MATHÉMATIQUES ENS MPI 2 SESSION 2010

Partie I

I.1. **a.** Soient $L_1, \dots, L_n$ les lignes de V, on fait successivement et dans l'ordre les opérations

$$L_n \leftarrow L_n - \lambda_1 L_{n-1},\ L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - \lambda_1 L_{n-2}, \dots,\ L_2 \leftarrow L_2 - \lambda_1 L_1$$

ce qui donne directement le résultat.

b. On procède par récurrence sur n :

- Pour $n = 1$, $V_1 = \lambda_2 - \lambda_1$ est immédiat.
- On suppose donc la propriété vraie à l'ordre $n-1$. On utilise le résultat précédent en développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$V_n = \begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda_1 & \dots & \lambda_n - \lambda_1 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2 & \dots & (\lambda_n - \lambda_1)\lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ (\lambda_2 - \lambda_1)\lambda_2^{n-2} & \dots & (\lambda_n - \lambda_1)\lambda_n^{n-2} \end{vmatrix} = \left[\prod_{k=2}^{n} (\lambda_k - \lambda_1)\right] V_{n-1}$$

en mettant en facteur $\lambda_k - \lambda_1$ dans chaque colonne (V_{n-1} commence avec λ_2, il aurait été plus avisé de s'intéresser plutôt à λ_n qu'à λ_1 dans la première question...).
Le résultat annoncé s'en déduit très facilement.

I.2. Soit $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n = 0$ une combinaison linéaire, on écrit alors le système obtenu en dérivant $n-1$ fois et en prenant la valeur en 0, on obtient

$$\begin{cases} \alpha_1 + \dots + \alpha_n & = 0 \\ \alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_n\lambda_n & = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \alpha_1\lambda_1^{n-1} + \dots + \alpha_n\lambda_n^{n-1} & = 0 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système des exactement V. Comme il est non nul, la seule solution en $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est la solution nulle.
Conclusion : la famille est $(f_1, \dots, f_n)$ est libre.

Partie II

II.1. Supposons [**c**] et soit $y \in \mathbb{C}^N$ tel que $Ky = 0$. En effectuant le produit matriciel, on obtient les égalités

$$By = 0,\ BAy = 0, \dots,\ BA^{N-1}y = 0$$

et compte tenu de la propriété [**c**], ceci n'est possible que si $y = 0$.
Conclusion : $\operatorname{Ker} K = \{0\}$ donc $\operatorname{Rg} K = \dim \mathbb{C}^N = N$ avec la formule du rang.

II.2. On procède par contraposée : la négation de [**a**] s'écrit : il existe un vecteur propre y de A dans le noyau de B. On a donc $Ay = \lambda y$ et $By = 0$ avec $y \neq 0$. On remarque alors que $BAy = B\lambda y = 0$ puis, par une récurrence immédiate, que $BA^k y = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le vecteur y est dans le noyau de K donc $\operatorname{Rg} K \leqslant N - 1$ ce qui est la négation de [**d**].

II.3. **a.** On utilise Cayley-Hamilton : soit P_A le polynôme caractéristique de A, on effectue la division de X^k par P_A : $X^k = P_A.Q + P_k$ avec $\deg P_k \leqslant N - 1$. En substituant A à X, comme $P_A(A) = 0$, on obtient directement $A^k = P_k(A)$.

b. On sait que $\mathrm{e}^{At} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{A^k t^k}{k!}$. Or, si on tient compte de la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{h=0}^{N-1} f_{n,h}(t) A^h$$

où on a remplacé A^k par $P_k(A)$ et où on a regroupé les puissances de A. On sait aussi que $\mathbb{C}[A]$ est de dimension finie donc e^{At} est la limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{C}[A]$ qui est de dimension finie donc fermé (car complet...) appartient à $\mathbb{C}[A]$. On peut donc écrire $\mathrm{e}^{At} = f_0(t)I + f_1(t)A + \cdots + f_{N-1}(t)A^{N-1}$ donc

$$B\,\mathrm{e}^{At}\,y = f_0(t)By + f_1(t)BAy + \cdots + f_{N-1}(t)BA^{N-1}y$$

et comme $t \mapsto B\,\mathrm{e}^{At}\,y$ n'est pas identiquement nulle alors il existe $k \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $BA^k y \neq 0$.

II.4. On va raisonner avec les endomorphismes associés : soit $a \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^N)$ de matrice A et b de matrice B. Comme A est diagonalisable, on peut écrire

$$a = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \lambda p_\lambda \text{ et } \mathrm{e}^{at} = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \mathrm{e}^{\lambda t}\, p_\lambda$$

où les p_λ sont les projecteurs sur les sous-espaces propres de A. On a alors

$$b \circ \mathrm{e}^{at}(y) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \mathrm{e}^{\lambda t}\, b \circ p_\lambda(y)$$

où $p_\lambda(y) \in E_\lambda(a)$ sous-espace propre de A.
Par contraposée : si $b \circ \mathrm{e}^{at}(y) = 0$ alors, en examinant chaque composante et en utilisant le I.2., on en déduit que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $b[p_\lambda(y)] = 0$ et si $y \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $p_\lambda(y) \neq 0$.
On a donc trouvé un vecteur propre de A dans le noyau de B.
Conclusion : par contraposée, on peu conclure que **[a]** $\Rightarrow$ **[b]**.

II.5. On a la chaîne d'implications : **[b]** $\Rightarrow$ **[c]** $\Rightarrow$ **[d]** $\Rightarrow$ **[a]**.
Si A est diagonalisable alors on a équivalence.

Partie III

III.1. On a $< AX, X >= - < X, AX >= \overline{< X, AX >}$ ce qui signifie que $< AX, X >$ est imaginaire pur.
Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ : $AX = \lambda X$ alors $< AX, X >= \lambda < X, X >= \lambda \|X^2\| \in i\mathbb{R}$ donc $\lambda \in i\mathbb{R}$.

III.2. L'existence et l'unicité de la solution de (1) est une conséquence immédiate du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires. L'expression explicite de la solution est $X(t) = \mathrm{e}^{(A-B^*B)t}\, X_0$ (attention à l'ordre des termes !).

III.3. Le calcul de la dérivée donne :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|X(t)\|^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} < X(t), X(t) > &= < X'(t), X(t) > + < X(t), X'(t) > \\ &= < AX(t), X(t) > - < B^*BX(t), X(t) > + < X(t), AX(t) > - < X(t), B^*BX(t) > \\ &= -2 < BX(t), BX(t) >= -2\|BX(t)\|^2\end{aligned}$$

car $\alpha =< AX(t), X(t) >$ étant imaginaire pur, $\alpha + \overline{\alpha} = 0$ et B^* étant l'adjoint de B, $< B^*BX(t), X(t) >=< BX(t), BX(t) >$.

On en déduit immédiatement que la fonction $t \mapsto \|X(t)\|$ est décroissante sur $[0,+\infty[$. De cela, on peut dire que $\forall X_0 \in \mathbb{C}^N$,

$$\|X(t)\| = \| \mathrm{e}^{(A-B^*B)t} X_0\| \leqslant \|X_0\|$$

ce qui se traduit par $|||\, \mathrm{e}^{(A-B^*B)t} \,||| \leqslant 1$ pour $t \in [0,+\infty[$.

III.4. La fonction $t \mapsto \|X(t)\|$ est décroissante et positive donc elle admet une limite L dans $[0, \|X_0\|]$.

III.5. **a.** Si $\|X(t)\|^2$ est constante alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|X(t)\|^2 = -2\|BX(t)\|^2 = 0$$

donc, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $BX(t) = 0$.

b. Comme $BX(t) = 0$ alors $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X(t) = (A - B^*B)X(t) = AX(t)$ donc $X(t) = \mathrm{e}^{At} X_0$ (en résolvant l'équation différentielle...). On a donc $BX(t) = B\,\mathrm{e}^{At} X_0 = 0$ pour tout $t \in [0,+\infty[$ et d'après **[b]**, $X_0 = 0$. $L = 0$ dévient alors évident !

III.6. **a.** $(X(t_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\overline{B}(0, \|X_0\|)$ qui est compact (fermé, borné en dimension finie) donc Bolzano-Weierstrass s'applique : on peut extraire une suite $(X_{t_{\varphi(k)}})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\xi_0 \in \mathbb{C}^N$.

b. C'est une propriété des équations autonomes que l'on retrouve immédiatement :

$$\begin{aligned} X(t_{\varphi(k)} + t) &= \mathrm{e}^{(A-B^*B)(t_{\varphi(k)}+t)} X_0 = \mathrm{e}^{(A-B^*B)t}\, \mathrm{e}^{(A-B^*B)t_{\varphi(k)}} X_0 \\ &= \mathrm{e}^{(A-B^*B)t} X_{t_{\varphi(k)}} \end{aligned}$$

en utilisant la propriété $\mathrm{e}^{a(t+s)} = \mathrm{e}^{at} . \mathrm{e}^{as}$.
Grâce à la continuité du produit matriciel, on en déduit que

$$\lim_{k\to+\infty} X(t_{\varphi(k)} + t) = \mathrm{e}^{(A-B^*B)t} \xi_0 = \xi(t).$$

c. Comme $X(t_{\varphi(k)}+t) \to L$ quand $k \to +\infty$, on peut appliquer la question III.5 : $L = 0$.

III.7. **a.** On vient de voir dans la question précédente que $\forall X_0 \in \mathbb{C}^N$, $\mathrm{e}^{(A-B^*B)t} X_0 \to 0$. Si on applique cette propriété aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^N$, on en déduit que $\mathrm{e}^{(A-B^*B)t} \to 0$ quand $t \to +\infty$.

b. Soit X un vecteur propre de M, de valeur propre λ. On sait que $\mathrm{e}^{Mt} X = \mathrm{e}^{\lambda t} X \to 0$. Or $\| \mathrm{e}^{\lambda t} X\| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda)t} \|X\|$ donc $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$.

c. La décomposition que l'on demande d'admettre est la décomposition en sous-espaces caractéristiques et elle s'obtient de manière élémentaire avec le lemme des noyaux.
Ensuite, on utilise les résultats suivants :

- Si N est nilpotente alors $\mathrm{e}^{Nt} X = Q_p(t)X$ où Q_p est un polynôme en t à valeurs matricielles.
- Si $M - \lambda I_N$ est nilpotente alors $\mathrm{e}^{(M-\lambda I_N)t} X = Q_p(t)X$ d'où $\mathrm{e}^{Mt} X = \mathrm{e}^{\lambda t} Q_p(t)X$.

Avec $M = A - B^*B$ et $X \in \mathbb{C}^N$, on écrit $X = X_1 + \cdots + X_n$ où $X_i \in \mathrm{Ker}(M - \lambda_i)^{m_i}$ d'où

$$\mathrm{e}^{Mt} X = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_i t} Q_i(t)X_i \Rightarrow \| \mathrm{e}^{Mt} X\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda_i)t} |Q_i(t)|.\|X_i\|.$$

$\mathcal{N}(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} \|X_i\|$ est une norme dans $\mathbb{C}^N$ et comme en dimension finie, les normes sont équivalentes alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\|X_i\| \leqslant \alpha\|X\|$.

Si $c = -\dfrac{1}{2}\max(\mathrm{Re}(\lambda_i))$ alors

$$\begin{aligned}\|\,\mathrm{e}^{Mt}\,X\| &\leqslant \mathrm{e}^{\max(\mathrm{Re}(\lambda_i))}\,\alpha\|X\|\sum_{i=1}^{n}|Q_i(t)|\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-ct}\,\alpha\|X\|\left(\mathrm{e}^{-ct}\sum_{i=1}^{n}|Q_i(t)|\right)\end{aligned}$$

la dernière quantité entre parenthèses tend vers 0 quand $t \to +\infty$ donc elle est bornée.
Il existe donc $K > 0$ tel que $\|\,\mathrm{e}^{Mt}\,X\| \leqslant K\,\mathrm{e}^{-ct}\,\|X\|$.
Conclusion : on a bien $|||\,\mathrm{e}^{Mt}\,||| = |||\,\mathrm{e}^{(A-B^*B)t}\,||| \leqslant K\,\mathrm{e}^{-ct}$.

III.8. La réponse est NON ! Si A et B ne vérifient pas la propriété **[a]**, soit X un vecteur propre de A tel que $BX = 0$ alors $(A-B^*B)X = \lambda X$ donc $\mathrm{e}^{(A-B^*B)t}\,X = \mathrm{e}^{\lambda t}\,X$. Or, λ étant une valeur propre de A est imaginaire pure donc $|\,\mathrm{e}^{\lambda t}\,| = 1$ donc $\mathrm{e}^{(A-B^*B)t}\,X$ ne peut tendre vers 0.

Partie IV

IV.1. Immédiat : $(iA)^* = -iA^* = -iA$.

IV.2. C'est presque un résultat du cours : il faut faire deux intégrations par parties avec des fonctions vectorielles.
On utilise ensuite les majorations :

$$\|kc_k(w_0)\| = \frac{1}{|k|}\|c_k(w_0'')\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + \|c_k(w_0'')\|^2\right).$$

$\|c_k(w_0''\|^2 = \sum\limits_{j=1}^{N}|c_k(w_{0,j}'')|^2$ où les $w_{0,j}''$ désignent les fonctions coordonnées de w_0''. Parseval appliqué à chacune des fonctions coordonnées nous assure la convergence des séries $\sum|c_k(w_{0,j}'')|^2$ puis de la série $\sum\|c_k(w_0'')\|^2$. Comme la série $\sum 1/k^2$ converge, par domination, on en déduit que la série $\sum\|kc_k(w_0)\|$ converge.

IV.3. On pose pour cette question $f_k(t) = \mathrm{e}^{(ikA-B^*B)t}\,c_k(w_0)\,\mathrm{e}^{ikx}$ qui dépend aussi de x.

- On a $f_k'(t) = (ikA - B^*B)f_k(t)$. La matrice ikA est antihermitienne donc, grâce à la question III.3, on sait que $|||\,\mathrm{e}^{(ikA-B^*B)t}\,||| \leqslant 1$ donc $\|f_k(t)\| \leqslant \|c_k(w_0)\|$. On obtient alors :

$$\begin{aligned}\|f_k'(t)\| &\leqslant \|ikA - B^*B\|\|f_k(t)\|\\ &\leqslant (|k|.\|A\| + \|B^*B\|).\|c_k(w_0)\|.\end{aligned}$$

  Comme les séries $\sum\|c_k(w_0)\|$ et $\sum\|kc_k(w_0)\|$ convergent, on en déduit la convergence normale de la série $\sum f_k'$ donc $w(t,x)$ est bien dérivable par rapport à t.
  Le même genre de raisonnement s'applique pour justifier la dérivabilité de w par rapport à x..
- On a donc

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t}(t,x) &= \sum_{k=\in\mathbb{Z}}(ikA - B^*B)f_k(t)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} ikAf_k(t) - B^*B\sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(t)\end{aligned}$$

car les deux séries convergent

$$= A\frac{\partial w}{\partial x}(t,x) - B^*Bw(t,x)$$

- La 2π-périodicité par rapport à x est immédiate.
- La convergence de la série $\sum f_k$ étant normale par rapport à $x \in [0, 2\pi]$, on peut intégrer termes à termes la série. Toutes les intégrales étant nulles, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{2\pi} w(t,x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout $t \in [0, +\infty[$.
- $w(0,x) = w_0(x)$ est immédiat !

IV.4. On utilise la formule de Parseval sur chaque composante de $w(t,x)$ comme au IV.2 :

$$\int_0^{2\pi} \|w(t,x)\|^2\,\mathrm{d}x = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\,\mathrm{e}^{(ikA-B^*B)t}\,c_k(w_0)\|^2.$$

Or $\|\,\mathrm{e}^{(ikA-B^*B)t}\,c_k(w_0)\|^2 \leqslant \|c_k(w_0\|^2$ ce qui assure la convergence normale de la série $\sum \|\,\mathrm{e}^{(ikA-B^*B)t}\,c_k(w_0)\|^2$. On a vu au III.7.a que, $\forall k \in \mathbb{Z}^*$, $\mathrm{e}^{(ikA-B^*B)t} \to 0$ quand $t \to +\infty$ donc, grâce au théorème de double limite, on en déduit que

$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^{2\pi} \|w(t,x)\|^2\,\mathrm{d}x = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lim_{t\to+\infty} \|\,\mathrm{e}^{(ikA-B^*B)t}\,c_k(w_0)\|^2 = 0.$$

Partie V

V.1. Soit $h(Y) = \|BY\|^2 + \|BAY\|^2$. h est continue car c'est une application polynomiale, elle est donc bornée sur la sphère unité qui est compacte et atteint ses bornes C_1 et C_2. On a donc

$$\forall Y \in S(0,1),\ \exists (Y_1, Y_2) \in S(0,1)^2 \mid C_1 = h(Y_1) \leqslant h(Y) \leqslant C_2 = h(Y_2).$$

Montrons que $C_1 > 0$: $B \neq 0$ sinon tout vecteur de $\mathbb{C}^2$ est dans $\operatorname{Ker} B$, en particulier les vecteurs propres de A (qui existent car le corps de base est $\mathbb{C}$). Comme on est en dimension 2, on en déduit que $\dim \operatorname{Ker} B \leqslant 1$.

- Si $Y_1 \notin \operatorname{Ker} B$ alors $BY_1 \neq 0$ donc $C_1 > 0$.
- Si $BY_1 = 0$ alors $BAY_1 \neq 0$. En effet : si $BAY_1 = 0$, $AY_1 \in \operatorname{Ker} B$ qui est de dimension 1 donc AY_1 est proportionnel à $Y_1 \in \operatorname{Ker} B$, donc Y_1 serait un vecteur propre de A dans le noyau de B, ce qui est écarté. Là aussi, on a $C_1 > 0$.

Conclusion : par homothétie, on déduit des inégalités précédentes que $\forall Y \in \mathbb{C}^N$, $C_1\|Y\|^2 \leqslant \|BY\|^2 + \|BAY\|^2 \leqslant C_2\|Y\|^2$.

V.2. **a.** Le problème de Cauchy en question est le suivant : $X_k'(t) = (ikA - B^*B)X_k(t)$ avec $X_k(0) = c_k(w_0)$.

b. On a tout d'abord :

$$|\mathcal{I}(< BAY, BY >)| \leqslant \|BAY\|.\|BY\| \leqslant \frac{1}{2}(\|BAY\|^2 + \|BY\|^2)$$
$$\leqslant \frac{1}{2}C_2\|Y\|^2$$

d'où $\|Y\|^2 \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{2k}C_2\right) \leqslant \mathcal{L}_{\varepsilon,k}(Y) \leqslant \|Y\|^2 \left(1 + \dfrac{\varepsilon}{2k}C_2\right)$.

On peut alors prendre $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{C_2}$ pour avoir $\dfrac{1}{2}\|Y\|^2 \leqslant \mathcal{L}_{\varepsilon,k}(Y) \leqslant \dfrac{3}{2}\|Y\|^2$.

c. $\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]$ est dérivable par les théorèmes généraux.

On sait déjà que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|X_k(t)\|^2 = -2\|BX_k(t)\|^2$, il reste à dériver l'autre expression $\mathcal{I}(< BAX_k(t), BX_k(t) >)$: comme

$$< BAX_k(t), BX_k(t) >' = < BAX_k'(t), BX_k(t) > + < BAX_k(t), BX_k'(t) > \text{ alors}$$

$$< BAX_k(t), BX_k'(t) > = -ik < BAX_k(t), BAX_k(t) > - < BAX_k(t), BB^*BX_k(t) >$$
$$< BAX_k'(t), BX_k(t) > = ik < BAAX_k(t), BX_k(t) > - < BAB^*BX_k(t), BX_k(t) > .$$

D'où

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)] = -2\|BX_k(t)\|^2 - \varepsilon\|BAX_k(t)\|^2 - \frac{\varepsilon}{k}\mathcal{I}(< BB^*BAX_k(t), BX_k(t) >)\\ + \varepsilon < BAAX_k(t), BX_k(t) > - \frac{\varepsilon}{k}\mathcal{I}(< BAB^*BX_k(t), BX_k(t) >).\end{aligned}$$

d. On majore donc :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{L}_{\varepsilon,k}(t) \leqslant -2\|BX_k(t)\|^2 - \varepsilon\|BAX_k(t)\|^2 + \varepsilon\|BB^*BA\|.\|X_k(t)\|.\|BX_k(t)\|\\ + \varepsilon\|BAA\|.\|X_k(t)\|.\|BX_k(t)\| + \varepsilon\|BAB^*B\|.\|X_k(t)\|.\|BX_k(t)\|\end{aligned}$$

ce qui donne la valeur de C_3 suggérée.

e. On reprend les idées de la question V.1 : soit $h_\varepsilon(Y) = 2\|BY\|^2 + \varepsilon\|BAY\|^2 - \varepsilon C_3\|Y\|.\|BY\|$. h_ε est continue et atteint son minimum sur la sphère unité en Y_1. On distingue 2 cas :

- Si $Y_1 \in \operatorname{Ker} B$ alors $h_\varepsilon(Y_1) = \varepsilon\|BAY_1\|$ et on pose $C_4 = \dfrac{2}{3}\|BAY_1\|$ qui est non nul.
- Si $BY_1 \neq 0$, on pose $\alpha = \|BY_1\| > 0$ d'où

$$\begin{aligned}h_\varepsilon(Y_1) &= 2\alpha + \varepsilon\|BAY_1\|^2 - \varepsilon C_3\alpha\\ &= \alpha(2-\varepsilon C_3) + \varepsilon\|BAY_1\|^2 \geqslant \alpha\end{aligned}$$

pour $\varepsilon < \varepsilon_1 = \min(\frac{1}{C_3}, \varepsilon_0)$. On pose $C_4 = \dfrac{3\alpha}{2\varepsilon_1}$.

Conclusion : dans tous les cas, on a $\forall Y \in \mathbb{C}^N$, $h_\varepsilon(Y) \geqslant \dfrac{3}{2}\varepsilon C_4\|Y\|^2$. Si on revient aux X_k cela donne

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]}{\mathrm{d}t} &\leqslant -\frac{3}{2}\varepsilon C_4\|X_k(t)\|^2\\ &\leqslant -\varepsilon C_4\|\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]\|^2\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité du V.2.b multipliée par -1.

f. Soit $f(t) = \mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]\,\mathrm{e}^{\varepsilon C_4 t}$ alors

$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{\varepsilon C_4 t} + \varepsilon C_4\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)]\,\mathrm{e}^{\varepsilon C_4 t} \leqslant 0.$$

f est décroissante donc $\forall t \in [0, +\infty[$, $f(t) \leqslant f(0)$ ce qui donne

$$\mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(t)] \leqslant \mathcal{L}_{\varepsilon,k}[X_k(0)]\,\mathrm{e}^{-\varepsilon C_4 t}.$$

V.3. On traduit l'inégalité que l'on vient d'obtenir :

$$\underbrace{\|X_k(t)\|^2 + \frac{\varepsilon}{k}\mathcal{I}(< BAx_k(t), BX_k(t) >)}_{\frac{1}{2}\|X_k(t)\|^2 \leqslant} \leqslant \underbrace{\|X_k(0)\|^2\,\mathrm{e}^{-\varepsilon C_4 t} + \frac{\varepsilon}{k}\mathcal{I}(< BAX_k(0), BX_k(0) >)\,\mathrm{e}^{-\varepsilon C_4 t}}_{\leqslant \frac{3}{2}\|X_k(0)\|^2\,\mathrm{e}^{-\varepsilon C_4 t}}$$

ce qui donne $\|X_k(t)\|^2 \leqslant 3\,\mathrm{e}^{-\varepsilon C_4 t}\,\|c_k(w_0)\|^2$ et on prend la racine carrée.

V.4. Conclusion :

$$\int_0^{2\pi} \|w(t,x)\|^2\,\mathrm{d}x = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \|X_k(t)\|^2$$
$$\leqslant K^2\,\mathrm{e}^{-2ct}\,2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} \|c_k(w_0)\|^2 \leqslant K^2\,\mathrm{e}^{-2ct}\,2\pi \int_0^{2\pi} \|w_0(x)\|^2\,\mathrm{d}x.$$

Commentaires : il y a de nombreuses questions très faciles dans ce problème et quelques questions difficiles ou techniques. Voici ce que j'en pense : je note Dn la difficulté dans l'ordre croissant (toutes choses étant relatives) et Tn la technicité, cela concerne les questions où les justifications l'emporte sur la difficulté réelle.

II.3.b	II.4	III.5.b	III.7.C	IV.2	IV.4	V.1	V.2.b	V.2.c	V.2.d	V.2.e	V.2.f
D2	T2	D1	D3	D1	T1	D2	D1	T2	T1	D4	D1