
Soit l'équation différentielle $y' + p(x)y = q(x)y^n$ où $n \in \mathbb{R}$, p et q continues sur $\mathbb{R}$.
Peut-on trouver les solutions pour $n = 1$ par passage à la limite à partir des solutions trouvées pour $n \neq 1$?

Exercice 137. Soit l'équation différentielle :

(E) $$F(x, y, y') = {y'}^2 y^2 + y^2 - 1 = 0$$

a) Résoudre (E) et tracer l'allure des courbes intégrales.
b) Éliminer y' dans $\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0 \end{cases}$. Interpréter.

Exercice 138. Soit $x' = f(t, x)$ où $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, $\mathbb{Z}$-périodique.
a) Montrer que pour toute condition initiale $x(0) = x_0$ on obtient une solution définie sur $\mathbb{R}$.
b) S'il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x(q) = x_0 + p$, montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ x(t + q) = x(t) + p$$

et même, on a $\forall m \in \mathbb{N}$, $x(mq) = x_0 + mp$.
c) Si $x(q) > x_0 + p$ montrer alors que $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t+q) > x(t)+p$.
d) Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\dfrac{p'}{q'} < \dfrac{p}{q}$ et si $x(q) \geqslant x_0 + p$ alors toute solution y vérifie $y(q') \geqslant y_0 + p'$.
(Pas de solution disponible pour l'instant.)

Exercice 139.

(1) Soit u définie par $u(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ série entière de rayon 1. On pose $p(x,y) = \Re(f(x+iy))$ et $q(x,y) = \Im(f(x+iy))$. Montrer que p et q sont harmoniques (i.e. $\Delta p = \Delta q = 0$).

(2) Soit $u\ :\ D(0,1) \mapsto R$ harmonique et $(x_0,y_0) \in D(0,1)$, pour r assez petit on pose

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Montrer que $\varphi(r) = u(x_0,y_0)$.

Exercice 140. Soit A ouvert de $\mathbb{R}^2$, $u \in \mathcal{C}^1(A,\mathbb{R})$

On définit $L(u,A) = \sup\limits_{x,y\in A, x\neq y} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{\|x-y\|}$

Montrer que $L(u,A) = \sup\limits_{A} \|\overrightarrow{\mathrm{grad}}(u)\|$

Soit $\omega \subset A$ ouvert, on définit $E(\omega)$ l'ensemble des fonctions $\omega \to \mathbb{R}$ lipschitziennes telles que $\forall \omega'$ouvert $\subset \omega$, $\exists v : \overline{\omega'} \to \mathbb{R}$ telle que u et v coïncident sur $\mathrm{Fr}\,(\omega')$ et $L(u,\omega') \leqslant L(v,\omega')$.

Soit $u \in E(\omega)$ et $x_0 \in \omega$ tels que $u \in \mathcal{C}^2$ sur un voisinage de x_0.

soit H_{u,x_0} la matrice Hessienne de u en x_0.

Montrer que $(H_{u,x_0}\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{x_0}(u)).\overrightarrow{\mathrm{grad}}_{x_0}(u) = 0$

(Pas de solution disponible pour l'instant

Exercice 141.

(1) Soit $f\ :\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$

$$(f'(x) - f'(y))(x-y) \geqslant \alpha(x-y)^2.$$

Montrer que f admet un unique minimum sur $\mathbb{R}$.

(2) Même question avec $f\ :\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

EXERCICE 142. Soit $f\ :\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$, déterminer

$$\inf(\|\operatorname{grad} f\|$$

EXERCICE 143. Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $\|\varphi'(x)\|<1$. On pose $f(x)=x+\varphi(x)$.

(1) Pour tout $\rho>0$, montrer qu'il existe C_ρ, $0<C_\rho<1$ tel que

$$\forall(x,y)\in\overline{B}(0,\rho),\ \|f(x)-f(y)\|\geqslant(1-c_\rho)\|x-y\|$$

(2) Montrer que f est injective et que $\mathrm{Id}+\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. En déduire que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et que $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(3) On suppose que $C=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}\|\varphi'(x)\|<1$. Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$. En déduire $f(\mathbb{R}^n)$.

EXERCICE 144. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f, h_1, h_2 des fonctions définies sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose que $\forall x\in U$, $h_1(x)\leqslant f(x)\leqslant h_2(x)$.

(1) Si h_1 et h_2 sont différentiables en x_0 avec $h_1(x_0)=h_2(x_0)$, montrer que f est différentiable en x_0.

(2) On suppose que f est 1-lipschitzienne et qu'il existe $[a,b]\subset U$ tel que $f(b)-f(a)=\|b-a\|$.
Montrer que f est différentiable en tout point de $]a,b[$.

(3) Soit C un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. On sait que pour tout x il existe un unique $y\in C$ tel que $\mathrm{d}(y,C)=\|x-y\|$. Montrer que l'application $x\mapsto\mathrm{d}(x,C)$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n\setminus C$.

Exercice 145. Soit $f \in \mathcal{C}^2(B(0,1),\mathbb{R})$ où $B(0,1)$ est la boule ouverte unité de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$).

a) Montrer que $\Delta f \leqslant 0$ pour un maximum, $\Delta f \geqslant 0$ pour un minimum.

b) Si on suppose que $f(M) = 0$ pour tout point M de la sphère unité et $f(M_0) = 0$ pour un point M_0 de $B(0,1)$, montrer qu'il existe $P \in B(0,1)$ tel que $\Delta f(P) = 0$.

Exercice 146. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, on note C le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 0\}$. On suppose que Σ est une partie non vide et bornée telle que $f'(x) \neq 0$ pour tout x de Σ.

Montrer que $G : x \in \Sigma \mapsto \dfrac{\operatorname{grad} f(x)}{\|\operatorname{grad} f(x)\|} \in C$ est surjective.

Exercice 147. Dans le plan euclidien, on considère 2 points distincts A et B. Soit $O \in]A,B[$, on pose $m = OB$, $n = OA$. Soit $a \in [0, \min(m,n)]$ et D_a le disque fermé de centre O et de rayon a.

Déterminer les points de D_a où $\dfrac{n^2}{AP} + \dfrac{m^2}{BP}$ atteint son minimum.

1. Solutions

Solution 1 On partage E ensemble à $3n$ éléments en 3 parties égales et on dénombre les parties à n éléments.
On peut aussi chercher le coefficient de x^n dans l'égalité

$$(1+x)^{3n} = (1+x)^n.(1+x)^n.(1+x)^n.$$

Solution 2 Comme $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$ et $\binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{n+1-k}$ alors $S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant j\leqslant n+1} \binom{n}{j}\binom{n+1}{k}$ donc

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{j,k} \binom{n}{j}\binom{n+1}{k} = 2^{2n}.$$

(On pouvait aussi écrire que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.)

Solution 3 $\gamma_a\ : x \mapsto ax$ est injective donc bijective, on a la propriété suivante :

$$\forall (a,b) \in G^2,\ \exists x \in G \mid ax = b,\ \exists y \in G \mid ya = b$$

alors, en prenant $b = e$ on prouve l'existence d'un élément symétrique et on peut conclure.

Solution 4 $\gamma_a\ : x \mapsto ax$ et $\delta_a\ : x \mapsto xa$ sont surjectives. Soit (u,v) tels que $au = va = a$ alors

$$\forall b \in E,\ \exists (x,y) \in E^2 \mid ax = ya = b \Rightarrow \begin{cases} bu = yau = ya = b \\ vb = vax = ax = b \end{cases}$$

et $vu = u = v$ donc il existe un élément neutre.
On procède comme à l'exercice précédent pour le symétrique.

Solution 5 L'inclusion $Z_n(G) \subset Z_{n+1}(G)$ est immédiate. On prouve ensuite par récurrence sur n que $Z_n(G)$ est un sous-groupe de G. En effet, si $(x_1,x_2) \in Z_n(G)^2$ alors

$$\begin{aligned}(x_1x_2)^{-1}y^{-1}x_1x_2y &= x_2^{-1}\underbrace{x_1^{-1}y^{-1}x_1}_{=z_{n-1}y^{-1}}x_2y \\ &= \underbrace{x_2^{-1}(z_{n-1}y^{-1})x_2(yz_{n-1})}_{\in Z_{n-1}(G)} z_{n-1} \in Z_{n-1}(G)\end{aligned}$$

d'où la stabilité.

Solution 6 On pose $F_n = \{(p,q) \in [1,n]^2 \mid p+q > n,\ p \wedge q = 1\}$ alors

$$\begin{aligned}F_{n+1} \setminus F_n = \{&(n+1,q),\ q \leqslant n,\ (n+1)\wedge q = 1\} \\ &\cup \{(p,n+1),\ p \leqslant n,\ (n+1)\wedge p = 1\}.\end{aligned}$$

De même $F_n \setminus F_{n+1} = \{(p, n+1-p) \mid p \wedge (n+1) = 1\}$, donc, avec $R_n = \sum_{(p,q)\in F_n} \dfrac{1}{pq}$ alors

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= R_n + \sum_{F_{n+1}\setminus F_n} \frac{1}{pq} - \sum_{F_n\setminus F_{n+1}} \frac{1}{pq} \\ &= \frac{2}{n+1} \sum_{p\wedge(n+1)=1} \frac{1}{p} - \frac{1}{n+1}\left(\sum_{p\wedge(n+1)=1} \frac{1}{p} + \sum_{p\wedge(n+1)=1} \frac{1}{n+1-p} \right) \end{aligned}$$

donc $R_{n+1} = R_n = R_1 = 1$ et, en conclusion $S_n = \dfrac{1}{2}$, $S_1 = 1$.

Solution 7 On a $E_n = (1+\sqrt{3})^{2n+1} - (\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ et $E_n = 8E_{n-1} - 4E_{n-2}$ ce qui permet de prouver la propriété par récurrence.
(Les suites $U_n = (1+\sqrt{3})^{2n+1}$ et $V_n(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ vérifient cette relation de récurrence.)

Solution 8 Soit $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de n alors $\varphi \ : a \in \mathcal{D}(n) \mapsto \dfrac{n}{a} \in \mathcal{D}(n)$ est une bijection donc

$$P = \prod_{a\in\mathcal{D}(n)} a = \prod_{a\in\mathcal{D}(n)} \frac{n}{a} = \frac{n^N}{P}$$

d'où $P = n^{N/2}$.

Solution 9 On a $\left[\dfrac{n}{p^i}\right]$ multiples de $p^i \leqslant n$ donc l'ordre de multiplicité de p dans $n!$ vaut

$$\underbrace{\left[\frac{n}{p}\right]}_{\text{div de } p} + \underbrace{\left[\frac{n}{p^2}\right]}_{\text{div de } p^2} + \cdots + \underbrace{\left[\frac{n}{p^i}\right]}_{\text{div de } p^i} + \cdots$$

car ainsi, les diviseurs de p^2 sont comptés 2 fois, ceux de p^i le sont i fois.

Solution 10 $(E, +, *)$ espace vectoriel ne pose pas de problème.
Comme $f^2 = -\operatorname{Id}_E$ alors $\dim E = 2p$ et il existe une base $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_{2p})$ telle que $f(e_j) = e_{p+j}$ (par récurrence sur p ou en utilisant la réduction des endomorphismes). $(e_1, \dots, e_p)$ est donc une base de E en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On a donc $\dim_{\mathbb{C}} E = p$.

Solution 11 On a $1 + x \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \dbinom{p}{k} x^{k-1} = 0$ donc x est bien inversible et son inverse est $\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \dbinom{p}{k} x^{k-1}$.
On a ensuite $(1 - x^{-1})^p = x^p(x-1)^p = 0$.

Solution 12 Soit $u(P) = A^{(n)}P - A^{(n-1)}P' + \cdots + (-1)^n AP^{(n)}$, comme $[u(P)]' = 0$ alors $u(P) \in \mathbb{C}$ pour tout P et $u(1) = A^{(n)} \neq 0$ donc $\dim \operatorname{Im}(u) = 1$ et $\dim \operatorname{Ker}(u) = n$.
Soit $Q_i = (X - \alpha_i)^n$ alors $u(Q_i) = 0$ et comme la famille (Q_i) est libre, l'ensemble des solutions est $\operatorname{Vect}(Q_i)$.

Solution 13 On procède par récurrence sur $n = \deg P$.
Si $n = 1$ pas de problème.
On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Si $\deg P = n+1$, on pose $\Delta = P \wedge P'$, $P = \Delta Q$ et a est racine d'ordre 1 de Q. Comme $(\Delta, Q) \in \mathbb{Q}[X]^2$, si $\deg Q = 1$ c'est terminé, si $\deg Q \geqslant 2$ alors $\deg \Delta \leqslant n-1$ et on applique l'hypothèse de récurrence à Δ.

Solution 14 Si $\deg P = n$, on dérive l'égalité n fois d'où

$$(X+3)P^{(n-1)}(X) - XP^{(n-1)}(X+1) = n[P^{(n-1)}(X) - P^{(n-1)}(X+1)]$$

ce qui entraîne $n = 3$ et donc $P = \lambda X(X+1)(X+2)$.
On peut aussi remarquer que 0 et -2 sont racines de P donc, en posant $P = X(X+2)Q$, la relation devient $Q(X) = Q(X+1)$ i.e. Q est constant.

Solution 15 Soit $T(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$, si $1 + T^2 = AB$ alors A et B n'ont pas de racines réelles.
Raisonnons par l'absurde en supposant $(A, B) \in \mathbb{Z}[X]$. On a donc $1 = A(a_i)B(a_i)$ donc $A(a_i) = B(a_i) = \pm 1$ car $A(a_i)$ et $B(a_i)$ sont des entiers. Comme A et B ne changent pas de signe (ils ne s'annulent pas), on peut supposer que $A(a_i) = B(a_i) = 1$.
On divise A et B par T : $\begin{cases} A = TQ - 1 + R_1 \\ B = TQ_2 + R_2 \end{cases}$ avec $\deg R_i \leqslant n-1$ et $R_i(a_j) = 1$ donc $R_1 = R_2 = 1$ d'où

$$AB = 1 + T^2 = 1 + T(Q_1 + Q_2) + T^2 Q_1 Q_2$$

ce qui donne $Q_1 + Q_2 = 0$ et $Q_1 Q_2 = 1$ ce qui est impossible pour des polynômes à coefficients réels.

Solution 16 En regroupant les x_i égaux entre-eux, on peut écrire

$$S_k = \sum_{i=1}^{q} n_i x_i^k = n \text{ et } S_{k-1} - S_k = \sum_{i=1}^{q} n_i x_i^{k-1}(1 - x_i) = 0$$

ce qui est équivalent à $MX = 0$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{q-1} & \dots & x_q^{q-1} \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} n_1(1-x_1) \\ \vdots \\ n_q(1-x_q) \end{pmatrix}$ et donc $X = 0$ car M est inversible (matrice de VanderMonde).

Solution 17

(1) On a $S_{n,d} = n^d(n+1)^d = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{[\frac{d-1}{2}]} \binom{d}{2i+1} P_{d-i}(n(n+1))$.

(2) On en déduit que $P_d(X) = \dfrac{1}{2d}X^d - \dfrac{1}{d}\displaystyle\sum_{i=1}^{[\frac{d-1}{2}]} \binom{d}{2i+1} P_{d-i}(X)$.

(3) On a

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \left[k^{d+1}(k+1)^d - (k-1)^{d+1}k^d\right] = n^{d+1}(n+1)^d$$
$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \left[k^{d}(k+1)^{d+1} - (k-1)^{d}k^{d+1}\right] = n^{d}(n+1)^{d+1}$$

donc

$$A_n + B_n = (2n+1)n^d(n+1)^d = 4\sum_{i=0}^{[\frac{d-1}{2}]} \binom{d}{2i+1} S_{n,2d-2i} + 2\sum_{i=0}^{[\frac{d}{2}]} \binom{d}{2i} S_{n,2d-2i}$$

d'où, par récurrence sur d :

$$Q_d = \frac{1}{4d+2}\left[X^d - 4\sum_{i=0}^{[\frac{d-1}{2}]} \binom{d}{2i+1} Q_{d-i} - 2\sum_{i=0}^{[\frac{d}{2}]} \binom{d}{2i} Q_{,d-i}\right]$$

(4) On trouve

$$Q_1 = \frac{X}{6} \quad Q_2 = \frac{X(3X-1)}{30} \qquad Q_3 = \frac{X(3X^2-3X+1)}{42}$$
$$P_1 = \frac{X}{2} \quad P_2 = \frac{X^2}{4} \qquad P_3 = \frac{2X^3-X^2}{12}$$

Solution 18 On a $\dfrac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{X-x_k}$ où les x_k désignent les racines de P comptées avec leur ordre de multiplicité. On en déduit que

$$\frac{PP'' - P'^2}{P^2} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X-x_k)^2},$$

ce qui assure le résultat.
Pas de réciproque, il suffit de prendre $P(X) = X(X^2+1)$ qui n'a pas toutes ses racines réelles et pourtant $P'^2(x) - P(x)P''(x) = 3x^4 + 1 > 0$.

Solution 19 La première formule est évidente.

(1) On a $P' = P_2P_3^2 \dots P_k^{k-1}Q$ où $Q \wedge P = 1$ donc $D_1 = P_2P_3^2 \dots P_k^{k-1}$ et $\dfrac{P}{D_1} = P_1P_2 \dots P_k$.

(2) $D_1' = P_3 \dots P_k^{k-2}Q_1$ où $Q_1 \wedge D_1 = 1$ donc $D_1 \wedge D_1' = P_3 \dots P_k^{k-2} = D_2$ et $\dfrac{D_1}{D_2} = P_2 \dots P_k$. On a donc $P_1 = \dfrac{P/D_1}{D_1/D_2}$. De même, on peut obtenir P_2 etc.

Moralité, dans la recherche des racines d'un polynôme, on peut se ramener au cas où toutes les racines sont simples.
Ensuite, si x est racine d'ordre i de P et si c'est la seule alors x s'exprime rationnellement à l'aide des coefficients de P.

Solution 20 On a $u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2 + \dfrac{1}{u_k^2}$ donc

$$u_n^2 = 25 + 2n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_n^2}$$

d'où $u_n^2 \geqslant 25 + 2n$ i.e. $u_{1000}^2 \geqslant 2025 = 45^2$. On utilise ensuite l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{25+2k} < \int_{-1}^{n-1} \frac{\mathrm{d}x}{25+2x}$$

pour conclure (et on a même $155 < u_{12000} < 155,012$).

Solution 21 On veut montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in E \mid x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$. Or il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $a_{n+1} - a_n < \varepsilon$ et il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_1$, $b_n + x \geqslant a_{n_0}$. Or, comme (a_n) est croissante, il existe N tel que $a_N \leqslant b_{n_1} + x \leqslant a_{N+1}$ d'où $a_N - b_{n_1} \leqslant x \leqslant a_{N+1} - b_{n_1}$. En choisissant $N \geqslant n_0$ et en prenant $y = a_N - b_{n_1}$ on a bien le résultat attendu.
Application : on prend $a_n = \ln n$ et $b_m = 2m\pi$. $E = \{\ln n - 2m\pi,\ (n,m) \in \mathbb{N}^{*2}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Comme l'image de E par cos est justement la suite $\cos(\ln n)$ on en déduit que cette suite est dense dans $[-1,1]$.

Solution 22 On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n = \dfrac{1}{2}v_{2n}) = 1$ donc, si la suite (v_n) a une limite, c'est $\dfrac{2}{3}$.
Supposons que $v_n \not\to \dfrac{2}{3}$ alors

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ |v_n - \frac{2}{3}| \geqslant \varepsilon$$

et

$$\exists N_1,\ \forall n \geqslant N_1,\ v_n + \frac{1}{2}v_{2n} - 1 > -\frac{\varepsilon}{3}.$$

En prenant $N = N_1$, on obtient l'existence de $n \geqslant N_1$ tel que $|v_n - \dfrac{2}{3}| \geqslant \varepsilon$. On a alors

$$v_{2n} - \frac{2}{3} = \underbrace{2(v_n + \frac{1}{2}v_{2n} - 1)}_{a} - \underbrace{2(v_n - \frac{2}{3})}_{b}$$

et, en utilisant l'inégalité $|a - b| \geqslant |b| - |a|$, on arrive à $|v_{2n} - \dfrac{2}{3}| \geqslant 2\varepsilon - \dfrac{2\varepsilon}{3} = \dfrac{4\varepsilon}{3}$. Par une récurrence immédiate, on a $|v_{2^k n} - \dfrac{2}{3}| \geqslant \left(\dfrac{4}{3}\right)^k \varepsilon$.
La suite $(v_n + \dfrac{1}{2}v_{2n})$ ne serait pas bornée ce qui est absurde donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{2}{3}$.

Solution 23 On trouve f constante : en effet, on a (en posant $y = 2x+1$) $f(\frac{1}{2}(y-1)) = f(y)$ soit, en définissant la suite (u_n) par $u_0 = y$ et $u_n = \dfrac{1}{2}(u_{n-1} - 1)$, $f(u_n) = f(y)$. Or $u_n \to -1$ et f continue donc $f(y) = f(-1)$.

Solution 24 Si $\varphi(f) = 0$ alors $f(0) = 0$ or, par récurrence, on a $f(x) + (-1)^{n-1} f(\frac{x}{2^n}) = 0$ donc $f = 0$.

Solution 25 L'unicité est immédiate.
Soit maintenant la suite $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ alors

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leqslant \alpha(|x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n|)$$
$$\Rightarrow |x_{n+2} - x_{n+1}| \leqslant \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_{n+1} - x_n|$$

et comme $\dfrac{\alpha}{1-\alpha} < 1$, la suite (x_n) est de Cauchy. Soit l sa limite. Comme

$$|f(x_n) - f(l)| \leqslant \alpha(|x_{n+1} - x_n| + |f(l) - l|)$$

alors, en passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient $|l - f(l)| \leqslant \alpha|f(l) - l|$ soit $f(l) = l$.

Solution 26 On remarque que $z = -(a+i)^4$ donc une racine quatrième de z est $(a+i)\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Solution 27

(1) On a $z_j = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-ij} u_j$.

(2) On trouve $u_i^{(p)} = \left(\dfrac{1+\alpha^i}{2\alpha^i}\right)^p u_i$. $\lim\limits_{p\to+\infty} u_i^{(p)} = 0$ donc $z_j^{(p)} \to \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} z_i$.

Solution 28 On a $|z|^2 = (u+iv)(u-iv) = (u+iv)(\bar{u} - i\bar{v})$.
Si $u + iv = 0$ alors $z = 0$ sinon $u - iv = \bar{u} - i\bar{v}$ i.e. $u - \bar{u} = i(v - \bar{v}) = 0$.

Solution 29 Soit $\alpha_k = \operatorname{Arctan} k$ alors

$$\frac{k(k+1)+1+i}{k(k+1)+1-i} = \frac{1 + i\tan(\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{1 - i\tan(\alpha_{k+1} - \alpha_k)} = e^{2i(\alpha_{k+1} - \alpha_k)}$$

d'où $P_n = e^{2i(\alpha_{n+1} - \alpha_1)} \to i$.

Solution 30

(1) On pose $z = te^{i\theta}$ où t décrit $\mathbb{R}$, $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(te^{i\theta} + \dfrac{1}{t}e^{-i\theta}\right)$ d'où $x = \dfrac{t^2+1}{2t}\cos\theta$, $y = \dfrac{t^2-1}{2t}\sin\theta$ et, avec $t = \tan\frac{\varphi}{2}$, $\varphi \in]-\pi, \pi[$ on trouve $x = \dfrac{\cos\theta}{\sin\varphi}$, $y = -\dfrac{\sin\theta}{\tan\varphi}$ qui est l'équation paramétrique d'une hyperbole $(x^2\sin^2\theta - y^2\cos^2\theta = \cos^2\theta\sin^2\theta)$.

(2) Avec $z = re^{it}$, $t \in \mathbb{R}$, $r > 0$, on obtient $x = \dfrac{r^2+1}{2r}\cos t$ et $y = \dfrac{r^2-1}{2r}\sin t$. Si $r \neq 1$, on a une ellipse, si $r = 1$ on a un segment de droite.

Solution 31 On fait la démonstration par récurrence sur n.
Si $n=1$ ou $n=2$ OK.
Pour le passage de l'ordre n à l'ordre $n+1$, on utilise le lemme suivant :
si z_1, z_2, z_3 sont 3 nombres complexes de module $\leqslant 1$ alors, en choisissant des ε_i adéquats, l'un des nombres $|\varepsilon_i z_i + \varepsilon_j z_j|$ est de module $\leqslant 1$.
On distingue alors les différents cas :
si $|\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2| \leqslant 1$ alors on pose $z'_1 = \varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2$, $z'_k = z_{k+1}$ et on utilise l'hypothèse de récurrence.
Si $|z_1 \pm z_2| > 1$ et $|\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_3 z_3| \leqslant 1$ alors, nécessairement $|z_1 \pm z_2| \leqslant \sqrt{3}$. On utilise là aussi l'hypothèse de récurrence avec $z'_1 = \varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_3 z_3$, $z'_2 = z_2$, $z'_k = z_{k+1}$.
Si $|z_1 \pm z_2| > 1$ et $|z_1 \pm z_3| > 1$ alors on sait que $|\varepsilon_2 z_2 + \varepsilon_3 z_3| \leqslant 1$. On utilise l'hypothèse de récurrence avec $z'_1 = z_1$, $z'_2 = \varepsilon_2 z_1 + \varepsilon_3 z_3$, $z'_k = z_{k+1}$ (on sait là aussi que $|z_1 \pm z_2| \leqslant \sqrt{3}$).

Solution 32 Par l'absurde : supposons que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} F_i = E$ et $F_1 \not\subset \displaystyle\bigcup_{i=2}^{p} F_i$. Soit $y \in F_1 \setminus \displaystyle\bigcup_{i=2}^{p} F_i$ et $x_0 \notin F_1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = x_0 + ny \notin F_1$. La suite (x_n) comporte une infinité d'éléments donc il existe (n,m) distincts tels que x_n et x_m sont dans F_i. On a alors $x_n - x_m = (n-m)y \in F_i$ soit $y \in F_i$ ce qui est impossible.

Solution 33 Comme $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$ on a $\operatorname{Rg}(u) \leqslant n - \operatorname{Rg}(v)$ puis on exprime que

$$E = (u+v)(E) \subset u(E) + v(E).$$

Solution 34 Par l'absurde, si $A \neq 0$ et $B \neq 0$ alors $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\exists Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AY \neq 0$ et $BX \neq 0$. On sait en outre (en passant aux applications linéaires associées dans $\mathbb{K}^n$) que $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $MBX = Y$ d'où $AMBX = AY \neq 0$ contradiction.

Solution 35 Soit $P = \sum_{i,j} p_{ij} E_{ij}$ alors $PE_{ij} = \sum_k p_{ki} E_{kj}$ et $E_{ij}P = \sum_l p_{jl} E_{il}$. La composante de $\Psi(E_{ij})$ sur E_{ij} est $p_{ii} + p_{jj}$ donc $\operatorname{Tr}(\Psi) = 2n \operatorname{Tr}(P) = 2nr$ où $r = \operatorname{Rg}(P)$.

Solution 36 Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1/u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos t & v\cos t - \sin t/u \\ u \sin t & v \sin t + \cos t/u \end{pmatrix}$$

d'où $u = \sqrt{a^2+c^2}$, t est alors déterminé à 2π près. v sera alors uniquement défini à l'aide de l'une des relations $\begin{cases} v\cos t = \sin t/u \\ v \sin t = -\sin t/u + d \end{cases}$.

Solution 37 Dans le calcul du déterminant de M, en retranchant la deuxième ligne à la première,..., en retranchant la dernière ligne à l'avant dernière, on trouve $\det M = (a_n - a_{n-1})(\ldots)(a_2 - a_1)a_1$ d'où la C.N.S. demandée.
Pour calculer M^{-1} on inverse la relation $MX = Y$. En retranchant la $k^{\text{ième}}$ équation de la $k-1^{\text{ième}}$, on trouve $y_k - y_{k-1} = (a_k - a_{k-1})(x_k + \cdots + x_n)$ soit, en regroupant 2 égalités consécutives,

$$x_k = \frac{1}{a_k - a_{k-1}}(y_k - y_{k-1}) - \frac{1}{a_{k+1} - a_k}(y_{k+1} - y_k)$$

d'où M^{-1} en posant $a_0 = a_{n+1} = y_0 = y_{n+1} = 0$.

Solution 38 Soit f telle que $M(f) = A$, montrons que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f^2$:
On sait que $\dim \operatorname{Im} f = 2n$ donc $\dim \operatorname{Ker} f = n$ et comme $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ ($f^3 = 0$) alors $\operatorname{Rg}(f^2) \leqslant n$. Si on considère la restriction de f à $\operatorname{Im} f$ on obtient la relation (théorème du rang)

$$\underbrace{\dim \operatorname{Im} f}_{2n} = \underbrace{\dim \operatorname{Im} f^2}_{\leqslant n} + \underbrace{\dim(\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f)}_{\leqslant n}$$

donc $\dim \operatorname{Im} f^2 = n$ et $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Ker} f$.
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\operatorname{Ker} f$, on choisit e_{i+n} tel que $e_i = f(e_{i+n})$, $(e_{n+1}, \dots, e_{2n})$ est libre. On montre facilement que $(e_1, \dots, e_{2n})$ est libre et que ceci est une base de $\operatorname{Im} f$.
Comme $e_{i+n} \in \operatorname{Im} f$ on choisit $e_{i+2n} = f(e_{i+n})$ (on utilise le fait que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f^2$. (e_{i+2n}) est libre, puis $(e_1, \dots, e_{3n})$ libre est c'est la bonne base).

Solution 39 On a $M = (m_{ij}) = AB$ où $a_{ik} = \dbinom{n}{k}(a_i)^k$ et $b_{kj} = b_j^{n-k}$ d'où

$$\det M = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \prod_{i<j} (a_j - a_i)(b_j - b_i).$$

Solution 40 On a $N(x, y) = \dfrac{1}{3}\left(|2x - y| + 2\sqrt{x^2 - xy + y^2}\right)$ ce qui permet de définir N et de prouver que N est une norme ($(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - xy + y^2}$ est une norme associée à un produit scalaire).
La sphère unité est la réunion de 2 paraboles :

$$\begin{cases} (y-1)^2 = 4(1-x) & \text{si } 2x \geqslant y \\ (y+1)^2 = 4(x+1) & \text{si } 2x \leqslant y \end{cases}$$

Solution 41 On a $e^{g(x)} - e^{f(x)} = e^{f(x)}\left(e^{g(x)-f(x)} - 1\right)$ donc

$$\left|e^{g(x)} - e^{f(x)}\right| \leqslant e^{\|f\|}\left|e^{g(x)-f(x)} - 1\right|$$

et, en utilisant l'inégalité $|e^u - 1| \leqslant e^a - 1$ pour $u \in [-a, a]$, on arrive à

$$\left\|e^g - e^f\right\| \leqslant e^{\|f\|}\left(e^{\|g-f\|} - 1\right)$$

ce qui permet de prouver la continuité de φ.

Solution 42

(1) Ici, on a $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Grâce à l'inégalité $\|f(x-a)\| \leqslant \|f(x)\| + \|f(a)\|$ on peut se ramener au cas où f est bornée sur $\overline{B}(0, r)$ par K.
On vérifie que $\forall \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $f(\frac{p}{q}x) = \frac{p}{q}f(x)$ pour tout x.
Montrons que $\|f(x)\| \leqslant \dfrac{K}{r}\|x\|$ ($x = 0$ est immédiat).
Si $Q(x) = \{s \in \mathbb{Q} \mid \|s - x\| \leqslant r\}$ alors $|s| \leqslant \dfrac{r}{\|x\|}$ et comme $\|f(sx)\| \leqslant K\|f(x)\| \leqslant \dfrac{K}{s}$ pour tout s de $Q(x)$ on a $\|f(x)\| \leqslant \dfrac{K}{r}\|x\|$, f est ainsi continue.

(2) On remplace x et y par $2^{n-1}x$ dans l'inégalité $\|f(x+y)-f(x)-f(y)\| \leqslant M$ et, en divisant par 2^n, on obtient $\|g_n(x)-g_{n-1}(x)\| \leqslant \dfrac{M}{2^n}$ donc (g_n) est une suite de Cauchy ($\|g(x)-g_p(x)\| \leqslant \dfrac{M}{2^p}$). Soit g sa limite. g est limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue.

Toujours dans la même inégalité, on remplace x par $2^n x$ et y par $2^n y$. En divisant par 2^n, on obtient

$$\|g_n(x+y)-g_n(x)-g_n(y)\| \leqslant \frac{M}{2^n}$$

donc, par passage à la limite, $g(x+y)=g(x)+g(y)$ d'où l'on peut déduire que g est linéaire.

Enfin $h=f-g$ est bornée car $\|g(x)-f(x)\| \leqslant M$ (utiliser $\|g(x)-g_p(x)\| \leqslant \dfrac{M}{2^p}$ avec $p=0$).

La décomposition est unique car $g-g'=h'-h$ est bornée et linéaire donc nulle.

Solution 43 Soit $f\ : A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \sum\limits_{I,J}\Delta_{I,J}^2$ où $\Delta_{I,J}$ est le mineur extrait de A dont les lignes sont d'indice I, les colonnes d'indice J et où la somme est étendue à tous les sous-ensembles I et J de $[1,n]$ de cardinal p.
On a alors l'équivalence $\mathrm{Rg}(A)\geqslant p \Leftrightarrow f(A)>0$. Comme f est continue en tant que fonction polynomiale des coefficients de A, E_p est un ouvert.
Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, E_p ne peut être fermé (sinon $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ serait réunion de 2 ouverts).
$E_p\supset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et comme $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense, E_p est dense.

Solution 44

(1) Si $A\subset B$, on a $\overset{\circ}{A}\subset\overset{\circ}{B}$ puis $\overline{\overset{\circ}{A}}\subset\overline{\overset{\circ}{B}}$ soit $u(A)\subset u(B)$. On fait de même pour v.
(2) $u(A)$ est un ouvert, comme $u(A)\subset\overline{u(A)}$, on en déduit que $u(A)\subset u^2(A)$.

$\overset{\circ}{\overline{A}}\subset\overline{A}$ donc $u\left(\overset{\circ}{\overline{A}}\right)\subset u(\overline{A})=\overline{\overset{\circ}{\overline{\overline{A}}}}=u(A)$ d'où $u^2(A)\subset u(A)$ donc $u^2=u$.

Pour montrer que $v^2=v$, on utilise le fait que $u(A)^c=v(A^c)$.
(3) On aura donc les ensembles A, $\overset{\circ}{A}$, $\overline{A}$, $u(A)$, $v(A)$, $\widehat{\overset{\circ}{u(A)}}$, $\overline{v(A)}$.

Solution 45 On sait qu'il existe $\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_n$ tels que $P(\alpha_1)<0$ et $(-1)^mP(\alpha_m)>0$. Or, pour chaque α_k, l'application $(b_0,b_1,\ldots,b_{n-1})\mapsto Q(\alpha_k)=\alpha_k^n+b_{n-1}\alpha_k^{n-1}+\cdots+b_0$ est continue donc il existe η_k tel que $Q(\alpha_k)P(\alpha_k)>0$ et on prend $\eta=\min(\eta_k)$.

Solution 46

(1) L est bien une forme linéaire. Comme $|L(f)|\leqslant 2\|f\|$ on en déduit que L est continue. Sa norme vaut 2, il suffit pour cela de prendre f_n fonction affine par morceaux valant $(-1)^k$ pour $x=q_k$ avec $k\leqslant n$.
(2) Supposons que la borne supérieure soit atteinte. Quitte à changer de signe, on peut dire qu'il existe f continue telle que $L(f)=2$ avec $\|f\|\leqslant 1$. Ceci impose alors que $f(q_n)=(-1)^n$.

$\overline{\{q_{2n+1}\}} = F_1$ est fermé, de même $\overline{\{q_{2n}\}} = F_2$. $[0,1]$ ne peut être la réunion de deux fermés disjoints (cf le théorème des valeurs intermédiaires) donc il existe $x \in [0,1]$ tel que $x \in F_1 \cap F_2$. Si f est continue alors par passages à la limite, on aurait $f(x) = -1$ (car $x \in F_1$) et $f(x) = 1$ (car $x \in F_2$) ce qui est impossible.

Solution 47

(1) Comme $|u_n v_n| \leqslant \|u\|_\infty |v_n|$ alors la série $\sum u_n v_n$ est absolument convergente.

(2) f_v est bien une forme linéaire. On vérifie sans peine que $\|f_v(u)\| \leqslant \|u\|_\infty \|v\|_1$ donc f_v est bien continue.

(3) On prend $\varphi\ : v \mapsto f_v$. φ est bien linéaire. Montrons que $\|\varphi(v)\| = \|v\|$ soit $\|f_v\| = \|v\|$.

On sait que $\|f_v\| \leqslant \|v\|$ vu le 2 et, avec $u_n = \begin{cases} \dfrac{v_n}{|v_n|} & \text{si } v_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } v_n = 0 \end{cases}$ alors $\|f_v(u)\| = \|v\|$ ce qui assure $\|\varphi(v)\| = \|v\|$.

Montrons enfin que φ est surjective (comme $\varphi(v) = 0 \Rightarrow v = 0$, on sait déjà que φ est injective).

Soit $f \in E'$, on pose e_n la suite de E dont tous les éléments sont nuls sauf celui d'indice $n+1$ qui vaut 1. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = f(e_n)$, on va prouver que $v \in F$:

soit $u = u_0 e_0 + \cdots + u_N e_N$ où $u_n = \begin{cases} \dfrac{v_n}{|v_n|} & \text{si } v_n \neq 0 \\ 0 & \text{si } v_n = 0 \end{cases}$ alors $u \in E$ et $\|u\|_\infty = 1$

donc $f(u) = |v_0| + \cdots + |v_N| \leqslant \|f\|$ et ceci pour tout N donc $v \in F$ ce qui termine la démonstration.

Solution 48 Préalable : si $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$, on pose $y = \sum_{\lambda_i \geqslant 0} \lambda_i x_i$ et $z = \sum_{\lambda_i < 0} \lambda_i x_i$ alors $(y|z) \geqslant 0$ et $\|y+z\|^2 = 0 \Rightarrow \|y\|^2 + 2(y|z) + \|z\|^2 = 0$ donc $\sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{p} |\lambda_i| \theta(x_i) = 0$ soit $\lambda_i = 0$ pour tout i c.q.f.d.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ avec $(x|e_i) \geqslant 0$ et soit j tel que $x_j < 0$ alors $\exists \varepsilon > 0$ tel que $x_j + \varepsilon \sum_{i \neq j} x_i < 0$.

On définit alors θ par $\theta\ : y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \mapsto y_j + \varepsilon \sum_{i \neq j} y_i$.

On a $\theta(e_i) = \varepsilon$ pour $i \neq j$, $\theta(e_j) = 1$ et $\theta(-x) > 0$. En appliquant le résultat préalable, on en déduit que $(e_1, \ldots, e_n, -x)$ est une base, ce qui est impossible.

Solution 49 On pose $f(0) = A$ et on note T la translation de vecteur $\overrightarrow{AO}$ alors $g = T \circ f$ vérifie $g(0) = 0$ et $\|g(y)\| = \|y\|$. On en déduit que $(g(x)|g(y)) = (x|y)$ et donc que g est une isométrie.

Solution 50 Avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ on a $S = \dfrac{1}{2}\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$. Comme $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 = u^2.v^2 - (\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v})^2$ et $-2(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 - u^2 - v^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned} 4S^2 = AB^2AC^2 - (\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC})^2 &= c^2b^2 - \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)\right] \end{aligned}$$

et, avec Cauchy-Schwarz $(a^2 + b^2 + c^2)^2 \leqslant (a^4 + b^4 + c^4)(1 + 1 + 1)$, on obtient le résultat. On a égalité ssi on a égalité dans Cauchy-Schwarz soit $a = b = c$.

Solution 51

(1) On a $(x_i|x_j) = \frac{1}{2}$. Soit $A = ((x_i|x_j))_{(i,j)\in[1,n]^2}$ matrice de $f \in \mathcal{L}(E)$ dans une base orthonormée (ε_i). On a $A = \frac{1}{2}(I_n + U)$ où $U = (1)$. f admet comme sous-espaces propres $E_{(n+1)/2} = \mathbb{R}.v_n$ où $v_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ et $E_{1/2}$ qui est orthogonal à $E_{(n+1)/2}$.

On définit alors $g(v_n) = \sqrt{\frac{n+1}{2}}v_n$ et $g(v) = \frac{v}{\sqrt{2}}$ pour $v \in E_{1/2}$ alors la famille (x_i) définie par $x_i = g(\varepsilon_i)$ satisfait les conditions de l'énoncé et c'est une base car g est un automorphisme.

Si (x_i) est une famille régulière alors la matrice A du produit scalaire étant inversible (f n'admet que $\frac{n+1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ comme valeurs propres) cette famille est libre, c'est donc une base.

(2) On trouve

$$x_i = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}e_n + \frac{1}{\sqrt{2(n-1)n}}e_{n-1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2i(i+1)}}e_i + \cdots + \frac{1}{2}e_1$$

Solution 52

(1) Montrons que $p \leqslant n + 1$ par l'absurde. Si $(x_1, \ldots, x_{n+2})$ est obtusangle, tous les x_i sont non nuls. On peut, par exemple exprimer $x_{n+2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ (toute famille de $n + 1$ éléments est liée). On peut aussi supposer que pour $i \leqslant m$, $\lambda_i \leqslant 0$ et, pour $i > m$, $\lambda_i > 0$. Soit $w = x_{n+2} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \sum\limits_{i=m+1}^{n} \lambda_i x_i$ d'où

$$\|w\|^2 = \big(x_{n+2} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i\big).\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i x_i.x_{n+2} - \sum_{\substack{i\leqslant m \\ j\geqslant m+1}} \lambda_i\lambda_j x_i x_j \leqslant 0$$

donc $w = 0$ et donc $x_{n+2} = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$ avec $\lambda_i \leqslant 0$. Or $x_{n+2}.x_{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i x_i.x_{n+1} \geqslant 0$ ce qui est impossible.

(2) On suppose ici les (x_i) normés. On a donc $x_i.x_j = \cos\varphi < 0$. On a donc

$$\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 + 2\sum_{i<j} x_i.x_j = p + 2\cos\varphi.\frac{p(p-1)}{2} \geqslant 0$$

donc $1 + (p-1)\cos\varphi \geqslant 0$.

Montrons qu'il y a égalité si $p = n+1$: il suffit en fait de prouver que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. Comme la famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est liée, il existe des (α_i) tel que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = 0$. Soit j tel que $\alpha_j \neq 0$, en multipliant scalairement par chacun des vecteurs x_k,on obtient $L_k = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i . x_k = 0$ et, en retranchant $L_j - L_k$, on a $\alpha_k(\cos\varphi - 1) + \alpha_j(1-\cos\varphi) = 0$. Comme $\cos\varphi \neq 1$ on a $\alpha_k = \alpha_j$ c.q.f.d.

Solution 53

(1) On pose $v_n = \ln\left(n^{b-a}u_n\right)$ et on prouve que $\sum(\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ converge d'où $v_n \to e^\lambda > 0$ et $u_n \sim \dfrac{e^\lambda}{n^{b-a}}$.

(2) On a

$$\sum_{n=1}^{N} n(u_{n+1} - u_n) = \sum_{n=1}^{N+1} (n-1)u_n - \sum_{n=1}^{N} n u_n = -\sum_{n=1}^{N} u_n + N u_{N+1}.$$

Comme $Nu_{N+1} \to 0$ on a $\sum_{n=1}^{+\infty} n(u_{n+1} - u_n) = -\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Puis, comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$ on a $n(u_{n+1} - u_n) = a u_n - b u_{n+1}$ et donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \dfrac{b-1}{b-a-1} u_0$.

Solution 54 On suppose que $p_0 = 0$ et on pose $b_n = a_{p_n} + \cdots + a_{p_{n+1}-1}$. La somme partielle de la série $\sum b_n$ est une suite extraite de la somme partielle de la série $\sum a_n$. Les séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum (p_{n+1} - p_n) a_n$ sont à termes positifs.

(1) Supposons que $\sum(p_{n+1} - p_n)a_n$ est convergente. Comme $(a_n) \searrow$ alors $0 \leqslant b_n \leqslant (p_{n+1} - p_n) a_{p_n}$ donc $\sum b_n$ converge.

Soit $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ alors, comme la suite (p_n) est strictement croissante, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists! m \mid p_m \leqslant n < p_{m+1}$ et $m \to +\infty$ ssi $n \to +\infty$ (en effet, on a $n \leqslant (p_1 - p_0) + \cdots + (p_{m+1} - p_m) < p_1(1 + M + \cdots + M^n)$ et $M^{m+1} \geqslant n\dfrac{M-1}{p_1} + 1$– réciproque évidente–).

On a alors $A_n = B_{m-1} + a_{p_m} + \cdots + a_n \leqslant B_{m-1} + \underbrace{(p_{m+1} - p_m)a_{p_m}}_{\to 0}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} B_{m-1}$, la série $\sum a_n$ converge.

(2) Supposons que $\sum a_n$ converge alors $\sum b_n$ converge et comme $a_{p_n}(p_{n+1} - p_n) \leqslant M a_{p_n}(p_n - p_{n-1}) \leqslant M b_{n-1}$ d'où $\sum a_{p_n}(p_{n+1} - p_n)$ converge.

Solution 55 On note $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_l$ et $r_{-1} = C$. On construit $(n_q)_{q\in\mathbb{N}}$ tel que

(i) $\forall q \in \mathbb{N}$, $n_q < n_{q+1}$,

(ii) $\forall q \in \mathbb{N}$, $V_q < x \leqslant V_q + r_{n_q}$ où $v_k = u_{n_k}$ et $V_q = \sum_{k=0}^{q} v_k$.

On sait que la suite (r_n) décroît strictement donc $\exists! n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_{n_0} < x \leqslant r_{n_0-1}$. On pose $v_0 = u_{n_0}$ ce qui donne (ii) à l'ordre 0.
Supposons $n_0, n_1, \dots, n_{q-1}$ déterminés alors $\exists! q \in \mathbb{N} \mid n_q > n_{q-1}$ et $r_{n_q} < x - V_{q-1} \leqslant r_{n_q} - 1$ d'où $v_q \leqslant r_{n_q} < x - V_{q-1} \leqslant r_{n_q-1}$ et $V_q = v_q + V_{q-1} = V_q + r_{n_q}$ d'où (ii) à l'ordre q. La suite (n_q) est strictement croissante et $r_{n_q} \to 0$ donc $\sum_{q=0}^{+\infty} u_{n_q} = x$.

Solution 56 Par le T.A.F. on peut écrire $u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta} = \beta(u_{n+1} - u_n)v_n^{\beta-1}$ où $v_n \in [u_{n+1}, u_n]$ (la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang). Vu que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \sim -\lambda u_n^{\alpha-1}$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$ et $v_n \sim u_n$ donc $u_{n+1}^{\beta} - u_n^{\beta} \sim -\lambda\beta u_n^{\alpha+\beta-1}$. Pour $\beta = 1-\alpha$, on a $u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha} \to \lambda(\alpha-1)$ d'où, avec Césaro, $u_n^{1-\alpha} \sim \lambda(\alpha-1)n$ et donc $u_n \sim \dfrac{[\lambda(\alpha-1)]^{1/(1-\alpha)}}{n^{1/(\alpha-1)}}$.
Conclusion : $\sum u_n$ converge ssi $\alpha < 2$.

Solution 57 Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{f(k)}{k^2}$ alors

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{f(k)}{k^2} \geqslant \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} f(k) \geqslant \frac{1}{4n^2} \frac{n(n+1)}{2}$$

car $\{f(k),\ k \in [n+1, 2n]\}$ contient n entiers distincts. Conclusion (S_n) diverge.

Solution 58 On prend comme sommets des carrés les points de l'ensemble $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{Z} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{Z}$.
Dans chaque carré il y a au plus un élément z_i de la famille donc I est nécessairement dénombrable.
Comme I est dénombrable, on prend $I = \mathbb{N}$. Si la famille est sommable alors il est équivalent de supposer que l'on a rangé les (z_n) par ordre de module croissant. On a donc, pour $n \in [4k^2, 4(k+1)^2 - 1]$, $|z_n| \geqslant \dfrac{k}{\sqrt{2}}$, d'où, si $N \leqslant 4(k+1)^2 - 1$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{|z_n|^{\alpha}} &\leqslant \sum_{h=0}^{3} (\sqrt{2})^{\alpha} + \sum_{h=4}^{15} (\sqrt{2})^{\alpha} + \dots + \sum_{h=4k^2}^{4(k+1)^2-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{k}\right)^{\alpha} \\ &\leqslant \sqrt{2}^{\alpha}\Big(4 + 12 + \dots + \underbrace{\frac{4(k+1)^2 - 4k^2}{k^{\alpha}}}_{=\frac{4k+1}{k^{\alpha}} \sim \frac{4}{k^{\alpha-1}}}\Big)\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Solution 59

(1) On sait déjà que r_n est du signe de $\dfrac{(-1)^n}{(n+1)^\alpha}$ et que $|r_n| < \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$, pour utiliser le théorème des séries alternées, il ne reste plus qu'a prouver que $|r_n| \searrow$.

$$|r_n| - |r_{n+1}| = \sum_{p=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{(p+1)^\alpha} - \frac{2}{(p+2)^\alpha} + \frac{1}{(p+3)^\alpha}\right)$$

or, si $f(x) = x^{-\alpha}$ alors $f(p+1) - 2f(p+2) + f(p+3) > 0$ car f est convexe donc la suite $(|r_n|)$ est bien décroissante.

(2) On prouve par récurrence la formule

$$r_0 + r_1 + \cdots + r_n = 1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha-1}} + (-1)^n r_n$$

or $|nr_n| < \dfrac{n}{(n+1)^\alpha} \to 0$ d'où l'égalité.

Solution 60

(1) On a $\sum\limits_{n=1}^{N-1} r_n = \sum\limits_{n=1}^{N} na_n + Nr_N$ or, grâce au théorème de Césaro, $\dfrac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N-1} r_n \to 0$ et $Nr_N = o(N)$ donc $\sum\limits_{n=1}^{N} na_n = o(N)$.

(2) Soit $S_n^+ = \sum\limits_{\substack{k\in[1,n]\\ a_k\geqslant 0}} ka_k$, $S_n^- = \sum\limits_{\substack{k\in[1,n]\\ a_k<0}} ka_k$ et $S'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k|a_k| = S_n^+ - S_n^-$.

Vu que $\sum\limits_{k=1}^{n} ka_k = S_n^+ + S_n^- = o(n)$ on a $S'_n = 2|S_n^-| + o(n)$ et comme $|S_n^-| \leqslant cn$ alors $S'_n \leqslant 2cn + o(n)$.

(3) a) On a $\dfrac{|a_k|}{k} = \dfrac{S'_k - S'_{k-1}}{k^2} = \dfrac{S'_k}{k^2} - \dfrac{S'_{k-1}}{(k-1)^2} + S'_k \underbrace{\left[\dfrac{1}{(k-1)^2} - \dfrac{1}{k^2}\right]}_{\sim \frac{1}{2k^3}}$. Or $\dfrac{S'_k}{k^2} \to 0$ (grâce au 2) donc $\sum \dfrac{S'_k}{k^2} - \dfrac{S'_{k-1}}{(k-1)^2}$ converge et $S'_{k-1}\left[\dfrac{1}{(k-1)^2} - \dfrac{1}{k^2}\right] \leqslant \dfrac{C}{k^2} + o(\frac{1}{k^2})$ converge aussi donc t_n est bien définie.

b) On a en outre

$$\begin{aligned} t_n &= -\frac{S_{n-1}}{(n-1)^2} + \sum_{k=n}^{+\infty}\left[\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\right] S'_{k-1} \\ &= -\frac{S_{n-1}}{(n-1)^2} + \sum_{k=n}^{+\infty} O(\frac{1}{k^2}) = O(\frac{1}{n}). \end{aligned}$$

Solution 61 On va prouver que $(ii) \Rightarrow (i)$ et $(i) \Rightarrow (iii)$:

$(ii) \Rightarrow (i)$ (i) est équivalente à $\sum \ln(1+a_n)$ converge donc, si $b_n = \ln(1+a_n)$ alors $b_n \to 0$ et $a_n \to 0$.

Comme $b_n = a_n - \dfrac{a_n^2}{2} + o(a_n^2)$ alors $\sum a_n$ et $\sum a_n^2$ convergent et $\sum b_n$ converge (on ne peut utiliser les équivalents car on ne connaît pas le signe des a_n).

$(i) \Rightarrow (iii)$ Si $\sum a_n$ converge et $\sum a_n^2$ diverge (ou le contraire) alors $\sum b_n$ diverge ce qui assure l'implication par contraposée.

Quant à l'exemple, on a $a_{2n-1}a_{2n} = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ d'où

$$P_{2n} = \prod_{q=1}^{n-1} \frac{q(q+2)}{(q+1)^2} = \frac{n+1}{2n} \text{ et } P_{2n+1} = \frac{n+1}{2n}(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}})$$

donc $\sum a_n$ et $\sum a_n^2$ divergent et cependant $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = \dfrac{1}{2} > 0$ donc (iii) n'implique pas (i).

Solution 62 On se ramène d'abord au cas où $\alpha \in]0,\pi[$. $S_n(\alpha) = \dfrac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin(n+1)\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ donc $|S_n(\alpha)| \leqslant \dfrac{\pi}{\alpha}$.
On a alors

$$\begin{aligned} A_n(\alpha) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\alpha)}{k+n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k(\alpha)}{k+n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k(\alpha)}{k+n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{k+n+1}\right) S_k(\alpha) + \frac{S_n(\alpha)}{2n+1} \end{aligned}$$

d'où $|A_n(\alpha)| \leqslant \dfrac{\pi}{n\alpha} \to 0$.

Solution 63 Soit $l = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(\lambda x) - f(x)}{x}$ alors, si $\lambda < 1$, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(\lambda^n x) - f(x)}{x} = l\frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1}$$

d'où

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{l}{\lambda - 1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n[l - g(\lambda^n x)] \to \frac{l}{\lambda - 1}.$$

On fait la même chose avec $\lambda > 1$.

Solution 64 On a $f(u) - f(v) = (u-v)g(\frac{u+v}{2})$ donc f est dérivable et $f'(v) = g(v)$.
Comme g est dérivable alors f est 2 fois dérivable.
On dérive par rapport à u, puis par rapport à v la première relation

$$\begin{aligned} f'(u) &= g\left(\frac{u+v}{2}\right) + \frac{u-v}{2}g'\left(\frac{u+v}{2}\right) \\ 0 &= \frac{u-v}{2}g''\left(\frac{u+v}{2}\right) \end{aligned}$$

g est donc une fonction affine et donc f est une fonction polynomiale de degré $\leqslant 2$. On vérifie alors que les fonctions polynomiale de degré $\leqslant 2$ satisfont la relation.
Si g est localement bornée alors f est continue donc g est continue, on peut utiliser le résultat précédent.

Solution 65 On a $A(f)=\displaystyle\int_0^{1/2}[f'(1-t)-f'(t)]\,\mathrm{d}t$ or $f'(1-t)-f'(t)=(1-2t)f''(u)$ avec $t\leqslant u\leqslant 1-t$ donc $f'(1-t)-f'(t)\leqslant 1-2t$ et $A(f)\leqslant\dfrac{1}{4}$ d'où $M\leqslant\dfrac{1}{4}$.

On a $A(f)=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow\forall t\in[0,\frac{1}{2}]$, $f'(1-t)-f'(t)=1-2t$ et $f'(1)-f'(0)=1$. On a alors $1=\displaystyle\int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t$ donc $f''=1$ soit $f(t)=\dfrac{t^2}{2}+at+b$ et $M=\dfrac{1}{4}$.

Solution 66 On écrit la formule de Taylor reste de Lagrange :

$$f(x+y)=f(x)+yf'(x)+\frac{y^2}{2}f''(x+\theta_1 y)$$
$$f(x-y)=f(x)-yf'(x)+\frac{y^2}{2}f''(x-\theta_2 y)$$

On fait le produit, on divise par y^2 et, en utilisant l'hypothèse :

$$\begin{aligned}&-(f'(x))^2+\frac{1}{2}f(x)[f''(x+\theta_1 y)+f''(x-\theta_2 y)]\\&\qquad+\frac{1}{2}yf'(x)[f''(x-\theta_2 y)-f''(x+\theta_1 y)]+\frac{y^2}{4}f''(x+\theta_1 y)f''(x-\theta_2 y)\leqslant 0\end{aligned}$$

et, en passant à la limite, $y\to 0$ on obtient $-f'(x)^2+f(x)f''(x)\leqslant 0$.

Solution 67 On utilise la formule de Taylor-Lagrange en 0, on a ainsi $f(x)=\dfrac{x^2}{2}f''(c)$.

Si $f(\frac{1}{2})\geqslant\dfrac{1}{2}$ alors $\dfrac{1}{8}f''(c)\geqslant\dfrac{1}{2}$ soit $f''(c)\geqslant 4$.

Si $f(\frac{1}{2}<\dfrac{1}{2}$ alors $f(x)=f(1)+\dfrac{(x-1)^2}{2}f''(c)$ donc $\dfrac{1}{8}f''(c)\leqslant-\dfrac{1}{2}$ donc $f''(c)\leqslant -4$.

Solution 68

(1) Soit $f_n(x)=x^n+\cdots+x$ alors f_n est strictement croissante de 0 à $+\infty$ ce qui permet de définir x_n.

$f_n(x_n)=1$ donc $f_{n+1}(x_n)=1+x_n^{n+1}>1$ d'où $x_{n+1}<x_n$. La suite (x_n) est décroissante, minorée par 0, elle converge vers une limite l.

On a $x_n\dfrac{1-x_n^n}{1-x_n}=1$ et comme $x_n<x_2<1$ alors $x_n^n\to 0$ donc $x_n\dfrac{1}{1-x_n}\to 1$ i.e. $l=\dfrac{1}{2}$.

(2) $x_n\dfrac{1-x_n^n}{1-x_n}=1\Leftrightarrow x_n-x_n^{n+1}=1-x_n\Leftrightarrow 2x_n-1=x_n^{n+1}=2(x_n-\frac{1}{2})\sim\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ d'où $x_n=\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}(1+o(1))$.

Solution 69

(1) g dérivable en $x\Rightarrow g$ pseudo-dérivable en x. La réciproque est fausse (prendre $g(x)=|x|$ en 0).

(2) a) Comme g est continue, il suffit de prouver que $\forall(x,y)\in\mathring{I}$, $x<y\Rightarrow g(x)\leqslant g(y)$. On a $[x,y]\subset\mathring{I}$ et $[x,y]$ compact donc $[x,y]\subset\displaystyle\bigcup_{z\in[x,y]}]z-\varepsilon_z,z+\varepsilon_z[$

entraîne, grâce à la propriété de Borel-Lebesgue, l'existence de $z_1 < \ldots < z_n$ tels que $[x, y] \subset \bigcup_{i=1}^{n}]z_i - \varepsilon_i, z_i + \varepsilon_i[$. On en déduit que $g(x) \leqslant g(y)$.

b) On applique le résultat du a à $g_\alpha(x) + \alpha x$ avec $\alpha > 0$ donc, $\forall \alpha > 0$, $g_\alpha(x) \leqslant g_\alpha(y)$ et on passe à la limite quand α tend vers 0.

Solution 70 La première inégalité est équivalente à $g(t) = -\ln(1 - \frac{t}{2}) - \cdots - \ln(1 - \frac{t}{n} \leqslant t \ln n$. Comme g est convexe, cette inégalité est évidente ($g(0) = 0$ et $g(1) = \ln n$).
Pour la deuxième, il suffit de prouver que $h(t) = -\ln(1-t) - \cdots - \ln(1 - \frac{t}{n}) \geqslant t \ln(n+1)$. Or $h'(0) = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \geqslant \ln(n+1)$ (faire un dessin) et comme h est convexe, on peut conclure.

Solution 71

(1) Soit $b > a$ alors, comme f' est décroissante

$$\begin{aligned}\varphi(b) - \varphi(a) &= f(b) - f(a) - bf'(b) + af'(a) = (b-a)f'(c) - bf'(b) + af'(a)\\ &= b[\underbrace{f'(c) - f'(b))}_{\leqslant 0}] + a[\underbrace{f'(a) - f'(c)}_{\leqslant 0}]\end{aligned}$$

donc φ est décroissante.

(2) On sait que f' est croissante, comme $f(x) - xf'(x) \to b$ alors f' est bornée donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = a$ donc la courbe admet la droite d'équation $y = ax + b$ comme asymptote.

Solution 72 $\Rightarrow$ $ax + \ln f$ est convexe donc $\ln(e^{ax} f(x))$ est convexe et comme exp est convexe, $e^{ax} f(x)$ est convexe.
$\Leftarrow$ $e^{a(tx+(1-t)y)} f(tx + (1-t)y) \leqslant te^{ax} f(x) + (1-t)e^{ay} f(y)$
donc $f(tx + (1-t)y) \leqslant te^{a(1-t)(x-y)} f(x) + (1-t)e^{at(y-x)} f(y)$. On prend alors $a = \dfrac{\ln f(y) - \ln(f(x)}{x - y}$ d'où

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant f(x)^t f(y)^{1-t}$$

et donc $\ln f$ est convexe.

Solution 73 On a

$$\begin{aligned}f(x+\pi) + f(x) &= \big[-f(x+t)\cos t\big]_0^\pi = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-f(x+t)\cos t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\pi (f(x+t)\sin t - f'(x+t)\cos t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or, par intégration par parties, on obtient

$$\int_0^\pi f'(x+t)\cos t\,\mathrm{d}t = \big[\underbrace{f'(x+t)\sin t\big]_0^\pi}_{=0}\big] - \int_0^\pi f''(x+t)\sin t\,\mathrm{d}t.$$

d'où $f(x+\pi) + f(x) = \displaystyle\int_0^\pi (f(x+t) + f''(x+t))\sin t\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Solution 74 On a $u_n = -\ln\left(1 - \dfrac{n-1}{n}\right) = \ln n$...

Solution 75 On prend un repère tel que Oy soit parallèle à la bissectrice de AT et BT et dans lequel A et B ont pour abscisse -1 et $+1$. Dans ce nouveau repère, le graphe de f est encore celui d'une application convexe.
Soit m la pente de TB, $-m$ celle de AT alors

$$x_T = \frac{1}{2m}(y_A - y_B) \text{ et } y_T = \frac{1}{2}(y_A + y_B) - m$$

d'où $AT^2 = (1+m^2)(x_T+1)^2$ et $BT^2 = (1+m^2)(x_T-1)^2$ et donc

$$AT + TB = \sqrt{1+m^2}(|x_T+1| + |x_T-1|).$$

Comme $y_A - y_B = y(-1) - y(1) = -2y'(\alpha)$ avec $\alpha \in]-1,1[$, et $y'(-1) \leqslant y'(\alpha) \leqslant y'(1)$ car y' est croissante, alors on a $|x_T| \leqslant 1$ et donc $AT + TB = 2\sqrt{1+m^2}$ et

$$\widehat{AB} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{1+m^2}$$

Solution 76 On a $\dfrac{1}{3} = \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 2xf(x^2)\,\mathrm{d}x$ d'où

$$\int_0^1 [f(x^2) - x]^2\,\mathrm{d}x = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x}.$$

Solution 77

(1) Soit $(x^p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy alors chaque suite $(x_n^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy donc converge, soit x_n sa limite.

On sait qu'il existe N tel que $p \geqslant N$ entraîne $\|x^{p+q} - x^p\| \leqslant \varepsilon$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n^{p+q} - x_n^p| \leqslant \varepsilon$ soit, en passant à la limite sur q, $|x_n - x_n^p| \leqslant \varepsilon$. On a donc une convergence uniforme (par rapport à n) de x_n^p vers x_n, le théorème de double limite s'applique donc et $x \in E$. On a aussi $\lim\limits_{p\to+\infty} x^p = x$. Conclusion : E est bien un Banach.

(2) En fait, on a $\|x - \sum\limits_{n=0}^{N} x_n e_n\| = \sup\limits_{n>N} |x_n|$ et, en tenant compte de ce que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sup\limits_{n>N} |x_n| = 0$, on a bien $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N} x_n e_n = x$.

(3) Soit $x_N = \sum\limits_{n=0}^{N} \varepsilon_n e_n$ où ε_n est du signe de $u(e_n)$. x_N est sur la sphère unité donc $|u(x_N)| \leqslant \|u\|$ ce qui prouve la première assertion.

On définit $u(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x_n$ pour $x = (x_n)$ qui est une série A.C., u est bien continue car $|u(x)| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|.\|x\|$ et en utilisant la suite $x_N = \sum\limits_{n=0}^{N} \varepsilon_n e_n$, on a bien $\|u\| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

Solution 78

(1) Si $(f,g)\in E^2$, $f-g$ est 1-périodique donc bornée sur $\mathbb{R}$, on peut poser

$$\mathrm{d}(f,g)=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$$

Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E alors, pour tout x, $(f_k(x))$ est une suite de Cauchy donc converge. On pose alors $f(x)=\lim\limits_{k\to+\infty}f_k(x)$.

f vérifie bien $f(x+1)=f(x)+1$ (par passage à la limite), de même, par conservation des inégalités, f est croissante. Enfin, sur $[0,1]$, f est limite uniforme de fonctions continues est bien continue sur $[0,1]$ puis sur $\mathbb{R}$ grâce à $f(x+1)=f(x)+1$.

Conclusion : E est complet.

(2) Comme $\varphi'>0$, φ est strictement croissante et, grâce au T.A.F., $\varphi(x)\geqslant\varphi(0)+kx$ pour $x>0$ et $\varphi(x)\leqslant\varphi(0)+kx$ pour $x<0$ donc $\varphi(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ et $(\varphi^{-1})'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}\leqslant\dfrac{1}{k}<1$.

Posons $F(x)=\varphi^{-1}(f(nx))$ pour $f\in E$, F est continue, croissante. Comme $\varphi(\varphi^{-1}(x)+1)=x+n$ alors $\varphi^{-1}(x)+1=\varphi^{-1}(x+n)$ et vu que $f(x+n)=f(x)+n$ on en déduit que $F(x+1)=F(x)+1$ donc $F\in E$. Si on pose $F=\Phi(f)$ alors $\Phi\ :E\to E$. Montrons que Φ est contractante, ce qui, avec le théorème du point fixe permettra de dire qu'il existe f telle que $\Phi(f)=f$ (c'est la conclusion attendue).

Grâce au T.A.F., on a

$$\begin{aligned}\Phi(f)(x)-\Phi(g)(x)=\varphi^{-1}(f(nx))-\varphi^{-1}(g(nx))&=(f(nx)-g(nx))(\varphi^{-1})'(y)\\&\leqslant\frac{1}{k}|f(nx)-g(nx)|\end{aligned}$$

donc $\mathrm{d}(\Phi(f),\Phi(g))\leqslant\dfrac{1}{k}\,\mathrm{d}(f,g)$.

Solution 79

(1) P_n-P_n' est divisible par $X^n(1-X)^n$ et comme $f(P)=P-P'$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$, il existe A_n tel que $P_n=A_nf^{-1}(Q_n)$ où $Q_n=X^n(1-X)^n$.

Comme $E_k=f^{-1}(\frac{X^k}{k!})=\sum\limits_{p=0}^{k}\dfrac{X^p}{p!}$ alors $f^{-1}(Q_n)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(n+k)!\dbinom{n}{k}E_{k+n}$ et $A_n=\dfrac{1}{f^{-1}(Q_n)(0)}$ car $P_n(0)=1$.

(2) On a donc $\dfrac{1}{A_n}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k(n+k)\dbinom{n}{k}$ et, en posant $u_{n,k}=(n+k)!\dbinom{n}{k}$ on a

$$\frac{(-1)^n}{A_n}\geqslant u_{n,n}-u_{n,n-1}=u_{n,n-1}\geqslant n(2n-1)!.$$

Avec la formule de Taylor-Lagrange, on a $|E_{n+k}(x)-e^x|\leqslant\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}$ d'où

$$|P_n(x)-e^x|\leqslant(n+1)|A_n|u_{n,n}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}e^{|x|}\leqslant 2\frac{|x|^{n+1}}{n!}e^{|x|}$$

et donc (P_n) converge uniformément vers e^x sur tout compact.

Solution 80

(1) Sur $[\varepsilon, M]$ la fonction $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ est bornée et atteint sa borne supérieure (qui est nécessairement < 1).

(2) $(f_n(x)) \searrow$ et minorée par 0 donc la suite $(f_n(x))$ converge et si $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = l > 0$ alors on applique le résultat (2) sur $[l, |x|]$ qui fournit une contradiction. On a donc $\lim\limits_{n\to 0} f_n(x) = 0$.

(3) Soit $\varepsilon > 0$, sur $[\varepsilon, M] \cup [-M, -\varepsilon]$ $|f(x)| \leqslant k|x|$.

On a donc $|f_n(x)| \leqslant \max(\varepsilon, k^n M)$ et, pour $n \geqslant \dfrac{1}{\ln k} \ln \frac{\varepsilon}{M}$ on a $|f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ i.e. $f_n \xrightarrow[{[-M,M]}]{C.U.} 0$.

Solution 81 Pour $\sin \frac{x}{2^n} \neq 0$ on a $g(x) = \dfrac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$ et pour $x = 2^n \pi k$ alors $g_n(x) = (-1)^k$.

On a donc $g_n \xrightarrow[\mathbb{R}]{C.S.} \dfrac{\sin x}{x}$.

Comme $|g_n(2^n\pi)| = 1$ et $g(2^n\pi) = 0$, il ne peut y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Sur $[-a, a]$, soit n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow \dfrac{a}{2^n} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ alors $g_n(x) - g(x) = \sin x \left(\dfrac{1}{2^n} \sin \frac{x}{2} - \dfrac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$. $\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}$ est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, soit M sa borne supérieure alors $|g_n(x) - g(x)| \leqslant \dfrac{M}{2^n}$ c.q.f.d.

Solution 82

(1) Soit $M = \|f\|$ et $|x| \leqslant X$ alors $\left|\dfrac{x}{n} f(\frac{x}{n})\right| \leqslant \dfrac{MX}{n} < 1$ pour $n > MX$. On a donc $u_n(x) > 0$ et $\ln u_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{x}{n} f(\frac{k}{n})\right)$. Or, pour $|u| \leqslant \dfrac{1}{2}$, on a l'inégalité $u - \dfrac{u^2}{2} \leqslant \ln(1+u) \leqslant u$ donc, pour $n > 2MX$, $\dfrac{x}{n} f(\frac{k}{n}) < \dfrac{1}{2}$ ce qui permet d'utiliser l'encadrement précédent :

$$0 < \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{n} f(\frac{k}{n}) - \ln u_n(x) < \frac{M^2 X^2}{n}$$

d'où $u_n(x) \to u(x) = e^{Ax}$ où $A = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

(2) On sait déjà que $\ln u_n$ converge uniformément sur tout compact $[-X, X]$ vers $\ln u(x)$ et comme $|\ln u_n(x)|$ est bornée, $u_n(x)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

(3) $u_n(x) - e^{Ax} = e^{\ln u_n(x)} - e^{Ax} = e^{Ax}\left(e^{\ln u_n(x) - Ax} - 1\right) \sim e^{Ax}(\ln u_n(x) - Ax)$. Or, pour $u < \frac{2}{3}$, $|\ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2}| < |u|^3$ donc

$$u_n(x) - e^{Ax} \sim \frac{e^{Ax}}{2n}\left[x(f(1) - f(0)) - x^2 \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t\right]$$

à condition que $x(f(1) - f(0)) - x^2 \int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$.

Solution 83

(1) On a $u_n(x) = \dfrac{x}{n} - \ln(1+\frac{x}{n}) \sim \dfrac{x^2}{2n^2}$ donc il y a convergence dès que tous les u_n sont définis. Le domaine de définition de S est donc $]-1,+\infty[$.

(2) On écrit

$$\begin{aligned}
S(x+1) - S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln(n+1+x) + \ln(n+x)\right)\\
&= \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} - \ln(N+1+x) + \ln(1+x)\right)\\
&= \ln(1+x) + \lim_{N\to+\infty}(\ln N + \gamma - \ln(N+1+x))\\
&= \ln(1+x) + \gamma
\end{aligned}$$

et on obtient la relation en prenant l'exponentielle.

(3) On a de manière élémentaire $A(x+1) = xA(x)$.

À ce stade, vous avez dû reconnaître la fonction Γ d'Euler. $\ln A(x) = -\ln x - \gamma x + S(x)$, pour prouver que $\ln A$ est convexe, il suffit de prouver que S est convexe, on vérifie par exemple que $S''(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+x)^2} > 0$ (après justifications d'usage) où on utilise la convexité de $-\ln$.

Solution 84 Soit $g_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$ alors $|g_n(x)| \leqslant g_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \dfrac{1}{2n\sqrt{n}}$ d'où la convergence normale (et donc uniforme) sur $\mathbb{R}$.
On part alors de l'inégalité

$$\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)} \leqslant \frac{1}{n(1+nx^2)} \leqslant \int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)}$$

et, en appelant $s_n(x)$ la somme partielle, on a

$$\ln\frac{(n+1)(1+x^2)}{1+(n+1)x^2} = \int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)} \leqslant \frac{s_n(x)}{x} \leqslant \frac{1}{1+x^2} + \int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx^2)} = \frac{1}{1+x^2} + \ln\frac{n(1+x^2)}{1+nx^2}$$

d'où $\ln\dfrac{1+x^2}{x^2} \leqslant \dfrac{f(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} + \ln\dfrac{1+x^2}{x^2}$ et donc

$$f(x) \sim -2x\ln x.$$

Solution 85 On pose $v_n = u_n - f(0)$ et on se ramène au cas où $f(0) = 0$.
Soit a tel que $|f(x)| \leqslant \varepsilon/2$ pour $x \in [0,a]$ alors

$$\left|\int_0^a f(t)\varphi^n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_0^A \varphi^n(t)\,\mathrm{d}t$$

et, pour $0 < b < a$

$$\frac{\left|\int_0^A f(t)\varphi^n(t)\,\mathrm{d}t\right|}{\int_0^A \varphi^n(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \frac{\int_0^A |f(t)|\varphi^n(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^b \varphi^n(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant \frac{A}{b}\|f\|\frac{\varphi^n(a)}{\varphi^n(b)}$$

et on prend $n \geqslant N$ pour que $\dfrac{A}{b}\|f\|\left(\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(b)}\right)^n \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Solution 86 On pose $M = \|f\|$ alors

$$\left|\int_\alpha^{+\infty} \frac{nf(x)\,\mathrm{d}x}{1+n^2x^2}\right| \leqslant M\int_{\alpha n}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \to 0$$

d'où, en faisant la différence,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nf(x)\,\mathrm{d}x}{1+n^2x^2} = f(0)\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}f(0).$$

Solution 87

(1) I n'est définie que si $\alpha+\beta > 1$.

(2) Si $\alpha+\beta > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+\lambda x^\beta)} = g(\lambda)$. Or $\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+\lambda x^\beta)} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ si $\alpha > 1$ donc la suite (g_n) converge uniformément (si $\alpha > 1$).
Si $0 < \alpha \leqslant 1$ alors

$$\int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+\lambda x^\beta)} \geqslant \int_n^{2n}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+\lambda x^\beta)} \geqslant \frac{n^{1-\alpha}}{2^\alpha},$$

(g_n) ne converge pas uniformément.

(3) On pose $y = \lambda^{1/\beta}x$ d'où $g(\lambda) = \lambda^{\frac{\alpha-1}{\beta}}\displaystyle\int_{\lambda^{1/\beta}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha(1+y^\beta)}$ et comme $0 < \alpha < 1$ on a l'inégalité $g(\lambda) - \lambda^{\frac{\alpha-1}{\beta}}A = -\lambda^{\frac{\alpha-1}{\beta}}\displaystyle\int_0^{\lambda^{1/\beta}}\frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha(1+y^\beta)}$.
Or $\dfrac{1}{1+\lambda}\dfrac{1}{y^\alpha} < \dfrac{1}{y^\alpha(1+y^\beta)} < \dfrac{1}{y^\alpha}$ sur $[0,\lambda^{1/\beta}]$ d'où

$$\frac{1}{1+\lambda}\frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{\beta}}}{1-\alpha} \leqslant \int_0^{\lambda^{1/\beta}}\frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha(1+y^\beta)} \leqslant \frac{\lambda^{\frac{1-\alpha}{\beta}}}{1-\alpha}$$

et donc $\dfrac{1}{1+\lambda}\dfrac{1}{1-\alpha} \leqslant \lambda^{\frac{\alpha-1}{\beta}}1 - g(\lambda) \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}$ d'où

$$\lim_{\lambda\to0^+}\left[g(\lambda) - \lambda^{\frac{\alpha-1}{\beta}}A\right] = \frac{1}{1-\alpha}$$

Solution 88 On sait que $\lim\limits_{a\to+\infty}\displaystyle\int_c^d \sin atg(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour g continue. Soit $X > 0$, en posant $g_x(u) = \dfrac{f(x+u)-f(x)}{u}$ fonction continue sur $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{-X}^X f(x+u)\frac{\sin au}{u}\,\mathrm{d}u = f(x)\int_{-X}^X\frac{\sin au}{u}\,\mathrm{d}u + \underbrace{\int_{-X}^X g_x(u)\sin au\,\mathrm{d}u}_{\to0 \text{ quand } a\to+\infty}$$

donc, pour tout $X > 0$,

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{-X}^{X} f(x+u)\frac{\sin au}{u}\,\mathrm{d}u = f(x)\lim_{a\to+\infty}\int_{-aX}^{+aX}\frac{\sin v}{v}\,\mathrm{d}v \text{ en posant } v = au$$
$$= \pi f(x).$$

Or, à x fixé, $\dfrac{|f(x+u)|}{|u|} \sim \dfrac{|f(x+u)|}{|x+u|}$ au voisinage de ∞ donc, il existe $X > 0$ tel que $\displaystyle\int_{|u|\geqslant X}\frac{|f(x+u)|}{|u|}\,\mathrm{d}u \leqslant \varepsilon$ et on complète la démonstration pour conclure.

Solution 89 On sait que l'on peut dériver par rapport à a d'où

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{(a+\sin t)^2} = \frac{2a\pi}{(a^2-1)^{3/2}},$$

et, en dérivant une deuxième fois,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{(a+\sin t)^3} = \frac{\pi(2a^2+1)}{(a^2-1)^{5/2}}.$$

Solution 90 $(x,\theta)\mapsto \exp\left(-\dfrac{x^2}{\cos^2\theta}\right)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times[0,\frac{\pi}{4}]$ donc g est $\mathcal{C}^1$ et on peut dériver sous le signe intégral :

$$g'(x) = -2x\int_0^{\pi/4}\exp\left(-\frac{x^2}{\cos^2\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta}$$
$$= -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xu)^2}\,\mathrm{d}u \quad \text{en posant } u = \tan\theta$$
$$= -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-v^2}\,\mathrm{d}v \quad \text{avec } v = xu.$$

Puis $(f^2)'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-v^2}\,\mathrm{d}v$ d'où $f^2(x)+g(x) = f^2(0)+g(0) = \dfrac{\pi}{4}$. Or $0 \leqslant g(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}e^{-x^2}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et, par conséquent $\left(\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$ ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Solution 91 Si $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ alors $F(k+1)-F(k) = f(k) + \displaystyle\int_k^{k+1}(k+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$ (Taylor-intégral) et $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}(F(k+1)-F(k))$. Comme $\dfrac{f'}{f}\to 0$, $\displaystyle\int_k^{k+1}(k+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t = o[F(k+1)-F(k)]$ donc $a_k f(k) \sim a[F(k+1)-F(k)]$ et on utilise le résultat sur les équivalents des sommes partielles des séries divergentes.

Solution 92 On vérifie que $[\ln_p(x)]' = \dfrac{1}{x\ln x\ldots\ln_{p-1}x}$ et on utilise ensuite une comparaison série-intégrale. $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 1$.

Solution 93 Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}(1+x)^{\beta}}$ alors $f \searrow 0$ et on a $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} f(k)$. On a donc

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^{\alpha+\beta}} \leqslant \int_{n+1}^{2n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \int_{n}^{2n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{n}^{2n} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha+\beta}}.$$

- Si $\alpha+\beta = 1$ alors $\ln \dfrac{2n+2}{n+2} \leqslant u_n \leqslant \ln 2$, $u_n \to \ln 2$ donc $\sum u_n$ diverge.
- Si $\alpha+\beta \neq 1$ alors

$$0 < \frac{1}{\alpha+\beta-1}\left[\frac{1}{(n+2)^{\alpha+\beta-1}} - \frac{1}{(2n+2)^{\alpha+\beta-1}}\right] \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\alpha+\beta-1}\left[\frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}} - \frac{1}{(2n)^{\alpha+\beta-1}}\right]$$

  – Si $\alpha+\beta > 2$ alors $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha+\beta-1}}$ converge donc $\sum u_n$ converge,
  – Si $\alpha+\beta \leqslant 2$ alors $\sum \dfrac{1}{n^{\alpha+\beta-1}}$ diverge donc $\sum u_n$ diverge.

Solution 94 Il suffit d'utiliser la caractérisation suivante $R = \sup\{r \geqslant 0 \mid \lim\limits_{n\to+\infty} a_n r^n = 0\}$.

Solution 95 On trouve $RR' \leqslant 1$ et on ne peut rien dire de plus. En effet, si on prend $a_n = \begin{cases} 1/n! & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ alors $R = 1$ et $R' = 0$ donc $RR' = 0$.

Solution 96 $R = 1$ car $a_n \to 1$. On a ensuite $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3\varphi(\frac{n}{3})x^n = \dfrac{x(1+2x)}{1-x^3}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 4\varphi(\frac{n}{4})x^n = \dfrac{x(1+2x+3x^2)}{1-x^4}$ d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1-x^3}\frac{1+2x+3x^2}{1+x+x^2+x^3}.$$

Solution 97

(1) On fait un développement limité à l'ordre 3 et, en prenant $a = 1$, on obtient $b = -1$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $\nu = -1$.

(2) Il faut prouver alors que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}.$$

On utilise le développement en série double qui converge pour $|x| < 1$ et on prouve l'égalité.

Solution 98

(1) On a $a_n \leqslant n!$ donc $R \geqslant 1$. Puis, si on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ alors $f'(t) = (1+t)f(t)$ d'où $f(t) = e^{t+t^2/2}$ (donc $R = +\infty$). On a alors, en faisant le produit de Cauchy,
$$a_n = \sum_{p=0}^{[n/2]} \frac{n!}{2^p p!(n-2p)!}.$$

(2) Soit $E_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^2 = \mathrm{Id}\}$, on pose $F_k = \{\sigma \in E_n \mid \sigma_n = k\}$ alors les F_k réalisent une partition de E_n d'où $\operatorname{Card} E_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Card} F_k = \operatorname{Card} E_{n-1} + (n-1) \operatorname{Card} E_{n-2} = a_n$.

Solution 99 Par une récurrence immédiate f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Ensuite $f^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 i)^p e^{-n}$ d'où $|f^{(p)}(0)| = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2p} e^{-n} \geqslant p^{2p} e^{-p}$ donc $\sum \frac{f^{(p)(0)}}{p!} x^p$ diverge pour tout $x \neq 0$.

Solution 100 On vérifie que $h(x) = f(x) + ig(x) = e^{i\sqrt{2}\operatorname{Arccos} x}$ satisfait l'équation différentielle $(1-x^2)h'' - xh' + 2h = 0$ puis on cherche les solutions D.S.E. $h(x) = \sum a_n x^n$ d'où
$$a_{2n} = \frac{[(2n-2)^2-2][\ldots][-2]}{(2n)!} a_0 \text{ et } a_{2n+1} = \frac{[(2n-1)^2-2][\ldots][1-2]}{(2n+1)!} a_1.$$
Pour f, on a $a_0 = \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $a_1 = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Pour g, on a $a_0 = \sin \frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $a_1 = -\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Solution 101

(1) a) g est paire donc g' est impaire et $g'(0) = 0$. Comme $g''(x) \geqslant 0$ alors $g' \nearrow$ i.e. $g'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0, a]$.
Conclusion : $g \nearrow$ sur $[0, a]$ et on fait de même pour $g^{(2n)}$.

b) On a
$$g(v) = g(u) + (v-u)g'(u) + \cdots + \frac{(v-u)^n}{n!} g^{(n)}(u) + \frac{(v-u)^{n+1}}{(n+1)!} g^{(n+1)}(u + \theta(v-u))$$
et comme toutes les quantités qui interviennent ici sont positives, on a bien
$$\frac{(v-u)^n}{n!} g^{(n)}(u) \leqslant g(v) \leqslant g(a) = M.$$

c,d $I_n(x)$ est évidemment paire puis, en écrivant la formule de Taylor reste intégral à l'ordre $2n+1$, on obtient
$$I_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} g^{(2n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$
et donc $I_n(x) \geqslant 0$. On applique la majoration du (ii) à g'' :
$$\frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} g^{(2n+2)}(t) \leqslant M$$

et donc $I_n(x) \leqslant M\displaystyle\int_0^x \frac{x-t}{2n+1}\,\mathrm{d}t = M\frac{x^2}{2n+1}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x) = 0$ pour $x \in [0,a]$, de même, vu que I_n est paire, ce résultat est valable pour $x \in [-a,a]$.

On peut alors conclure, f est bien D.S.E. sur $[-a,a]$.

(2) Si $g(x) = \dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ alors g vérifie les hypothèses du 1 et donc

$$\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} f^{(2p)}(0)$$

pour $x \in]-a,a[$ (on a utilisé le fait que $g^{(2p)}(0) = f^{(2p)}(0)$).

On sait aussi que $I_n(x) \to 0$ pour $x \in]-a,a[$.

Si $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\left[f^{(2n+2)}(t) + f^{(2n+2)}(-t)\right]\mathrm{d}t \\ &\geqslant \frac{1}{2}\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} f^{(2n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \to 0 \end{aligned}$$

donc, pour $x \in [0,a[$ on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Enfin, si $x \in]-a,0]$ alors

$$\begin{aligned} f(x) &= [f(x)+f(-x)] - f(-x) \\ &= 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{(2p)}}{(2p)!} f^{(2p)}(0) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} f^{(n)}(0) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0). \end{aligned}$$

Solution 102 Soit $l = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et λ une valeur propre de T.

- Si $|\lambda| > 1$ alors $f(x+n) = f(x) \to l$ donc f est constante ce qui est impossible.
- Si $\lambda = 1$ alors $f(x+n) = f(x)$ donc f est constante. 1 est valeur propre de T.
- Si $\lambda = -1$ alors $f(x+n) = (-1)^n f(x)$ donc $f = 0$, écarté.
- Si $0 < \lambda < 1$ alors $f(x) = \lambda^x$ est un vecteur propre et toute application $g(x) = f(x)h(x)$, où h est une fonction 1-périodique, est aussi vecteur propre.
- Si $-1 < \lambda < 0$ alors $f(x) = |\lambda|^x k(x)$, où $k(x+1) = -k(x)$ vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} |\lambda|^x k(x) = 0$, est vecteur propre. Il n'y en a pas d'autre, en effet, si $f(x+1) = \lambda f(x)$, soit $g(x) = \dfrac{f(x)}{|\lambda|^x}$ on a alors $g(x+1) = -g(x)$ et, comme $f \in E$, $\lim\limits_{x\to+\infty} |\lambda|^x g(x) = 0$.

Solution 103

(1) On a $\det A = D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & -a_1 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & -a_{n-1} \\ b_n & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}$ en retranchant la colonne $i-1$ de la colonne i pour $i = n, n-1, \dots, 2$. D'où $D_n = a_n D_{n-1} + a_1 a_2 - a_{n-1} b_n$ et, en

conclusion,

$$D_n = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n}\left(b_i \prod_{k\neq i} a_k\right).$$

(2) On a alors (en remplaçant a_i par $a_i - \lambda$)

$$P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(a_i - \lambda) + \sum_{i=1}^{n}\left(b_i \prod_{k\neq i}(a_k - \lambda)\right)$$

donc $P_A(a_k)$ est du signe de $(-1)^{k-1}$ et, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, P_A a bien toutes ses racines réelles et distinctes (et donc A est diagonalisable).

Solution 104 Soit H un hyperplan d'équation $y_1x_1 + \cdots + y_nx_n = 0 = Y^{\mathrm{T}}X$ alors les autres équations de H s'écrivent $Z^{\mathrm{T}}X = 0$ où $Z = \lambda Y$. Si H est stable par A alors $\forall X \in H$, $AX \in H$ ce qui s'écrit encore

$$\forall X \in H,\ Y^{\mathrm{T}}AX = 0 = (A^{\mathrm{T}}Y)X = 0$$

donc $A^{\mathrm{T}}Y = \lambda Y$ vu la remarque précédente et Y est bien un vecteur propre de A^{T}.
La réciproque est immédiate.

Solution 105 Si $M = (a_{ij})$ et $\operatorname{com} M^{\mathrm{T}} = (A_{ij})$ alors

$$\operatorname{Tr}[M'(t)(\operatorname{com}(M(t)))^{\mathrm{T}}] = \sum_{i,k} a'_{ik}A_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} a'_{ik}A_{ik}\right) = (\det M(t))'$$

en dérivant $\det M(t)$ par rapport aux lignes.
Soit $B(t) = \operatorname{com}(tI_n - A) = B_0t^{n-1} + \cdots + B_{n-1}$ et $\det(tI_n - A) = t^n + \alpha_1t^{n-1} + \cdots + \alpha_n$ donc, la relation $(tI_n - A)B(t) = (t^n + \alpha_1t^{n-1} + \cdots + \alpha_n)I_n$ nous donne

$$B_0 = I_n,\ B_k - AB_{k-1} = \alpha_kI_n,\ k \in [1, n] \text{ et } B_n = 0.$$

On utilise alors la relation avec les déterminants appliquée à $M(t) = tI_n - A$ d'où $\alpha_k = -\dfrac{1}{k}\operatorname{Tr}(AB_{k-1})$ et $A_k = B_k$ nous donne $A_n = 0$.
Cette formule permet alors de calculer par récurrence le polynôme caractéristique de A.

Solution 106 Soient (e_i) et (f_i) deux bases de E telles que la matrice de w (considéré comme application linéaire de E dans E) s'écrive $W = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Soit U la matrice de u dans (f_i) et V celle de v dans (e_i), alors on a $UW = WV$ ce qui s'écrit par blocs sous la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

d'où $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ donc P_{A_1} divise P_u et P_v c.q.f.d.

Solution 107 Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ alors $\forall k \in [1, n]$, $\lambda x_k = b_{k-1}x_{k-1} + a_k x_k + b_k x_{k+1}$ (avec $x_0 = x_{n+1} = 0$) où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre. Soit k tel que $|x_k| = \max(|x_i|) \neq 0$ alors, quitte à prendre $-X$, on peut supposer $x_k > 0$ d'où

$$2a_k x_k > \lambda x_k = a_k x_k + b_{k-1}x_{k-1} + b_k x_{k+1} \geqslant a_k a_k - x_k(|b_{k-1}| + |b_k|) > 0$$

ce qui fournit l'encadrement demandé en divisant par x_k.

Solution 108 Posons $\alpha_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_k \\ \vdots \\ \alpha_k^{k-1} \end{pmatrix}$. Les X_k forment une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_k = a_1 + a_2\alpha_k + \cdots + a_n\alpha_k^{n-1}$.

Solution 109 Si X et Y sont des éléments de $\mathbb{K}^n$, on leur associe $Z = X \otimes Y = \begin{pmatrix} x_1 Y \\ \vdots \\ x_n Y \end{pmatrix}$ (où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$). Si $AX = \alpha X$ et $BY = \beta Y$ alors $C = A \otimes B(X \otimes Y) = \alpha\beta X \otimes Y$. Si (X_i) et (Y_i) sont des bases de vecteurs propres de A et B alors $Z_{ij} = X_i \otimes Y_j$ est une base de vecteurs propres de $A \otimes B$.

Solution 110 (1) Si $P(X) = \prod_{i=1}^{m}(X - a_i)$ est un polynôme annulateur de A, scindé et ayant toutes ses racines simples alors $P(X^p) = \prod_{i=1}^{m}(X^p - a_i)$ est un polynôme annulateur de B, scindé. Toutes ses racines sont simples (si $x^p = a_1 \neq a_2 = y^p$ alors $x \neq y$).

(2) Si on prend $A = 0$, $n \geqslant 2$ alors il existe des matrice B telles que $B^p = 0$ et qui ne sont pas diagonalisables. Si $\dim \mathrm{Ker}\, A = 1$ alors 0 est racine simple de P, il existe (d'après le lemme des noyaux) un supplémentaire F de $\mathrm{Ker}\, A$ stable par A. On applique le résultat précédent aux restrictions de A et B à F. Il existe donc une base de F formée de vecteurs propres de B que l'on complète par un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\, A$.

En résumé : si A est non inversible et si $\mathrm{Rg}\, A = n-1$ alors B est diagonalisable. Cette propriété est fausse dès que $\mathrm{Rg}\, A \leqslant n-2$.

Solution 111 Si F est un sous-espace propre de E stable par u alors, avec $u' = u_{||F}$, on a $P_{u'}|P_u$ et comme P est irréductible, ceci est impossible ce qui assure le sens direct.
Réciproque : Si P n'est pas irréductible alors $P = QR$ où $\deg Q \geqslant 1$, $\deg R \geqslant 1$. Grâce au lemme des noyaux, $E = \mathrm{Ker}\, P(u) = \mathrm{Ker}\, Q(u) \oplus \mathrm{Ker}\, R(u)$ mais on n'est pas assuré ici d'avoir $\mathrm{Ker}\, Q(u) \neq \{0\}$, de même pour $\mathrm{Ker}\, R(u)$ (ceci est une VANNE à ne pas raconter).
Essayons une autre méthode : Soit $P_u = P_1^{\alpha_1} \dots P_k^{\alpha_k}$ la décomposition de P_u en produit de facteurs irréductibles. Il existe j tel que $\mathrm{Ker}\, P_j^{\alpha_j}(u) \neq \{0\}$ et donc $\mathrm{Ker}\, P_j(u) \neq \{0\}$.

On peut supposer $j=1$, soit $x\in\operatorname{Ker}P_1(u)$, $x\neq 0$ alors $F=\operatorname{Vect}(x,u(x),\dots,u^{p-1}(x))$, où $p=\deg P_1$, est stable par u. Comme $F\neq\{0\}$ alors $F=E$ donc $p\geqslant n$ et comme on avait $p\leqslant n$, c'est que P_u et P_1 ont même degré et $P|P_u$ donc P et P_u sont égaux à une constante multiplicative près.
Conclusion : P_u est bien irréductible.

Solution 112 On fait la division de X^p par $Q=3X^3-X^2-X-1=3(X-1)(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ (où α et $\overline{\alpha}$ sont les deux racines complexes de Q). $|\alpha|<1$ et si on écrit le reste de la division de X^p par Q dans la base $(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$, $(X-\alpha)(X-1)$, $(X-\overline{\alpha})(X-1)$, on a

$$\begin{aligned}X^p=QP+\frac{1}{2}(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})\\ +k(\alpha)(X-\overline{\alpha})(X-1)+k(\overline{\alpha})(X-\alpha)(X-1)\end{aligned}$$

où $k(\alpha)=\dfrac{\alpha^p}{(\alpha-\overline{\alpha})(\alpha-1)}\to 0$ quand $p\to+\infty$.
Conclusion : on a donc $A^p\to\dfrac{1}{2}(A-\alpha I_n)(A-\overline{\alpha}I_n)$.

Solution 113 Soit $P(X)=X(X-\alpha)(X-\beta)$ alors on vérifie que $P(f)=f^3-(\alpha+\beta)f^2+\alpha\beta f=0$.

- Supposons que P a ses trois racines (0, α, β) distinctes alors f est diagonalisable.
- Supposons $\alpha\neq\beta$, $\alpha=0$ alors $Q(X)=X(X-\beta)$ est un polynôme annulateur de f et donc f est diagonalisable.
- Si $\alpha=\beta\neq 0$ alors $Q(X)=X(X-\beta)$ est un polynôme annulateur de f, f est diagonalisable.
- Si $\alpha=\beta=0$ alors $f=0$ qui est bien diagonalisable.

Solution 114

(1) Si $A=QDQ^{-1}$ alors $P(A)=QP(D)Q^{-1}$ et $P(D)$ est diagonale.

(2) Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&0&\ddots&1\\1&&&0\end{pmatrix}$, A est une matrice de permutation, $\mathbb{C}$-diagonalisable ($A^n=I_n$ donc A annule un polynôme scindé de racines simples). On a donc $A=QDQ^{-1}$ et $B=a_1I_n+a_2A+\cdots+a_nA^{n-1}=P(A)$ est diagonalisable en appliquant le 1.

Remarque : si $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$ alors 1, ω,..., ω^{n-1} sont les valeurs propres de A et $X_0=(1,\dots,1)$,..., $X_{n-1}=(\omega^{n-1},\dots,\omega^{(n-1)(n-1)})$ sont les vecteurs propres.

Solution 115 Démontrons tout d'abord le lemme : les suites $(a_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, soit M un majorant commun. Si α est une racine de P alors $\alpha\leqslant\max(pM,1)$. Dans $\mathbb{R}^p$, la suite (A_n) des racines des P_n est bornée, on peut en extraire une suite convergente, de limite $A=(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$. Comme les coefficients de P_n sont des polynômes en A_n, ce sont des fonctions continues de A_n. On en déduit que

$$P_n=\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_{i,n})\to P=\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i).$$

Montrons maintenant que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables (ensemble noté D) est l'ensemble des matrices réelles dont le polynôme caractéristique est scindé.
Si $M \in \overline{D}$ alors, grâce au lemme, le polynôme caractéristique de M est scindé.
Réciproquement : si P_M est scindé alors M est trigonalisable, semblable à T. Puis, si $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r$ sont les valeurs propres distinctes de M, alors, pour $\dfrac{1}{n} < \min\limits_{i \in [1,r-1]} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)$, $T_n = T + \mathrm{Diag}(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{2n})$ est diagonalisable de limite T.
Le cas complexe se déduit du cas précédent et $\overline{D} = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Solution 116 On remarque que $\dfrac{1}{i+j+1} = \displaystyle\int_0^1 x^{i+j}\,\mathrm{d}x$ donc A est la matrice du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 fg$ sur $\mathbb{R}_n[X]$. A est donc définie positive.

Solution 117 On sait qu'il existe une b.o.n. (e_i) telle que $M(v) = \mathrm{Diag}(\lambda_i)$ où $\lambda_i \geqslant 0$.
Soit $(a_{ij}) = M(u)$ alors

$$\mathrm{Tr}(u \circ v) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}\lambda_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (e_j.u(e_j)) \geqslant 0$$

et, de manière évidente, $\mathrm{Tr}(u \circ v) \leqslant \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{jj}\right) . \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j\right)$.

Solution 118 On sait que $A^{\mathrm{T}}.A$ est symétrique positive, donc il existe P orthogonale telle que $A^{\mathrm{T}}.A = PDP^{\mathrm{T}}$. Si $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $e_i = P\varepsilon_i$ alors

$$\begin{aligned}(Ae_i|Ae_j) &= e_i^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}.Ae_j = \varepsilon_i^{\mathrm{T}}(P.P^{\mathrm{T}})D(P.P^{\mathrm{T}})\varepsilon_j \\ &= \varepsilon_i^{\mathrm{T}} D\varepsilon_j = \delta_{ij}\varepsilon_i^{\mathrm{T}} D\varepsilon_i\end{aligned}$$

donc la famille (Ae_i) est bien orthonormale.

Solution 119 Soit u de matrice B alors $\mathbb{R}^n = K \oplus L$ somme directe orthogonale avec $K = \mathrm{Ker}\, u$ et $L = \{x \in E \mid X^{\mathrm{T}}BX \geqslant 0\}$. Comme B est positive, on sait qu'il existe P matrice orthogonale telle que $B = P\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0 \ldots, 0)P^{\mathrm{T}}$ et on peut de plus supposer que $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_p$. On écrit alors $A = PA'P^{\mathrm{T}}$ et l'hypothèse sur A se traduit par $X^{\mathrm{T}}AX > 0$ si $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_{p+1} \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$. Si on écrit $A' = \begin{pmatrix} A_1 & A_2^{\mathrm{T}} \\ A_2 & A_3 \end{pmatrix}$ où A_1 est une matrice carrée d'ordre p et A_3 une matrice carrée d'ordre $n-p$, alors A_3 est définie positive.
Il suffit donc de prouver que $A' + \lambda D$ est définie positive où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0 \ldots, 0)$.
Or, en écrivant $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, on a

$$X^{\mathrm{T}}(A' + \lambda D)X = X_1^{\mathrm{T}}(A_1 + \lambda D)X_1 + X_2^{\mathrm{T}} A_3 X_2 + 2X_2^{\mathrm{T}} A_2 X_1$$

car $X_2^{\mathrm{T}}A_2X_1 = X_1^{\mathrm{T}}A_2^{\mathrm{T}}X_2$. Pour λ assez grand, $A_1+\lambda D$ est définie positive et, en appelant λ_1, μ, $\mu_1>0$ les plus petites valeurs propres respectives de D, A_1 et A_3, alors

$$\begin{cases} X_1^{\mathrm{T}}(A_1+\lambda D)X_1 & \geqslant (\lambda\lambda_1+\mu)\|X_1\|^2 \\ X_2^{\mathrm{T}}A_3X_2 & \geqslant \mu_1\|X_2\|^2 \end{cases}$$

Enfin, $|X_2^{\mathrm{T}}A_2X_1| \leqslant \|X_2\|_2.\|A_2X_1\|_2 \leqslant \|A_2\|.\|X_1\|_2.\|X_2\|_2$ en utilisant Cauchy-Schwarz et la norme subordonnée pour A_2. On a donc

$$\begin{aligned} X^{\mathrm{T}}(A'+\lambda D)X &\geqslant (\lambda\lambda_1+\mu)\|X_1\|^2 - 2\|A_2\|.\|X_1\|.\|X_2\| + \mu_1\|X_2\|^2 \\ &= \mu_1\left(\|X_2\| - \frac{\|A_2\|}{\mu_1}\right)^2 + \left(\lambda\lambda_1+\mu-\frac{\|A_2\|^2}{\mu_1}\right)\|X_1\|^2 \end{aligned}$$

qui est défini positif dès que $\lambda\lambda_1+\mu-\dfrac{\|A_2\|^2}{\mu_1}>0$.

Solution 120 Soient A et B les matrices de u et v dans une base orthonormale. A et B sont les matrices de deux formes quadratiques positives.

- Si $\det A = \det B = 0$, l'inégalité est triviale.
- Si $\det A > 0$ alors on peut prendre, dans $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire de matrice A. B est la matrice d'une forme quadratique, si u est l'endomorphisme symétrique associé, il est diagonalisable dans une base orthonormée pour A donc, il existe une matrice de passage telle que $A = P^{\mathrm{T}}P$ et $B = P^{\mathrm{T}}DP$ où D est une matrice diagonale. Comme B est positive, les termes de D sont $\geqslant 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \det(u+v) = \det(A+B) = \det P^2\det(I_n+D) &= \det P^2\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) \\ \geqslant \det P^2\left(1+\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right) &= \det u + \det v \end{aligned}$$

Solution 121 On cherche f telle que $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t = \dfrac{(-1)^n}{n^3}$. On trouve $f(x) = \dfrac{x^3-\pi^2x}{12}$ pour $x\in[-\pi,\pi]$ en cherchant f sous la forme d'un polynôme du troisième degré.

On peut aussi utiliser le fait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi-x}{2}$ d'où, en remplaçant $\pi-x$ par u, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin nu}{n} = \frac{u}{2}$ sur $[0,\pi[$ (mais aussi sur $]-\pi,\pi[$ grâce à la parité). On intègre alors deux fois ce qui donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin nu}{n^3} = \frac{u}{12}+Ku$ et on prend la valeur en π (la fonction ainsi obtenue est continue sur $\mathbb{R}$).

Solution 122 On sait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n} = \frac{\pi-x}{2}$ sur $]0,\pi]$ puis, en calculant les coefficients de Fourier de g, on a $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx$.

On écrit alors que $g(1) = S(1)$ ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$$

Ensuite, avec Parseval, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{(\pi - 1)^2}{6}$$

Solution 123

(1) P_δ est un polynôme trigonométrique, il en est de même de P_δ^n donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,[P_\delta(\theta)]^n\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

(2) Soit $I_n = \displaystyle\int_{\delta \leqslant |\theta| \leqslant \pi} f(\theta)\,[P_\delta(\theta)]^n\,\mathrm{d}\theta$ alors, grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ (on pouvait aussi le prouver avec les ε).

(3) Soit f à valeurs réelles, $f(0) > 0$ (quitte à multiplier par -1) alors il existe $\delta > 0$ tel que $|\theta| \leqslant \delta \Rightarrow f(\theta) > \dfrac{1}{2}f(0)$ d'où

$$\int_{-\delta}^{\delta} f(\theta)\,(P_\delta(\theta))^n\,\mathrm{d}\theta \geqslant \delta f(0)$$

ce qui est impossible donc $f(0) = 0$ (et ce résultat s'étend au cas où $f(0)$ est complexe).

(4) On procède de même avec $g(\theta) = f(t + \theta)$ pour trouver $g(0) = 0$ donc $f = 0$.

Solution 124 Soit $r < 1$ alors $g_r(\theta) = f(re^{i\theta})$ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\widehat{g_r}(n) = a_n r^n$. En appliquant Bessel à g_r, on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n^2 r^{2n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 r^{2n} \leqslant M^2$$

si M est le majorant de f. En passant à la limite quand $r \to 1$ on a

$$\sum_{n=0}^{N} a_n^2 \leqslant M^2$$

pour tout N donc la série $\sum a_n^2$ converge donc $a_n \to 0$ et en conclusion a_n est nul à partir d'un certain rang.

Solution 125 Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $e^{2x}(\lambda x + \mu)$ donc s'il y a une solution périodique, elle est unique. On procède alors par analyse-synthèse :
Soit $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$ le développement en série de Fourier de f, $y(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ celui d'une solution. Alors, en identifiant les coefficients de Fourier on a $c_n = \dfrac{a_n}{(n+2i)^2}$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, la série $\sum a_n$ est absolument convergente donc, si on pose

$$y(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a_n}{(n+2i)^2} e^{inx}$$

y est de classe $\mathcal{C}^2$ et on peut dériver terme à terme pour vérifier que y est bien l'unique solution de l'équation différentielle.

Solution 126

- On a alors : $\forall x > 0,\ f'(x) = f(\frac{1}{x})$. Donc f' est de classe $\mathbb{C}^1$, et f est de classe $\mathbb{C}^2$. Soit : $\forall x > 0,\ f''(x) = -\frac{1}{x^2}f(x)$.
- On cherche des solutions sur $]0;+\infty[$ à l'équation différentielle $x^2y'' + y = 0$ de la forme x^α avec $\alpha \in \mathbb{C}$.
  Alors : $\alpha(\alpha-1)+1 = 0$ soit $\alpha \in \{-j; -j^2\}$.
  De plus l'espace des solutions est de dimension 2 et on a deux solutions indépendantes : elles forment une base.
  D'où : $f(x) = Ax^{-j} + Bx^{-j^2}$.
- Conditions pour que f soit solutions :
  $f'(\frac{1}{x}) = -Ajx^{-j^2} - Bj^2x^{-j}$ soit $\left\{\begin{array}{l} A = -Bj^2 \\ B = -Aj \end{array}\right.$. D'où $B = -Aj$.
  Alors $f(x) = Ae^{-i\frac{\pi}{6}}\left[e^{i\frac{\pi}{6}}x^{-j} + e^{-i\frac{\pi}{6}x^{-j^2}}\right]$ avec $A = re^{i\frac{\pi}{6}}$.

Solution 127

(1) C'est le théorème de Cauchy-Lipschitz.

(2) On a $(\dot{x}|x) = (A(t)x|x) \leqslant -\lambda\|x\|^2$. Posons $g(t) = \|x(t)\|^2$ alors l'inégalité précédente signifie que $g'(t) \leqslant -2\lambda g(t)$. On a donc $(e^{2\lambda t}g(t))' = e^{2\lambda t}[2\lambda g(t) + g'(t)] \leqslant 0$ et $e^{2\lambda t}g(t) \leqslant g(0) = \|x_0\|^2$.
On prend les racines carrées : $e^{\lambda t}\|x(t)\| \leqslant \|x_0\|$ soit $\|\Omega(t)x_0\| \leqslant e^{-\lambda t}\|x_0\|$ ce qui s'écrit encore $\|\Omega(t)\| \leqslant e^{-\lambda t}$.

(3) On a $\Omega(t,s)x_0 = x(t-s) = \Omega(t,0)\Omega(-s,0)x_0$ donc

$$\Omega(t,s) = \Omega(t,0)\Omega(-s,0).$$

Posons $y(t) = \Omega(t,0)x_0 + \displaystyle\int_0^t \Omega(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s = \Omega(t,0) + \Omega(t,0)\int_0^t \Omega(-s,0)f(s)\,\mathrm{d}s$ alors, comme $[\Omega(t,0).v]' = A(t)\Omega(t,0).v$ ($\Omega(t,0)$ est solution de l'équation différentielle $\dot{x} = A(t)x$) on a

$$y'(t) = A(t)y(t) + \underbrace{\Omega(t,0)\Omega(-t,0)}_{=\Omega(t,t)=\mathrm{Id}}f(t) = A(t)y(t) + f(t).$$

$y(0) = x(0)$ donc, grâce à Cauchy-Lipschitz, $y = x$.

Solution 128 Il suffit d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire à l'équation différentielle

$$M'(t) = A(t)M(t) \tag{I}$$

où $M \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et de choisit pour $\Omega(t)$ l'unique solution vérifiant la condition initiale $\Omega(0) = I_n$.

On démontre ensuite que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\Omega(t)) = \mathrm{Tr}(A(t))\det\Omega(t)$. En effet

$$\begin{aligned}\det\Omega(t+h) - \det\Omega(t) &= \det(\Omega(t) + hA(t)\Omega(t) + o(h)) - \det\Omega(t)\\ &= \det[\Omega(t)(I_n + hA(t))] + o(h) - \det\Omega(t)\\ &= \det\Omega(t)\,[\det(I_n + hA(t)) - 1] + o(h) = \det\Omega(t)h\,\mathrm{Tr}(A(t) + o(h)\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat.
On a ainsi $\det\Omega(t) = \det\Omega(0)\exp\left(\int_0^t \mathrm{Tr}(A(s))\,\mathrm{d}s\right)$. On en déduit que $\Omega(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Enfin, si $X_0 \in \mathbb{R}^n$ alors $Y(t) = \Omega(t)X_0$ vérifie la même équation différentielle que $X(t)$ donc $Y(t) = X(t)$ par unicité de la solution.

Solution 129 On a $X_1'(t) = R(t)X_1(t) + S(t)X_2(t)$ et $X_2'(t) = T(t)X_2(t)$. Soit $f(t) = \|X_2(t)\|^2$ alors

$$\frac{1}{2}f'(t) = (X_2'(t)|X_2(t)) = (T(t)X_2(t)|X_2(t)) \leqslant -\mu\|X_2(t)\|^2 = -\mu f(t)$$

avec $g(t) = e^{2\mu t}f(t)$ on a $g'(t) \leqslant 0$ donc $g(t) \leqslant g(0) = \|X_2(0)\|^2$.
Comme $\|X_0\| = \sqrt{\|X_1(0)\|^2 + \|X_2(0)\|^2} \geqslant \|X_2(0)\|$ on en déduit que $\|X_2(t)\| \leqslant e^{-\mu t}\|X_0\|$.
Enfin, en notant $u(t) = \|X_1(t)\|^2$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}u'(t) &= (X_1'(t)|X_1(t)) \\
&= (R(t)X_1(t) + S(t)X_2(t)|X_1(t)) = (R(t)X_1(t)|X_1(t)) + (S(t)X_2(t)|X_1(t)) \\
&\leqslant -\lambda\|X_1(t)\|^2 + \|S(t)\|.\|X_1(t)\|.\|X_2(t)\| \leqslant -\lambda\|X_1(t)\|^2 + B\|X_1(t)\|.\|X_2(t)\| \\
&\leqslant -\lambda u(t) + B\sqrt{u(t)}\|X_2(0)\|.
\end{aligned}$$

On a ainsi une inégalité différentielle portant sur $u(t)$. Si on pose $v(t) = e^{-2\lambda t}u(t)$ alors

$$\forall t \geqslant 0,\ v'(t) = e^{2\lambda t}(u'(t) + 2\lambda u(t)) \leqslant 2B\|X_2(0)\|e^{(\lambda-\mu)t}\sqrt{v(t)}.$$

Comme on a un petit problème si v s'annule,on considère $w_\varepsilon(t) = \sqrt{v(t)+\varepsilon}$ qui est à valeur > 0 et dérivable et, en majorant $\dfrac{v(t)}{v(t)+\varepsilon}$ par 1 on a $\forall t \geqslant 0$, $w_\varepsilon'(t) \leqslant B\|X_2(0)\|e^{(\lambda-\mu)t}$. En intégrant et en tenant compte du fait que $w_\varepsilon(0) = \sqrt{v(0)+\varepsilon} = \sqrt{\|X_1\|^2+\varepsilon}$ on obtient

$$\forall t \geqslant 0,\ w_\varepsilon(t) \leqslant \sqrt{\|X_1(0)\|^2+\varepsilon} + B\|X_2(0)\|\int_0^t e^{(\lambda-\mu)s}\,\mathrm{d}s.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, à t fixé, on passe à la limite quand $\varepsilon \to 0$ d'où

$$\begin{aligned}
\forall t \geqslant 0,\ \|X_1(t)\| = \sqrt{u(t)} &= e^{-\lambda t}\sqrt{v(t)} \\
&\leqslant e^{-\lambda t}\left(\|X_1(0)\| + B\|X_2(0)\|\int_0^t e^{(\lambda-\mu)s}\,\mathrm{d}s\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne la majoration attendue...
Grâce à ces majorations, en distinguant les 2 cas $\lambda = m$ et $\lambda \neq \mu$ on prouve que $X_1(t) \to 0$ en $+\infty$, de même pour $X_2(t)$ i.e. $X(t) \to 0$ en $+\infty$.

Solution 130

(1) • Montrons d'abord que $\varphi_u\ : p \mapsto p + u \wedge p$ est bijective :
φ_u est linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, il suffit de prouver que φ_u est injective.
Soit p tel que $p + u \wedge p = 0$.
   – Si $u = 0$ c'est OK.
   – Si $u \neq 0$ alors $p \perp u \wedge p$ donc $p = 0$
φ_u est bijective.

- On peut alors inverser l'application $u' \mapsto u' + u \wedge u'$, $u' = f(u,t) = \varphi_u^{-1}(-u \wedge (u_3 e_3))$.
  Montrons que φ_u^{-1} est $\mathcal{C}^1$. Si on note M_{φ_u} la matrice de φ_u dans la base canonique alors $\det M_{\varphi_u} \neq 0$ et comme $u \mapsto \varphi_u$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $u \mapsto \dfrac{1}{\det M_{\varphi_u}} \check{M}_{\varphi_u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ i.e. $u \mapsto \varphi_u^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, on a ainsi existence et unicité d'une solution sur $]a,b[$ intervalle maximal.
- Montrons que $\|u\| = 1$: en faisant le produit scalaire par u de la relation $u' + u \wedge u' = -u \wedge (u_3 e_3)$ on trouve $(u|u') = 0$ donc $\|u\|$ est constante donc, comme u est bornée au voisinage de a et b alors $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Conclusion : on a prouvé ainsi l'existence d'une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$.

(2) On remarque tout d'abord que si $u_0 = \pm e_3$ ou $u_0 \perp e_3$ alors u_0 est solution sur $\mathbb{R}$.
On suppose dorénavant que $u_3(0) > 0$ et $u_3(0) \neq 1$ quitte à changer u en $-u$.

- En projection sur $\mathrm{Vect}(e_3)$ on a $u_3' + e_3.(u \wedge u') = 0$ puis, en prenant le produit vectoriel par u à gauche,

$$u \wedge u' - u' + \underbrace{(u|u')}_{=0} u = -u_3^2 u + u_3 e_3$$

donc $u_3' = \dfrac{1}{2} u_3(u_3^2 - 1)$.

- Montrons que u_3 garde un signe constant : si $u_3(t_1) = 0$ alors $u_3'(t_1) = 0$, on se retrouve dans les conditions de la remarque préliminaire, $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & 0 \end{pmatrix}$ est solution sur $\mathbb{R}$ ce qui est écarté.
  Conclusion : $\forall t \in \mathbb{R}$, $u_3(t) > 0$.
- Comme $|u_3| < 1$ on a $u_3' < 0$ donc $u_3 \searrow$. Soit $l = \lim\limits_{t \to +\infty} u_3(t)$ alors $\lim\limits_{t \to +\infty} u_3'(t) = \dfrac{1}{2} l(l^2 - 1)$. $l = 0$ sinon on a une contradiction.

Conclusion finale : u tend à être dans le plan $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Solution 131

(1) L'idée est d'étudier le carré des normes des fonctions u, v, et w.

On remarque que la dérivée de $\|u\|^2$ est $2\langle u|u'\rangle$. En scalairisant (1) par u on obtient $\langle u|u'\rangle = 0$, donc $\|u\|$ est constante, donc u est bien bornée. On va étudier v et w par la même méthode.

Pour cela produitscalairisons (2) par (3) : on obtient (après avoir écrit (3) dans l'autre sens)

$$\langle v|u'\rangle + \langle v|v'\rangle = -\langle w'|w\rangle$$

On penserait pouvoir directement intégrer la relation subséquente

$$\langle v|v'\rangle + \langle w|w'\rangle = -\langle v|u'\rangle \qquad (\star)$$

mais on ne peut pas conclure directement. Tentons donc d'exprimer le second membre $\langle v|u'\rangle$ grâce à (1), pour y faire apparaître des quantités connues. On peut écrire que $u' = u \wedge (v + e - u')$, ce qui implique que u' est orthogonal à $v + e - u'$, c'est-à-dire $\langle v|u'\rangle = +\langle u'|u'\rangle - \langle u'|e\rangle$. En insérant cette relation dans l'égalité $(\star)$, on obtient ainsi :

$$\langle v|v'\rangle + \langle w|w'\rangle = -\|u'\|^2 + \langle u'|e\rangle$$

En intégrant, on a donc, pour tout a fixé et pour tout x appartenant $\mathbb{R}$

$$(\star\star)\qquad \|v\|^2(x)+\|w\|^2(x)=\|v\|^2(a)+\|w\|^2(a)+\langle u(x)-u(a)|e\rangle-\int_a^x\|u'\|^2$$

Comme $\|v\|^2(x)$ et $\|w\|^2(x)$ sont positifs, ainsi que $\|u'\|^2$ on peut majorer et obtenir

$$\|v\|^2(x)+\|w\|^2(x)\leqslant\|v\|^2(a)+\|w\|^2(a)+2\|u\|_\infty$$

grâce également à Cauchy-Buniakowsky-Schwarz, la norme infinie étant prise sur $\mathbb{R}$ (u est bornée). Cette inégalité montre que v et w sont bornées.

(2) $(\star\star)$ permet de conclure tout de suite (en utilisant le fait que toute fonction bornée croissante admet une limite en $+\infty$).

(3) La suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; on en extrait une suite convergente.

Solution 132

(1) Immédiat : on a $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\mu y$ donc $y=\alpha\operatorname{sh}\sqrt{\mu}t+\beta\operatorname{ch}\sqrt{\mu}t$ et $x=-\dfrac{\alpha}{\sqrt{\mu}}\operatorname{ch}\sqrt{\mu}t-\dfrac{\beta}{\sqrt{\mu}}\operatorname{sh}\sqrt{\mu}t.$

Compte tenu de la deuxième question, on peut remarquer que $(y^2-\mu x^2)'=2[y(-\mu x)+\mu xy]=0$ donc $y^2-\mu x^2$ est constante.

(2) a) Les points d'équilibre sont donnés par $(0,0)$ et $(\frac{\mu}{b},0)$.

b) On réécrit le système sous la forme

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mu x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-bx^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

qui est équivalent à

$$\frac{1}{2}y^2=\frac{\mu}{2}x^2-\frac{b}{3}x^3-\frac{K}{2}$$

soit $-y^2=-\mu x^2+\dfrac{2b}{3}x^3+K.$

c) Pour le tracé, on prend $m=1$ et $b=\dfrac{3}{2}$ et on utilise MAPLE pour tracer les courbes $y=\pm\sqrt{x^2-x^3-K}$.

Solution 133

(1) Supposons qu'il existe $t_1>t_0$, $t_1\in I$ tel que $x(t_1)\leqslant 1$ alors, grâce au T.V.I., on sait qu'il existe $t_2\in]t_0,t_1[$ tel que $x(t_2)=1$. Comme l'ensemble des $u\in I$, $u\geqslant t_0$ tel que $x(u)=1$ est fermé on peut choisir t_3 le plus petit élément de cet ensemble. On a alors $x'(t_3)>0$ et $x(t)>1$ pour $t<t_3$ ce qui est contradictoire.

(2) On a alors pour tout $t\in I\cap[t_0,+\infty[$, $x(t)>1$ donc $x(t)-x^2(t)<0$. Soit b la borne supérieure de I : $I\cap[t_0,+\infty[=[t_0,b[$ ($b\notin I$ sinon le théorème de Cauchy-Lipschitz permettrait d'avoir un plus grand intervalle, ce qui a été exclus).

Si $b<+\infty$ alors $\forall t\in[t_0,b[$, $x(t)>1$ donc $x'(t)\leqslant\dfrac{1}{t}$ soit, en intégrant, $x(t)-x(t_0)\leqslant\ln\frac{t}{t_0}$ d'où l'encadrement

$$1\leqslant x(t)\leqslant\ln\frac{b}{t_0}+x(t_0).$$

x borné au voisinage de b donc x' aussi. D'après le critère de Cauchy, x a une limite en b, on peut prolonger x en b, I n'est pas maximal ce qui est impossible. Conclusion : $b = +\infty$ et $[t_0, +\infty[\subset I$.

(3) Comme $x(t) > 1$ pour $t \geqslant t_0$ alors $x(t) - x^2(t) \leqslant 1 - x(t)$ donc $x'(t) \leqslant 1 - x(t) + \dfrac{1}{t}$ soit, en posant $y(t) = x(t) - 1$,

$$y'(t) + y(t) \leqslant \frac{1}{t}.$$

et, en multipliant par e^t et en intégrant de t_0 à t on obtient $e^t y(t) - e^{t_0} y(t_0) \leqslant \displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^u}{u}\,\mathrm{d}u$ d'où

$$0 \leqslant y(t) \leqslant e^{-t} e^{t_0} y(t_0) + e^{-t} \int_{t_0}^{t} \frac{e^u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Or, grâce au théorème d'intégration des relations de comparaison, $\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^u}{u}\,\mathrm{d}u = o\left(\int_{t_0}^{t} e^u\,\mathrm{d}u\right) = o(e^t)$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$ ce qui signifie encore $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = 1$.

Solution 134 Soit $I = \{T \in R_+^* | \forall t \in [0, T], y(t) \in]0, 1[\}$.
I est un intervalle (non vide car grâce à la continuité on peut trouver un voisinage de 0 sur lequel y est compris entre $1/n + \varepsilon$ et $1/n - \varepsilon$) sur lequel y est strictement croissante (puisque $y'(t) = f(y(t)) > 0$).
Soit $\alpha = \text{Sup } I$. y est strictement croissante, donc elle admet une limite l en α. Par passage à la limite, $l \leqslant 1$.
Supposons $\alpha \neq +\infty$. On peut prolonger y en α en une fonction C^1 telle $y' = f(y)$ et $y(\alpha) = l$.
Si $l < 1$, il existe une solution locale de ce système, et on peut prolonger y au delà de α avec $y < 1$, d'où une contradiction.
Si $l = 1$, y vérifie $y' = f(y)$ et $y(\alpha) = 1$. D'après le théorème de C.L., c'est la solution constante 1, donc c'est impossible.
Donc $\alpha = +\infty$. Supposons $l \neq 1$, on a $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = f(l) > 0$, donc $y \to +\infty$ (on passe aux équivalents dans l'intégrale et donc $y \sim f(l)t$), ce qui est impossible. Donc $l = 1$.
y est donc une bijection de $R^+ \to [1/n, 1[$. D'ou l'unicité de t_n.
D'autre part (t_n) est croissante. En effet, on note y_n la solution correspondant à la condition initiale $y(0) = 1/n$. On introduit la suite $r_n = y_n^{-1}(\dfrac{1}{n-1})$. Par translation des solutions, la courbe de y_{n+1} à partir de l'abscisse r_{n+1} est la translaté de la courbe de y_n. En particulier $y_{n+1}(r_{n+1} + t_n) = 1/n$. Donc $t_{n+1} \geqslant t_n + r_{n+1}$.
On a la relation : $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} = \int_0^{r_n} y_n'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{r_n} f(y_n(t))dt$. Or $f(x) = f'(0)\,x + x\,\varepsilon(x)$.
Donc $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n} = f'(0) \displaystyle\int_0^{r_n} y_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{r_n} y_n(t)\varepsilon(y_n(t))\,\mathrm{d}t$.
Puis en encadrant y_n on obtient : $f'(0)\dfrac{r_n}{n} \leqslant f'(0) \displaystyle\int_0^{r_n} y_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f'(0)\dfrac{r_n}{n-1}$ donc $f'(0)\dfrac{r_n}{n} \sim f'(0) \displaystyle\int_0^{r_n} y_n(t)\,\mathrm{d}t$.
D'autre part $\left|\displaystyle\int_0^{r_n} y_n(t)\varepsilon(y_n(t))\,\mathrm{d}t\right| = o(\dfrac{r_n}{n-1})$.

Donc on en déduit que $r_n \sim \dfrac{1}{f'(0)n}$: la série Σr_n diverge, donc la suite (t_n) tend vers $+\infty$ $(t_n - t_{n-1} \geqslant r_n)$.

Solution 135 On pose $z = x + iy$, le système est équivalent à $z' = z(2-i) - z|z|^2$. $z = 0$ est une solution évidente, si on écarte ce cas par la suite alors $z(t)$ ne va jamais s'annuler. On peut poser $z = re^{i\theta}$ où r est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs strictement positives, θ, grâce au théorème du relèvement, est aussi une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Après calculs, on trouve les équations différentielles

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = r(2 - r^2),\ \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -1.$$

$r = \sqrt{2}$ donne une solution particulière que l'on écarte ensuite, r est donc à valeurs dans $]0, \sqrt{2}[$ ou $]\sqrt{2}, +\infty[$. En intégrant on trouve $\theta = (t - t_0)$ et $\dfrac{r}{2 - r^2} = Ce^t$ et en résolvant la dernière équation du second degré, on a $r = ae^t \pm \sqrt{a^2 e^{2t} + 2}$ (en choisissant la racine positive et en posant $C = 2a$).

Solution 136 La réponse est non : exemple $p = q = 1$ alors $y' + y = y^n \Leftrightarrow \dfrac{y'}{y^n} + \dfrac{1}{y^{n-1}} = 1$ pour $y \neq 0$ et en posant $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$ on a $z = 1 + Ce^{-\frac{x}{n-1}}$ i.e. $y_n = \left(1 + Ce^{-\frac{x}{n-1}}\right)^{\frac{1}{1-n}}$. Si $C \neq 0$ alors y_n n'a pas de limite quand $n \to 1$.

Solution 137

a) On pose $y = \cos t$, $yy' = \sin t$ d'où, pour $\sin t \neq 0$, $\mathrm{d}x = -\cos t$ et $x = -\sin t + x_0$. En fait, on peut se ramener au cas d'une équation résolue lorsque $\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') \neq 0$.

b) Si $\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0$ alors on ne peut résoudre l'équation en y', on trouve en fait les droites d'équations $y = 1$, $y = -1$.

Solution 138

Solution 139

(1) On sait que les séries $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^{n-1}$ et $\sum n(n-1) a_n z^{n-2}$ convergent normalement sur tout compact de $D(0,1)$, on peut donc dériver terme à terme par rapport à x et y. On trouve que $\Delta u = 0$ d'où la conclusion.

(2) On pose $\tilde{u}(r, \theta) = u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$. Les fonctions $\theta \mapsto \tilde{u}(r, \theta)$, $\theta \mapsto \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(r, \theta)$, $\theta \mapsto \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2}(r, \theta)$ sont continues donc on peut dériver sous le signe intégral :

$$\varphi'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(r, \theta)\,\mathrm{d}\theta,\ \varphi''(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2}(r, \theta)\,\mathrm{d}\theta$$

et comme $\Delta \tilde{u} = \dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial u^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \theta^2}$ on trouve

$$\varphi''(r) = -\frac{1}{r}\varphi'(r) - \frac{1}{2\pi r^2}\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}(r, \theta)\right]_0^{2\pi}.$$

$\tilde{u}$ étant 2π-périodique par rapport à θ, il en est de même pour $\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \theta}$ d'où $\varphi''(r) + \dfrac{1}{r}\varphi'(r) = 0$ soit $\varphi'(r) = \dfrac{A}{r}$ et comme φ' est continue en 0, $\varphi' = 0$ soit

$$\varphi(r) = \varphi(0) = u(x_0, y_0)$$

qu'on appelle propriété de la moyenne.

Solution 140

Solution 141

(1) On utilise l'inégalité avec $y = 0$ alors et $x = tu$ où $t \in]0, 1[$:

$$f'(tu)tu \geqslant \alpha t^2 u^2 + f'(0)tu$$

soit, en simplifiant par t on obtient $f'(tu)u \geqslant \alpha t u^2 + f'(0)u$.

On utilise alors l'égalité $f(u) - f(0) = \displaystyle\int_0^1 u f'(tu)\,\mathrm{d}t$ d'où

$$\begin{aligned} f(u) &\geqslant f(0) + \int_0^1 u f'(tu)\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant f(0) + \int_0^1 (\alpha t u^2 + f'(0)u)\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant f(0) + \frac{\alpha}{2}u^2 + f'(0)u \to +\infty. \end{aligned}$$

Unicité du minimum : si f présente un minimum en x et y alors $f'(x) = f'(y) = 0$ d'où, en exploitant l'inégalité de l'hypothèse, on a $0 \geqslant \alpha(x - y)^2$ soit $x = y$.

(2) Dans le cas considéré, l'inégalité se transforme en $(f'(x) - f'(y))(x - y) \geqslant \alpha\|x - y\|^2$. On reprend la même démonstration avec les différentielles :

$$f'(tu)(tu) \geqslant \alpha t^2 \|u\|^2 + f'(0)(tu)$$

soit, en simplifiant par t on obtient $f'(tu)(u) \geqslant \alpha t\|u\|^2 - \|f'(0)\|.\|u\|$.

On utilise alors l'égalité $f(u) - f(0) = \displaystyle\int_0^1 f'(tu)(u)\,\mathrm{d}t$ d'où

$$\begin{aligned} f(u) &\geqslant f(0) + \int_0^1 f'(tu)(u)\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant f(0) + \int_0^1 (\alpha t\|u\|^2 - \|f'(0)\|.\|u\|)\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant f(0) + \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 - \|f'(0)\|.\|u\| \to +\infty. \end{aligned}$$

Unicité du minimum : si f présente un minimum en x et y alors $f'(x) = f'(y) = 0$ d'où, en exploitant l'inégalité de l'hypothèse, on a $0 \geqslant \alpha\|x - y\|^2$ soit $x = y$.

Solution 142 Si f a un extremum local alors $\inf(\|\operatorname{grad} f\|) = 0$.
Sinon, on pose $f_\delta(x) = f(x) + \delta\|x\|$. Comme $\displaystyle\lim_{\|x\| \to +\infty} f_\delta(x) = +\infty$, cela signifie que f_δ a un minimum global en un point x_δ.

- si $x_\delta \neq 0$ alors f_δ est $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de x_δ et donc
$$\operatorname{grad} f_\delta(x_\delta) = 0 = \operatorname{grad} f(x_\delta) + \delta \frac{x_\delta}{\|x_\delta\|}$$
ce qui donne $\|\operatorname{grad} f(x_\delta\| = |\delta|$. Si cette hypothèse est réalisée pour une suite (δ_n) qui tend vers 0 alors on peut là aussi conclure $\inf \|\operatorname{grad} f\| = 0$.
- Si $x_\delta = 0$ on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f_\delta(x) \geqslant f_\delta(0)$ soit $f(x) + \delta\|x\| \geqslant f(0)$ donc
$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \delta \geqslant \frac{f(0) - f(x)}{\|x\|}.$$
Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ on peut écrire
$$f(x) = f(0) + (\operatorname{grad} f(0)|x) + o(\|x\|)$$
donc
$$\frac{f(0) - f(x)}{\|x\|} = -(\operatorname{grad} f(0)|\frac{x}{\|x\|} + o(1) \leqslant \delta.$$
Soit e un vecteur normé, on pose $x = te$ alors l'inégalité ci-dessus donne, en prenant la limite, quand $t \to 0$, $-(\operatorname{grad} f(0)|e) \leqslant \delta$ pour tout δ donc $(\operatorname{grad} f(0)|e) \geqslant 0$ et donc $\operatorname{grad} f(0) = 0$ (par l'absurde).

Conclusion : dans tous les cas, on a obtenu
$$\inf_{x\in\mathbb{R}^n} \|\operatorname{grad} f(x)\| = 0.$$

Solution 143

(1) La formule $\varphi(x) - \varphi(y) = \int_0^1 \varphi'(x + t(y-x))(x-y)\,\mathrm{d}t$ n'a pas été acceptée, l'examinateur voulait utiliser la formule des accroissements finis (qui n'est pas au programme pour une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$).

On pose $C_\rho = \sup_{x\in\overline{B}(0,\rho)} \|\varphi'(x)\| = \|\varphi'(x_0)\| < 1$ (le sup est atteint car $\overline{B}(0,\rho)$ est compacte).

(2) Si $(x,y) \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ tel que $f(x) = f(y)$ alors il existe ρ tel que $(x,y) \in B(0,\rho)^2$ donc
$$0 = \|f(x) - f(y)\| \geqslant (1 - C_\rho)\|x - y\|$$
d'où $x = y$ et f est injective. Comme de plus $f'(x)$ est inversible pour tout x de $\mathbb{R}^n$, on peut appliquer le théorème d'inversion globale et par conséquent f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $f(\mathbb{R}^n)$ et $f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

(3) Comme au a) on a
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n,\ \|f(x) - f(y)\| \geqslant (1 - C)\|x - y\|.$$
Pour prouver que $f(\mathbb{R}^n)$ est un fermé, on peut utiliser un critère séquentiel. Soit (x_p) une suite de $\mathbb{R}^n$ telle que $(f(x_p))$ converge alors $\|x_p - 0\|(1 - C) \leqslant \|f(x_p) - f(0)\|$ est bornée. On peut en extraire une suite convergente et par conséquent $f(x_p)$ converge dans $f(\mathbb{R}^n)$.

Comme f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, $(f^{-1})^{-1}(\mathbb{R}^n)$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$ donc $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.

Solution 144

(1) $h_1 - h_2$ possède un minimum en x_0 et comme cette application est différentiable alors sa différentielle est nulle. On a donc $h_2(x) - h_1(x) = o(\|x - x_0\|)$ au voisinage de x_0. Comme $0 \leqslant f(x) - h_1(x) \leqslant h_2(x) - h_1(x)$ on obtient $f(x) = h_1(x) + o(\|x - x_0\|)$ donc $f - h_1$ est différentiable en x_0 et de différentielle nulle.
f est différentiable en x_0 est sa différentielle est la valeur commune à h_1 et h_2.

(2) On pose $h_1(x) = f(b) - \|x - b\|$ et $h_2(x) = f(a) + \|x - a\|$. Comme f est 1-lipschitzienne on a $f(x) \leqslant f(a) + \|x - a\|$ et $f(b) \leqslant f(x) + \|x - b\|$ soit $h_1 \leqslant f \leqslant h_2$. Comme $f(b) - f(a) = \|b - a\|$ on a $h_1(x) = h_2(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, h_1 et h_2 étant différentiables sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a, b\}$ on peut affirmer que f est différentiable sur $]a, b[$.

(3) On sait que $x \mapsto \mathrm{d}(x, C)$ est 1-lipschitzienne. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus C$ et a l'unique point tel que $\mathrm{d}(x, C) = \|x - a\|$. Si b est un point de la droite ax situé du côté de x et à l'extérieur du segment alors on a $\mathrm{d}(b, C) = \|b - a\|$. On a donc $f(b) - f(a) = \|b - a\|$.
f est donc différentiable en tout point de $]a, b[$, en particulier en x.
Conclusion : f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n \setminus C$.

Solution 145

a) Pour un maximum, les valeurs propres de la matrice hessienne sont $\leqslant 0$ donc $\Delta f = \mathrm{Tr}(f'') \leqslant 0$.

b)
- Si $f = 0$ alors c'est immédiat.
- Sinon, sur le compact $\overline{B(0,1)}$, f admet un maximum M_1 et un minimum M_2 situés dans $B(0,1)$ d'où $\Delta f(M_1) \leqslant 0$ et $\Delta f(M_2) \geqslant 0$. Comme Δf est continue alors il existe $P \in [M_1, M_2]$ tel que $\Delta f(P) = 0$.

Solution 146 Σ est un compact (fermé borné) donc il existe une boule fermée B qui contient Σ. $\mathbb{R}^2 \setminus B$ est connexe par arcs donc f garde un signe constant que l'on peut supposer > 0.
Soit $u \in C$, on va montrer qu'il existe $x \in \Sigma$ tel que $G(x) = u$:

- $\theta \ : t \in \Sigma \mapsto (u|t)$ est continue sur le compact Σ et y atteint son maximum en un point x. Soit Π le demi-plan $(u|t - x) \geqslant 0$ et Π' son intérieur. Par définition de x, Σ et Π' sont disjoints et comme Π' est connexe, f garde un signe constant et comme $\Pi' \cap (\mathbb{R}^2 \setminus B) \neq \emptyset$ alors f est strictement positive sur Π' donc $f \geqslant 0$ sur Π.
- Soit v un vecteur orthogonal à u et $\varphi(y) = f(a + yv)$ pour $y \in \mathbb{R}$. On a $\varphi'(y) = (\operatorname{grad} f(a + yv)|v)$ et $\varphi(y) \geqslant 0$ car $a + yv \in \Pi$ et comme $\varphi(0) = 0$ alors $\varphi'(0) = 0$ et donc $(\operatorname{grad} f(x)|v) = 0$ soit $\operatorname{grad} f(x) = \lambda u$.

On peut donc conclure.

Solution 147 On se place dans le cas où $a \in [0, \min(m, n)[$ pour que APet BP ne s'annulent pas.
Avec $u = AP$ et $v = BP$, on pose $\lambda = \dfrac{u}{v} \in [\frac{n-a}{m+a}, \dfrac{n+a}{m-a}]$ et on note $K_\lambda = \{P \in D_a \mid u = \lambda v\}$. On sait que cet ensemble est en général un arc de cercle centré sur AB (et un segment si $\lambda = 1$).
Sur K_λ on a $f(P) = \dfrac{n^2 + \lambda m^2}{u}$ et le minimum de f est atteint pour les valeurs maximales de u soit sur le cercle C_a de centre O et de rayon a.

On peut alors exprimer u et v comme fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\theta \in [-\pi, \pi]$ avec

$$u = \sqrt{n^2 + a^2 + 2an\cos\theta},\ v = \sqrt{m^2 + a^2 - 2am\cos\theta}.$$

Et ce sont aussi des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de λ, on obtient alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} f(P) = \frac{a}{u^3v^3}\left(n^3v^3 - m^3u^3\right)\sin\theta = \frac{a}{\lambda^3v^3}\left(n^3 - \lambda^3m^3\right)\sin\theta.$$

Le minimum de f sur C_a est obtenu pour $\lambda = \dfrac{n}{m}$ et vaut $\mu = \dfrac{(m+n)n}{u} = \dfrac{(m+n)m}{v}$.

En éliminant u, on obtient finalement le minimum $\mu = (m+n)\sqrt{\dfrac{mn}{a^2+mn}}$.

Si $a = \min(m, n)$ alors f tend vers l'infini lorsque $P \to A$ où $P \to B$ mais cela ne change pas le raisonnement ci-dessus vu que l'on cherche un minimum.

Remarque : le minimum est obtenu lorsque $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{n}{m} = \dfrac{OA}{OB}$ i.e. pour le(s) point(s) situé(s) à l'intersection de C_a et de la courbe K_λ (arc de cercle ou segment) passant par O.