Corrigé
Centrale MP 2010, Maths I

Partie I

I.A —

I.A.1) a) Élémentaire mon cher Watson !

b) Si $x_1, x_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors pour tout $y \in E$
$$h(x_1 + \lambda x_2)(y) = \varphi(x_1 + \lambda x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \lambda\varphi(x_2, y) = \big(h(x_1) + \lambda h(x_2)\big)(y).$$
et donc $h(x_1 + \lambda x_2) = h(x_1) + \lambda h(x_2)$.

I.A.2) $A^{\perp\varphi} = \bigcap_{a \in A} \ker h(a)$, c'est un sous espace vectoriel de E.

I.A.3) $\ker h = \big\{x \in E / \ \forall y \in E, \ \varphi(x, y) = 0\big\} = E^{\perp\varphi}$, $\dim E = \dim E^* = n$ donc h est un isomorphisme si et seulement si $E^{\perp\varphi} = \{0\}$.

I.A.4) a) Sachant que pour tout forme linéaire f de E, $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i^*$, Il suffit d'écrire pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$
$$h(e_j) = \sum_{i=1}^{n} h(e_j)(e_i)e_i^* = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i, e_j)e_i^*$$
N.B : du fait que φ est symétrique, sa matrice $\mathrm{mat}(\varphi, e) = \big(\varphi(e_i, e_j)\big)_{ij}$ est symétrique.

b) La matrice de $h(x)$ en tant qu'élément de E^* dans la base e^* est le vecteur colonne $[h(x)]_e = \mathrm{mat}(h, e, e^*)X = \Omega X$, sa matrice en tant que forme linéaire de E dans la base e est le vecteur ligne $\mathrm{mat}(h(x), e) = {}^t[h(x)]_e = {}^tX{}^t\Omega = {}^tX\Omega$

Et ainsi $\varphi(x, y) = h(x)(y) = \mathrm{mat}(h(x), e)Y = {}^tX\Omega Y$.

N.B : si on note $X = (x_i)_i$, $Y = (y_i)_i$ et $\Omega = (a_{ij})_{ij}$ alors
$$\varphi(x, y) = {}^tX\Omega Y = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}x_iy_j \quad (*)$$
En outre, puisque $\mathrm{mat}(h, e, e') = \mathrm{mat}(\varphi, e)$ et que φ est non dégénérée si seulement si h est un isomorphisme alors
$$\varphi \text{ est non dégénérée} \Longleftrightarrow \mathrm{mat}(\varphi, e) \text{ est inversible}$$

I.B —

I.B.1) Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$, par définition de $\mathcal{Q}(E)$, il existe une forme bilinéaire symétrique φ de E telle que $q = q_\varphi$. Si maintenant ψ est une forme bilinéaire symétrique vérifiant la même condition $q = q_\psi$, l'identité de polarisation donne :
$$\forall (x, y) \in E^2, \ \varphi(x, y) = \frac{1}{2}\big(q(x + y) - q(x) - q(y)\big) = \psi(x, y)$$
et donc $\psi = \varphi$.

I.B.2) On va noter respectivement φ et φ' les formes polaires des formes quadratiques q et q'.

Supposons qu'il existe une isométrie f de (E, q) dans (E', q'). Soit e une base quelconque de E et soit e' son image par l'isomorphisme f.

Pour tout vecteur e_i de e et son image e_i' par f , $q'(e_i') = q'(f(e_i)) = q(e_i)$ et donc par polarisation
$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 , \ \varphi'(e_i', e_j') = \varphi(e_i, e_j).$$
ce qui signifie que $\mathrm{mat}(q', e') = \mathrm{mat}(q, e)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe des bases e de E et e' de E' telles que $\mathrm{mat}(q', e') = \mathrm{mat}(q, e)$ et notons Ω cette matrice.

Soit f l'unique application linéaire de E dans E' qui transforme e en e'. $\mathrm{mat}(f, e, e') = I_n$ donc pour tout $x \in E$, si $X = \big[x\big]_e$ alors $\big[f(x)\big]_{e'} = X$ et par suite $q'\big(f'(x)\big) = {}^tX\Omega X = q(x)$.

f est donc une isométrie de E sur E'.

I.B.3) Pour tout $x = \sum_{i=1}^{2p} x_ic_i \in \mathbb{K}^{2p}$, $q_p(x) = 2\sum_{i=1}^{p} x_ix_{i+p}$.

a) On pose pour tout $x = \sum_{i=1}^{2p} x_ic_i \in \mathbb{K}^{2p}$ et $y = \sum_{i=1}^{2p} y_ic_i \in \mathbb{K}^{2p}$
$$\varphi_p(x, y) = \frac{1}{2}\left(q(x + y) - q(x) - q(y)\right) = \sum_{i=1}^{p}(x_iy_{i+p} + x_{i+p}y_i)$$
On vérifie que φ_p est une forme bilinéaire symétrique, et que q_p est la forme quadratique qui lui est associée.

La lecture de la matrice de q_p peut être faite directement à partir de l'expression de $\varphi_p(x,y)$ selon la formule $(*)$, question (I.A.4.b).

$$\operatorname{mat}(q_p, c) = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$$

On notera dans la suite de ce corrigé J_p cette dernière matrice.

b) q_p est non dégénérée puisque elle représentée par la matrice inversible J_p ($\det(J_p) = (-1)^p$) dans la base canonique de $\mathbb{K}^{2p}$.

Si maintenant (F, q) est un espace de Artin, il est isométrique à $(\mathbb{K}^{2p}, q_p)$. q et q_p seront donc représentées par une même matrice Ω dans des bases bien choisies de F et de $\mathbb{K}^{2p}$. q_p est non dégénérée donc toutes ses matrices sont inversibles. Ω est donc inversible et par suite q est non dégénérée.

c) En remarquant que $\operatorname{mat}(q,c) = I_{2p}$, il suffit de trouver une base e de $\mathbb{C}^{2p}$ telle que $\operatorname{mat}(q_p, e) = I_{2p}$. Ce qui peut nous faire penser à une certaine méthode de Gauss (vue pour les formes quadratiques **réelles** ... quand même).

Soit $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{2p} x_k c_k \in \mathbb{C}^{2p}$,

$$\begin{aligned} q_p(x) = 2\sum_{k=1}^{p} x_k x_{k+p} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\left((x_k + x_{k+p})^2 - (x_k - x_{k+p})^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{p}(x_k + x_{k+p})^2 + \sum_{k=1}^{p}(ix_k - ix_{k+p})^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}(x_k + x_{k+p})^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=p+1}^{2p}(ix_{k-p} - ix_k)^2 \end{aligned}$$

On considère alors la famille de formes linéaires $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{2p})$ définies par

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_k + x_{k+p}) \text{ si } k \in [\![1,p]\!] \text{ et } \psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(ix_{k-p} - ix_k) \text{ si } k \in [\![p+1, 2p]\!].$$

de telle sorte que $q_p(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2p} \psi_k(x)^2$. Définitions qu'on peut résumer matriciellement par

$$\operatorname{mat}_{c^*}(\Psi) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I_p & iI_p \\ I_p & -iI_p \end{pmatrix}$$

On note P cette dernière matrice.

Procédure de routine (opération par blocs, $L2 \leftarrow L2 - L1$) :

$$\begin{vmatrix} I_p & 0 \\ -I_p & I_p \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_p & iI_p \\ I_p & -iI_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_p & iI_p \\ 0 & -2iI_p \end{vmatrix} \quad \text{soit} \quad \begin{vmatrix} I_p & iI_p \\ I_p & -iI_p \end{vmatrix} = (-2i)^p$$

Donc $\det P \neq 0$ et par suite Ψ est une base de E^*. Si e est sa base anté-duale, alors pour tout $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{2p} y_k e_k = \sum_{k=1}^{2p} \psi_k(x) e_k \in E$

$$q_p(x) = \sum_{k=1}^{2p} y_k^2.$$

et donc $\operatorname{mat}(q_p, e) = I_{2p}$ $\quad \mathcal{CQFD}$.

N.B : Rien n'empêche d'utiliser la méthode de Gauss pour une forme quadratique q d'un $\mathbb{C}$-ev E. Elle permettrait de prouver l'existence d'une base de formes linéaires $(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ et de scalaires complexes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que

$$\forall x \in E,\ q(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \psi_k(x)^2$$

q est alors non dégénérées si et seulement si tous les coefficient α_k sont non nuls, et dans ce cas en considérant pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, un complexe β_k tel que $\beta_k^2 = \alpha_k$, $\psi'_k = \frac{1}{\beta_k}\psi_k$ et e' la base anté-duale de $(\psi'_1, \psi'_2, \ldots, \psi'_n)$, nous aurions

$$\forall x = \sum_{k=1}^{n} y_k e'_k,\ q(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

Ainsi par "transitivité", si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\dim E$ est paire alors

$$(E,q) \text{ est un espace de Artin} \iff q \text{ est non dégénérée}$$

d) Là on se retrouve en terrain connu, celui des formes quadratique réelles. Il suffit de trouver une base e' de $\mathbb{R}^{2p}$ telle que

$$\operatorname{mat}(q_p, e') = \operatorname{mat}(q', c) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$$

ou encore une base e' telle que pour tout $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{2p} y_i e'_i$, $q_p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{i=p+1}^{2p} y_i^2$. On reconnait là l'écriture canonique d'une forme quadratique de signature (p,p). il suffit donc de montrer que la signature de q_p est (p,p).

Soit $x = \sum_{i=1}^{2p} x_i c_i \in \mathbb{R}^{2p}$

$$q_p(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}(x_i + x_{i+p})^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=p+1}^{2p}(x_{i-p} - x_i)^2$$

il reste à justifier que la famille de formes linéaires $(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_{2p})$ définies par

$$\psi(x) = x_i + x_{i+k} \text{ si } i \in [1,p] \text{ et } \psi_i(x) = x_{i-p} - x_i \text{ si } i \in [p+1, 2p]$$

est libre. Pour cela, il suffit de justifier que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} I_p & I_p \\ I_p & -I_p \end{pmatrix}$$

est inversible.

N.B : Là encore, en déployant un raisonnement similaires à celui fait à la fin de la question précédente, on prouve que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\dim E = 2p$ alors

$$(E, q) \text{ est un espace de Artin} \iff \text{la signature de } q \text{ est } (p,p).$$

e) Soit (F, q) un espace de Artin de dimension $2p$, et soit donc f une isométrie de $(\mathbb{K}^{2p}, q_p)$ sur (F, q).

Le sous espace vectoriel $V = \text{Vect}\{c_1, c_2, \cdots, c_p\}$ de $\mathbb{K}^{2p}$ est de dimension p et il vérifie : $\forall x \in V, q_p(x) = 0$.

Son image $f(V)$ est un sous espace vectoriel de F de dimension p (f est un isomorphisme) et elle vérifie : $\forall x \in V,\ q(f(x)) = q_p(x) = 0$.

——– *Partie II* ——–

II.A —

II.A.1) a) Soit $\psi \in E^*$. h est un isomorphisme puisque q est non dégénérée, soit donc l'unique vecteur $x \in E$ tel que $\psi = h(x)$.

On peut alors écrire $\psi = \sum_{i=1}^{n} h(x)(e_i)e_i^* = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x, e_i)e_i^*$ et par suite

$$\psi \in \text{Vect}\{e_{p+1}^*, e_{p+2}^*, \cdots, e_n^*\} \iff \forall i \in [\![1,p]\!],\ \varphi(x, e_i) = 0 \iff x \in F^\perp.$$

et donc : $\psi \in \text{Vect}\{e_{p+1}^*, e_{p+2}^*, \cdots, e_n^*\} \iff \psi \in h(F^\perp)$

Ainsi $h(F^\perp) = \text{Vect}\{e_{p+1}^*, e_{p+2}^*, \cdots, e_n^*\}$

b) h est un isomorphisme donc $\dim F^\perp = \dim h(F^\perp) = n - p$. soit

$$\dim F + \dim F^\perp = n$$

c) Soit $x \in F$ alors pour tout $y \in F^\perp$, $\varphi(x,y) = 0$ et donc $x \in (F^\perp)^\perp$. Ce qui montre que $F \subset (F^\perp)^\perp$. Ensuite les relations $\dim F + \dim F^\perp = \dim F^\perp + \dim(F^\perp)^\perp = n$ donnent $\dim F = \dim(F^\perp)^\perp$ et ainsi $(F^\perp)^\perp = F$.

II.A.2) a) Un vecteur de $(F+G)^\perp$ est orthogonal à tout vecteur de F et à tout vecteur de G donc $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$ et inversement un vecteur qui est à la fois orthogonal à tout vecteur de F et à tout vecteur de G va être orthogonal à tout vecteur de $F+G$, soit $F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp$.

Alors $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$

b) Il suffit d'appliquer le résultat du a) à $F^\perp$ et $G^\perp$ et de passer ensuite à l'orthogonal.

II.A.3) Notons que $F^{\perp_{\varphi_F}} = \{x \in F / \forall y \in F,\ \varphi(x,y) = 0\} = F \cap F^\perp$.

$1 \Rightarrow 2)$ Supposons que F est non singulier. φ_F est donc non dégénérée et donc d'après (I.A.3), $F^{\perp_{\varphi_F}} = \{0\}$ soit $F \cap F^\perp = \{0\}$.

$2 \Rightarrow 3)$ Supposons que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Nous avons $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ donc $F \oplus F^\perp = E$.

$3 \Rightarrow 4)$ Supposons que $F \oplus F^\perp = E$. Alors $F^\perp \cap (F^\perp)^\perp = \{0\}$ et donc $(F^\perp)^{\perp_{\varphi_{F^\perp}}} = \{0\}$. Alors $\varphi_{F^\perp}$ est non dégénérée et donc $F^\perp$ est non singulier.

$4 \Rightarrow 1)$ Supposons que $F^\perp$ est non singulier. L'implication $1 \Rightarrow 4)$ ayant été justifiée, il suffit de l'appliquer à $F^\perp$ pour s'assurer que F est non singulier.

II.A.4) Supposons que F et G sont orthogonaux et non singuliers.

Notons que le fait que F et G soient orthogonaux signifie que $F \subset G^\perp$. Puisque $G \cap G^\perp = \{0\}$ alors $F \cap G = \{0\}$ et donc la somme $F + G$ est bien directe.

Soit maintenant $x \in (F \oplus G) \cap (F \oplus G)^\perp$, et posons $x = x_F + x_G$ où $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

$(F \oplus G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ donc $x \in F^\perp \cap G^\perp$.

$x \in F^\perp$ donc pour tout $u \in F$, $\varphi(x,u) = \varphi(x_F, u) = 0$, et donc $x_F \in F \cap F^\perp$.

F est non singulier donc $x_F = 0$.

De même $x \in C^\perp$ donne $x_G = 0$.

Alors $x = 0$ et donc $(F \oplus G) \cap (F \oplus G)^\perp = \{0\}$. $F \oplus G$ est donc non singulier.

II.B —

II.B.1) Avec les formes quadratiques de $\mathbb{R}^2$, $q(x,y) = 2xy$ et $q'(x,y) = x^2 - y^2$, nous avons

$$\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = xy' + yx' \text{ et } \varphi'\big((x,y),(x',y')\big) = xx' - yy'$$

$\big((1,1),(1,-1)\big)$ est une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^2$, $\big((1,0),(0,1)\big)$ en est une base q'-orthogonale.

II.B.2) Soit $e_1 = (a,b)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$ et voyons s'il peut exister un vecteur $e_2 = (x,y)$ tel que (e_1,e_2) soit une base de $\mathbb{R}^2$ à la fois q-orthogonale et q'-orthogonale. On devrait avoir

$$(S)\begin{cases} bx + ay = 0 \\ ax - by = 0 \end{cases}$$

ce système linéaire a pour déterminant $\delta = -b^2 - a^2$. e_1 est non nul donc $\delta \neq 0$. (S) a donc pour unique solution la solution nulle.

Ainsi il n'existe aucune base de $\mathbb{R}^2$ qui soit à la fois q-orthogonale et q'-orthogonale.

II.B.3) D'après des résultats démontrés dans la premières parties pour toute base e de E, $\operatorname{mat}(h,e,e^*) = \big(\varphi(e_i,e_j)\big)_{ij}$. On voit ainsi que e est une base q-orthogonale si et seulement si $\operatorname{mat}(h,e,e^*)$ est diagonale. Plus exactement e est q-orthogonale si et seulement si

$$\operatorname{mat}(h,e,e^*) = \operatorname{diag}\big(q(e_1), q(e_2), \cdots, q(e_n)\big).$$

Notons aussi que puisque q est non dégénérée $\operatorname{mat}(h,e,e^*)$ est inversible et donc dans le cas où e est une base q-orthogonale alors $q(e_i) \neq 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Supposons que e est une base à la fois q-orthogonale et q'-orthogonale de E alors

$$\operatorname{mat}(h^{-1}\circ h', e) = \operatorname{mat}(h^{-1}, e^*, e)\operatorname{mat}(h', e, e^*) = \operatorname{diag}\left(\frac{q'(e_1)}{q(e_1)}, \frac{q'(e_2)}{q(e_2)}, \cdots, \frac{q'(e_n)}{q(e_n)}\right)$$

$\operatorname{mat}(h^{-1}\circ h', e)$ est diagonale donc la base e est formée de vecteurs propres de $h^{-1}\circ h'$.

II.B.4) Supposons que $h^{-1}\circ h'$ admet n valeurs propres deux à deux distinctes, il est donc diagonalisable. Soit e une base de diagonalisation et posons pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ $h^{-1}\circ h'(e_i) = \lambda_i e_i$ ou encore $h'(e_i) = \lambda_i h(e_i)$. Vu la définition des applications h et h' ceci signifie que

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall x \in E,\ \varphi'(x,e_i) = \lambda_i \varphi(x,e_i)$$

Ainsi pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, un vecteur x qui serait orthogonal aux vecteurs $e_1, e_2, \cdots, e_p$ pour q le serait aussi pour q'.

Posons alors pour tout $p \in [\![1,n]\!]$, $V_p = \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$. Si $p \geqslant 2$ alors $V_p \cap V_{p-1}^{\perp}$ est non nul, car sinon nous aurions $\dim V_p + \dim V_{p-1}^{\perp} \leqslant n$ soit $p + (n-p+1) = n+1 \leqslant n$. Considérons alors une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ telle que

$$\begin{cases} u_1 = e_1 \\ u_p \in V_p \cap V_{p-1}^{\perp}\backslash\{0\} \quad \text{si } p \geqslant 2 \end{cases}$$

Pour tout $p \geqslant 2$, u_p est orthogonal aux vecteurs $e_1, e_2, \cdots, e_{p-1}$ pour q donc aussi pour q' et donc il est ort hogonal aux vecteurs $u_1, u_2, \cdots, u_{p-1}$ (car ils sont tous dans $V_{p-1} = \operatorname{Vect}\{e_1, e_2, \cdots, e_{p-1}\}$) pour q et pour q'. Au final la famille $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est à la fois q-orthogonale et q'-orthogonale.

II.C —

II.C.1) $x \in E$ tel que $x \neq 0$ et $q(x) = 0$. (on dit que x est un vecteur q-isotrope).

a) q est non dégénérée, donc $x \notin E^{\perp}$, il existe donc au moins un vecteur $v \in E$ tel que $\varphi(x,v) \neq 0$. En posant $z = (1/\varphi(x,v))v$ nous avons $\varphi(x,z) = 1$.

b) Avec $y = z - (q(z)/2)x$ nous avons

$$q(y) = q(z) + \frac{q(z)^2}{4}q(x) - 2.\frac{q(z)}{2}.\varphi(z,x) = 0$$

c) $\varphi(x,y) = \varphi(x,z) - (q(z)/2)q(x) = \varphi(x,z) = 1$. Donc y est non colinéaire à x car sinon nous aurions $\varphi(x,y) = 0$.

Soit Π le plan engendré par x et y. Pour tout vecteur $v = \alpha x + \beta y \in \Pi$

$$q(v) = \alpha^2 q(x) + \beta^2 q(y) + 2\alpha\beta\varphi(x,y) = 2\alpha\beta$$

Alors $\big(\Pi, q_{/\Pi}\big)$ est un espace de Artin.

II.C.2) F un sous-espace vectoriel singulier de E et $(e_1, e_2, \cdots, e_s)$ une base de $F \cap F^{\perp}$. G un supplémentaire de $F \cap F^{\perp}$ dans F : $F = \big(F \cap F^{\perp}\big) \oplus G$.

a) $F^{\perp} = \big(F^{\perp} + F\big) \cap G^{\perp}$ donc $F \cap F^{\perp} = \big[F \cap (F^{\perp} + F)\big] \cap G^{\perp} = F \cap G^{\perp}$.

Comme $G \subset F$ alors $G \cap G^{\perp} \subset F \cap F^{\perp}$, mais $G \cap G^{\perp} \subset G$ et $G \cap (F \cap F^{\perp}) = \{0\}$ donc $G \cap G^{\perp} = \{0\}$.

D'après la question (II.A.3), G est non singulier.

b) Si $s = 1$, $F \cap F^{\perp} = \mathbb{K}e_1$. $e_1 \in F^{\perp}$ donc $\varphi(e_1,e_1) = 0$ et pour tout $v \in G$, $\varphi(e_1,v) = 0$. Donc $q(e_1) = 0$ et $e_1 \in G^{\perp}$.

Considérons la restriction q_1 de q sur $G^{\perp}$

D'après la question (II.C.1) il existe un plan artinien P_1 pour q_1 dans $G^{\perp}$ contenant e_1. P_1 est naturellement orthogonal à G pour q. Ce qu'on nous voulions démontrer.

Si $s \geqslant 2$, supposons que la propriété est vraie pour tout sous-espace F' tel que $\dim F' \cap F'^{\perp} = s-1$.

Posons $F' = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, \cdots, e_{s-1}\}$ et $E' = (G \oplus \mathbb{K}e_s)^{\perp}$.

$G \oplus \mathbb{K}e_s \subset F$ donc $F^{\perp} \subset E'$. $F' \subset F \cap F^{\perp} \subset F^{\perp}$ donc $F' \subset E'$.

De plus $F' \subset F^{\perp}$ et $F^{\perp} \subset F'^{\perp}$ donc $F' \subset F'^{\perp}$ soit $F' \cap F'^{\perp} = F'$. $\{0\}$ est le seul supplémentaire de $F' \cap F'^{\perp}$ dans F'.

$\dim F' \cap F'^{\perp} = s-1$ donc par hypothèse de récurrence il existe des plans artiniens $P_1, P_2, \cdots, P_{s-1}$ dans E' qui sont deux à deux orthogonaux et qui pour chaque $k \in [\![1, s-1]\!]$, P_k contient e_k.

Ses plans, puisqu'ils sont dans E', sont tous orthogonaux à G et au vecteur e_s.

Considérons maintenant le sous-espace $E'' = (G \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_{s-1})^{\perp}$. $e_s \in E''$ et $q(e_s) = 0$ donc il existe un plan artinien P_s de E'' contenant e_s

Finalement

- Pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, P_k est un plan artinien contenant e_k.
- Les plans P_k sont deux à deux orthogonaux
- Ils sont tous orthogonaux à G.

$\mathcal{CQFD}$

II.C.3) $\overline{F} = G \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$, les plans P_k étant deux à deux orthogonaux et tous orthogonaux à G.

Soit $x \in \overline{F} \cap \overline{F}^{\perp}$ et posons

$$x = y + \sum_{k=1}^{s} x_k, \quad \text{où } y \in G \text{ et } x_k \in P_k \text{ pour tout } k \in [\![1, s]\!].$$

Soit $v \in G$. $x \in \overline{F}^{\perp} \subset G^{\perp}$, donc $\varphi(x, v) = 0$. Les plans P_k sont orthogonaux à G donc pour tout $k \in [\![1, s]\!]$, $\varphi(x_k, v) = 0$.

On en déduit que $\varphi(y, v) = 0$ et ceci pour tout $v \in G$. Alors $y \in G \cap G^{\perp}$ et donc $y = 0$.

Ensuite, soit pour $k \in [\![1, s]\!]$, un vecteur quelconque v_k de P_k, alors $\varphi(x, v_k) = 0$ puisque $\overline{F}^{\perp} \subset P_k^{\perp}$, et $\varphi(x_i, v_k) = 0$ si $i \neq k$ puisque dans ce cas P_k est orthogonal à P_i.

D'où $\varphi(x_k, v_k) = 0$, et ceci pour tout $v_k \in P_k$. Mais $(P_k, q_{/P_k})$ est artinien donc $q_{/P_k}$ est non dégénérée, par suite $x_k = 0$.

Finalement $x = 0$, et donc $\overline{F} \cap \overline{F}^{\perp} = \{0\}$.

II.C.4) **Notons** qu'en général :

- $\overline{F} = G \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$ donc $\dim \overline{F} = \dim G + 2s = \dim F + \dim F \cap F^{\perp}$.
- $q_{/F} = 0 \iff \varphi_{/F \times F} = 0 \iff \forall (u, v) \in F^2,\ \varphi(u, v) = 0 \iff F \subset F^{\perp}$.

Ainsi si $q_{/F} = 0$, alors $\dim F \leqslant n - \dim F$ et donc $\dim F \leqslant n/2$.

II.C.5) Supposons que $n = 2p$.

Supposons que (E, q) est un espace de Artin, il existe donc une base e de E telle que

$$\forall x = \sum_{i=1}^{2p} x_i e_i \in E,\ q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i x_{i+p}$$

Si on pose $F = \mathrm{Vect}\{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$, on voit alors que pour tout $x \in F$, $q(x) = 0$. $\dim F = p$ et nous avons bien $q_{/F} = 0$.

Réciproquement s'il existe un sous-espace vectoriel F de E de dimension p et tel que $q_{/F} = 0$.

$F \subset F^{\perp}$ donc $F \cap F^{\perp} = F$ et donc $\overline{F} = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_p$ où $P_1, P_2, \cdots, P_p$ sont des plans artiniens deux à deux orthogonaux. Nous avons alors $\dim \overline{F} = 2p$ et donc $\overline{F} = E$.

Soit pour tout k une base (e_k, u_k) de P_k telle que $q(e_k) = q(u_k) = 0$ et $\varphi(e_k, u_k) = 1$.

$b = (e_1, \cdots, e_p, u_1, \cdots, u_p)$ est une base de E, puisque $E = P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_p$.

Maintenant pour tout $x = \sum_{k=1}^{p} (x_k e_k + x_{k+p} u_k) \in E$, les vecteurs $x_k e_k + x_{k+p} u_k$ étant deux à deux orthogonaux (car les plans P_k le sont) on aura

$$q(x) = \sum_{k=1}^{p} q\big(x_k e_k + x_{k+p} u_k\big) = 2 \sum_{k=1}^{p} x_k x_{k+p}$$

Ainsi E est un espace de Artin.

N.B : avec $\dim E = 2p$ et $\dim F = p$ et donc aussi $\dim F^{\perp} = p$

$$q_{/F} = 0 \iff F \subset F^{\perp} \iff F = F^{\perp}$$

Résumons : Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $2p$ muni d'une forme quadratique q, alors

$$(E, q) \text{ est un espace de Artin} \iff \begin{cases} q \text{ est non dégénérée} \\ \text{il existe un sev } F \text{ de } E \text{ tel que } F^{\perp} = F \end{cases}$$

——— *Partie III* ———

III.A —

III.A.1) a) L'identité de polarisation est votre amie

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(x,y) = \frac{1}{2}\big(q(x+y) - q(x) - q(y)\big)$$

Soient ensuite $f \in \mathcal{O}(E,q)$ et un sous-espace vectoriel F de E.

Soient $y_1 \in f(F^\perp)$ et $y_2 \in f(F)$, et soient $x_1 \in F^\perp$ et $x_2 \in F$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Nous avons alors

$$\varphi(y_1, y_2) = \varphi(x_1, x_2) = 0$$

donc $f(F^\perp) \subset f(F)^\perp$. Comme f est **par définition** un automorphisme alors $\dim f(F^\perp) = \dim F^\perp = n - \dim F$ et $\dim f(F)^\perp = n - \dim f(F) = n - \dim F$

et ainsi $\dim f(F^\perp) = \dim f(F)^\perp$. Alors $f(F^\perp) = f(F)^\perp$

N.B : Si jamais F est stable par f (et donc $f(F) = F$), ce qui précède démontre que $f(F^\perp) = F^\perp$.

b) Posons pour tout $(x,y) \in E$, $\psi(x,y) = \varphi(f(x), f(y))$, $M = \mathrm{mat}(f,e)$ et $\Omega = \mathrm{mat}(q,e)$.

Soient $x, y \in E$ et soient $X = [x]_e$ et $Y = [y]_e$, nous avons alors

$$\psi(x,y) = \varphi(f(x), f(y)) = {}^t(MX)\Omega(MY) = {}^tX\,{}^tM\Omega MY$$

donc $\mathrm{mat}(\psi, e) = {}^tM\Omega M$.

c) $f \in \mathcal{O}(E,q) \iff \psi = \varphi \iff \mathrm{mat}(\psi,e) = \mathrm{mat}(\varphi,e) \iff \Omega = {}^tM\Omega M$.

d) Si $f \in \mathcal{O}(E,q)$ alors ${}^tM\Omega M = \Omega$ et en passant au déterminant on aura $\det(M)^2\det(\Omega) = \det(\Omega)$. q est non dégénérée donc Ω est inversible et donc $\det(M)^2 = 1$.

Ainsi $\det(f) \in \{-1, 1\}$.

III.A.2) F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. s la symétrie de E d'axe F et de direction G.

a) Supposons que $s \in \mathcal{O}(E,q)$.

Pour tout $x \in F$ et $y \in G$, $\varphi(s(x), s(y)) = \varphi(x, -y) = -\varphi(x,y)$ et donc $\varphi(x,y) = -\varphi(x,y)$ soit $\varphi(x,y) = 0$. F et G sont donc orthogonaux.

Réciproquement, supposons que F et G sont orthogonaux.

Soit $x \in E$. $x + s(x) \in F$ et $x - s(x) \in G$ donc $\varphi(x + s(x), x - s(x)) = 0$, ce qui donne $\varphi(x,x) - \varphi(s(x), s(x)) = 0$ ou encore $q(s(x)) = q(x)$.

Alors $f \in \mathcal{O}(E,q)$.

b) Une symétrie est dans $\mathcal{O}(E,q)$ si et seulement si son axe F et sa direction G son orthogonaux, F et G étant naturellement supplémentaires nous aurions forcément $G = F^\perp$ (car $G \subset F^\perp$ et $\dim G = \dim F^\perp = n - \dim F$).

c) Soit s la reflexion de E d'axe H. Soit e un vecteur directeur de la droite $H^\perp$ et $(e_2, e_3, \cdots, e_n)$ une base de H.

H est non singulier donc H et $H^\perp$ sont supplémentaires et donc $b = (e, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E et $\mathrm{mat}(s,b) = \mathrm{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$.

Alors $\det(s) = -1$ et donc $s \in \mathrm{O}^-(E,q)$.

d) $x, y \in E$ tels que $q(x) = q(y)$ et $q(x-y) \neq 0$. Soit $H = \{x-y\}^\perp = (\mathbb{K}.(x-y))^\perp$.

Notons que $q(x-y) \neq 0$ implique que $H^\perp \cap H = \{0\}$ et donc que H est non singulier.

Soit maintenant s la réflexion d'axe H.

$x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{2}(x-y)$ avec

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(x-y) \in H^\perp \\ \frac{1}{2}(x+y) \in H \text{ car } \varphi(x-y, x+y) = q(x) - q(y) = 0 \end{cases}$$

donc $s(x) = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{1}{2}(x+y) = y$

N.B : si $x \neq y$, $q(x) = q(y)$ mais $q(x-y) = 0$, il ne peut exister de réflexions s de E telle que $s(x) = y$.

En effet, si une telle réflexion existait et H désignait son axe, alors $s(x-y) = y - s^2(x) = y - x$ et donc $x - y \in H^\perp$ ou encore $H^\perp = \mathbb{K}.(x-y)$. Mais comme $q(x-y) = 0$, alors $x - y \in \{x-y\}^\perp = H$. H est donc non singulier, il ne peur être l'axe d'une symétrie orthogonale.

III.B —

III.B.1) E est un espace de Artin de dimension $2p$ et F un sous-espace de E tel que $q_{/F} = 0$.

Soit $f \in \mathcal{O}(E,q)$ tel que $f(F) = F$.

On reprend la base $b = (e_1, \cdots, e_p, u_1, \cdots, u_p)$ construite dans $(II.C.5)$ et qui vérifie pour rappel les conditions suivantes

$$\begin{cases} (e_1, e_2, \cdots, e_p) \text{ est une base de } F \\ \text{Les plans } P_k = \mathrm{Vect}\{e_k, u_k\} \text{ sont 2 à 2 orthogonaux} \\ \forall k \in [\![1,p]\!],\ q(e_k) = q(u_k) = 0 \text{ et } \varphi(e_k, u_k) = 1. \end{cases}$$

Dans cette base, les matrices Ω et M de φ et de f sont de la forme (F étant stable par f)

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ où } A, B, C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}).$$

D'après (III.A.1.c), nous avons $\Omega = {}^tM\Omega M$, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^tCA \\ {}^tAC & {}^tBC + {}^tCB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que ${}^tCA = I_p$ et donc

$$\det(f) = \det(A)\det(C) = \det({}^tC)\det(A) = \det({}^tCA) = 1.$$

Alors $f \in \mathcal{O}^+(E, q)$.

III.B.2) F un sous-espace de E tel que $\overline{F} = E$ et $f \in \mathcal{O}(E, q)$ telle que $f_{/F} = id_F$.

Soit $s = \dim F \cap F^\perp$.

Il existe par définition du complété $\overline{F}$ des plans artiniens deux à deux orthogonaux et tous orthogonaux à G tels que $E = G \oplus P_1 \oplus \cdots \oplus P_s$.

G est non singulier donc $G \oplus G^\perp = E$. Le sous-espace $H = P_1 \oplus P_2 \cdots \oplus P_s$ et inclu dans $G^\perp$, car les plan P_k le sont tous. De plus $\dim G^\perp = \dim H = n - \dim G$, donc $G^\perp = H = P_1 \oplus P_2 \cdots \oplus P_s$.

Maintenant, $f_{/G} = id_G$, en particulier $f(G) = G$ et donc $f(H) = H$. G et H sont ainsi des sous-espaces supplémentaires dans E, tous les deux stables par f donc $\det(f) = \det(f_{/G})\det(f_{/H}) = \det(f_{/H})$.

H est un espace de Artin puisque $F \cap F^\perp \subset H$, $\dim F \cap F^\perp = \dfrac{1}{2}\dim H$ et $q_{F \cap F^\perp} = 0$. De plus $f_{/F} = id_F$ donc $f(F \cap F^\perp) = F \cap F^\perp$. D'après la question précédente nous avons donc $\det(f_{/H}) = 1$.

Par suite $\det(f) = 1$.

Une deuxième façon : sans utiliser la question précédente.

Il existe une base $b = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-2s}, e_1 \cdots, e_s, u_1, \cdots, u_s)$ de E telle que $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-2s})$ soit une base de G, $(e_1, e_2, \cdots, e_s)$ une base de $F \cap F^\perp$ et pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, (e_k, u_k) une base de P_k avec $q(e_k) = q(u_k) = 0$ et $\varphi(e_k, u_k) = 1$.

Dans cette base, les matrices de φ et de f sont de la forme

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s \\ 0 & I_s & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} I_{n-2s} & 0 & A \\ 0 & I_s & B \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

La matrice Δ étant celle de $\varphi_{/G \times G}$, la forme de M est due au fait que $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-2s}, e_1 \cdots, e_s)$ est une base de F et que $f_{/F} = id_F$.

La relation $\Omega = {}^tM\Omega M$ donne ici

$$\begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C \\ {}^tA\Delta & {}^tC & {}^tBC + {}^tCB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s \\ 0 & I_s & 0 \end{pmatrix}$$

En particulier $C = I_s$ et donc $\det f = \det C = 1$.

III.B.3) $f \in \mathcal{O}(E, q)$ tel que : $\forall x \in E,\ q(x) \neq 0 \Longrightarrow \big(f(x) - x \neq 0 \text{ et } q(f(x) - x) = 0\big)$.

F un sous-espace de E stable par f.

a) Puisque q est non dégénérée, il existe au moins un vecteur $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$.

$q(x - f(x)) = 0$ donc forcément la famille $\big(x, x - f(x)\big)$ est libre (et donc déjà $\dim E \geqslant 2$).

Ensuite $q(x - f(x)) = 0$ donc $x - f(x)$ est orthogonal à lui même. De plus

$0 = q(x - f(x)) = q(x) + q(f(x)) - 2\varphi(x, f(x)) = 2\big(q(x) - \varphi(x, f(x))\big)$ donc $\varphi(x, f(x)) = q(x)$. On en déduit que $\varphi(x, x - f(x)) = 0$, et donc que $x - f(x)$ est aussi orthogonal à x.

Alors $x - f(x) \in \text{Vect}\{x, f(x) - x\}^\perp$ avec $x - f(x) \neq 0$. q est non dégénérée donc forcément $\text{Vect}\{x, f(x) - x\}$ est inclu strictement dans E.

Alors $\dim E \geqslant 3$.

b) $V = \ker(f - id_E)$.

Soit $x \in V$, alors $f(x) - x = 0$ et donc par contre–apposée de l'hypothèse faite sur f, $q(x) = 0$. Ainsi $q_{/V} = 0$.

c) Soit $x \in E$ tel que $q(x) = 0$ et soit $H = \{x\}^\perp$.

$\dim H \geqslant n - 1$ selon que $x = 0$ ou non. Comme $n \geqslant 3$ alors $\dim H > n/2$. On ne peur donc avoir $q_{/H} = 0$, selon (II.4.C).

Soit maintenant $y \in H$ tel que $q(y) \neq 0$. $x \in H^\perp$ donc $\varphi(x, y) = 0$ et donc $q(x + y) = q(x) + q(y) = q(y)$. De même $q(x - y) = q(y)$.

d) $U = \text{Im}(f - id_E)$.

Soit $z \in U$ et soit donc $x \in E$ tel que $z = f(x) - x$.

Si $q(x) \neq 0$ alors $q(z) = q(f(x) - x) = 0$.

Si $q(x) = 0$ alors il existe $y \in E$ tel que $q(x + y) = q(x - y) = q(y) \neq 0$.

$q(y) \neq 0$ donc $q(f(y) - y) = 0$.

$q(x + y) \neq 0$ donc $q(f(x + y) - (x + y)) = q(z + f(y) - y) = 0$ et donc $q(z) + 2\varphi(z, f(y) - y) = 0$.

De même $q(x-y)\neq 0$ donne $q(z)-2\varphi(z,f(y)-y)=0$. La somme de ces deux dernières relations donne $q(z)=0$.

N.B : Nous avons ainsi démontré qu'en fait : $\forall x\in E,\ q(f(x)-x)=0$.

e) $q_{/U}=q_{/V}=0$ donc $\dim U\leqslant n/2$ et $\dim V\leqslant n/2$. D'après la formule du rang $\dim U+\dim V=n$ donc n est forcément paire et $\dim U=\dim V=n/2$.

$q_{/U}=0$ donc $U\subset U^{\perp}$, $\dim U^{\perp}=n-\dim U=n/2=\dim U$ donc $U^{\perp}=U$.

Soient ensuite $z\in U$ et $x\in V$. $f(x)=x$ et il existe $y\in E$ tel que $z=f(y)-y$.

$\varphi(z,x)=\varphi(f(y)-y,x)=\varphi(f(y),f(x))-\varphi(y,x)=0$. Donc $V\subset U^{\perp}$. L'égalité des dimensions donne alors $V=U^{\perp}$.

f) E est de dimension paire et V et un sev de E de dimension $n/2$ tel que $q_{/V}=0$. D'après (II.C.5), E est un espace de Artin.

De plus $V=\ker(f-id_E)$ donc $f(V)=V$ et donc d'après (III.B.1) $f\in\mathcal{O}^{+}(E,q)$.

——— *Partie IV* ———

N.B : Il est aisé de vérifier que $\big(\mathcal{O}(E,q),\circ\big)$ est un groupe.
Si F est un sous-espace non singulier de E, on notera dans la suite s_F la symétrie orthogonale de E d'axe F.

IV.A —

IV.A.1) Si $n=1$, posons $E=\mathbb{K}.e$. Soit f un automorphisme de E et posons $f(e)=\lambda e$. $q(f(e))=q(e)$ si seulement si $\lambda^2=1$, soit $\lambda=\pm 1$. Dans ces cas $f=\pm id_E$. Les deux endomorphismes id_E et $-id_E$ sont effectivement des isométries de E, ce sont donc les seules. $-id_E$ est la réflexion de E d'axe $\{0\}$.

IV.A.2) Supposons qu'il existe $x\in E$ tel que $f(x)=x$ et $q(x)\neq 0$.

$q(x)\neq 0$ donc $H=(\mathbb{K}x)^{\perp}$ est un hyperplan non singulier, la forme quadratique $q_{/H}$ est donc non dégénérée. $\mathbb{K}x$ est stable par f donc H est stable par f. Soit f' l'endomorphisme induit par f sur H. f' est un automorphisme de H et pour tout $x\in H$, $q_{/H}(f'(x))=q(f(x))=q(x)=q_{/H}(x)$. Donc $f'\in\mathcal{O}(H,q_{/H})$.

Par hypothèse de récurrence, f' est la composée d'au plus $n-1$ réflexions $s'_{H'_1},s'_{H'_2},\cdots,s'_{H'_r}$ de H.

Posons pour tout $k\in[\![1,r]\!]$, $H_k=\mathbb{K}x\oplus H'_k$. $\mathbb{K}x$ et H'_k sont orthogonaux et tous les deux non singuliers donc H_k est un hyperplan non singulier de E (d'après (II.A.4)).

Nous avons ensuite

$$\begin{cases} s_{H_1}\circ\cdots\circ s_{H_r}(x)=x=f(x)\\ \forall y\in H,\ s_{H_1}\circ\cdots\circ s_{H_r}(y)=s'_{H'_1}\circ\cdots\circ s'_{H'_r}(y)=f'(y)=f(y)\end{cases}$$

donc $f=s_{H_1}\circ\cdots\circ s_{H_r}$. f est ici la composée d'au plus $n-1$ réflexions de E.

IV.A.3) Supposons qu'il existe $x\in E$ tel que $q(x)\neq 0$ et $q(x-f(x))\neq 0$.

Nous avons $q(f(x))=q(x)$ et $q(f(x)-x)\neq 0$ donc d'après (III.A.2.d), la réflexion s_H où $H=\{f(x)-x\}^{\perp}$ vérifie $s_H(f(x))=x$.

Posons $g=s_H\circ f$. Alors $g\in O(E,q)$ et $g(x)=x$ avec $q(x)\neq 0$. Nous retrouvons les hypothèses du cas précédent. Il existe donc au plus $n-1$ réflexions $s_{H_1},s_{H_2},\cdots,s_{H_r}$ de E telle que $g=s_{H_1}\circ s_{H_2}\circ\cdots\circ s_{H_r}$.

Sachant que $s_H^2=id_E$, nous avons donc $f=s_H\circ s_{H_1}\circ s_{H_2}\circ\cdots\circ s_{H_r}$.

Alors f est la composée d'au plus n réflexions.

IV.A.4) Le cas restant : il n'existe aucun vecteur $x\in E$ tel que

$$q(x)\neq 0 \text{ et } (f(x)=x \text{ ou } q(x-f(x))\neq 0).$$

Autrement dit : $\forall x\in E,\ q(x)\neq 0\Longrightarrow f(x)-x\neq 0$ et $q(f(x)-x)=0$

Nous retrouvons ainsi les hypothèses de la question (III.B.3). Alors E est un espace de Artin et le sous-espace $U=\ker(f-id_E)=\mathrm{Im}(u-id_E)$ est de dimension $p=n/2$ et vérifie $q_{/U}=0$. De plus $n\geqslant 3$ donc en fait $n\geqslant 4$ et $p\geqslant 2$.

Soit (e_1,e_2) une famille libre de U. $U=\mathrm{Im}(f-id_E)$ donc il existe des vecteurs v_1 et v_2 dans E tel que $(f-id_E)(v_1)=e_1$ et $(f-id_E)(v_2)=e_2$.

(v_1,v_2) est une famille libre car sinon son image par $f-id_E$, ie (e_1,e_2) serait liée.

Soient $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ des scalaires tels que

$$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\beta_1v_1+\beta_2v_2=0$$

Puisque $e_1,e_2\in\ker(f-id_E)$ en appliquant $f-id_E$ à cette relation nous obtenons $\beta_1e_1+\beta_2e_2=0$ et donc $\beta_1=\beta_2=0$. Par suite nous avons aussi $\alpha_1=\alpha_2=0$.

La famille $v=(e_1,e_2,v_1,v_2)$ est libre. Considérons alors le sous-espace

$F = \text{Vect}(v)$. Nous avons

$$f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_2, f(v_1) = e_1 + v_1 \text{ et } f(v_2) = e_2 + v_2$$

donc F est stable par f. Soit f' l'endomorphisme induit par f sur F. La matrice de f' dans la base v de F est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui permet de rapidement voir que $\ker(f' - id_F) = \text{Im}(f' - id_F) = \text{Vect}\{e_1, e_2\}$. Notons U' ce sous-espace. $U' \subset U$ donc $q_{/U'} = 0$. Ce qui permet d'affirmer que

$$\forall x \in F,\ q(x) \neq 0 \Longrightarrow x \notin U' \Longrightarrow f'(x) - x \neq 0 \text{ et } q(x - f'(x)) = 0$$

À son tour f' vérifie les mêmes hypothèses que vérifiait l'isométrie f de E donc $(F, q_{/F})$ est un espace de Artin. $q_{/F}$ est non dégénérée donc F est non singulier et par suite $F \oplus F^\perp = E$.

Les vecteurs v_1 et v_2 ayant rempli leurs mission, oublions les et considérons plutôt deux vecteurs u_1 et u_2 tels que (e_1, e_2, u_1, u_2) soit une base "artinienne" de F, ie telle que

$$q(u_1) = q(u_2) = 0, \varphi(e_1, u_1) = \varphi(e_2, u_2) = 1 \text{ et } \text{Vect}\{e_1, u_1\} \perp \text{Vect}\{e_2, u_2\}$$

$f(u_1) - u_1$ et $f(u_2) - u_2$ sont des vecteurs de U' donc on peut écrire

$$\begin{cases} f(u_1) = u_1 + \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 \\ f(u_2) = u_2 + \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 \end{cases}$$

$\varphi(f(u_1), u_1) = q(u_1) = 0$ donne $\alpha_1 = 0$ et de même $\beta_2 = 0$.

$\varphi(f(u_1), f(u_2)) = \varphi(u_1, u_2) = 0$ donne $0 = \varphi(u_1 + \beta_1 e_2, u_2 + \alpha_2 e_1) = \alpha_2 + \beta_1$.

Notre écriture devient alors

$$\begin{cases} f(u_1) = u_1 + \alpha e_2 \\ f(u_2) = u_2 - \alpha e_1 \end{cases} \quad \text{où } \alpha \neq 0 \text{ car } u_1 \notin U'$$

Soit maintenant le sous-espace $G_1 = \text{Vect}\{e_2, u_2\}^\perp$ de E (noter qu'alors $e_1, u_1 \in G_1$) et posons $g = s_{G_1} \circ f$.

F est stable par f et par s_{G_1} donc stable par g et la matrice de l'isométrie g' induite par g sur F dans la base $u = (e_1, e_2, u_1, u_2)$ est

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

g' est la symétrie orthogonale de F d'axe $\text{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ et de direction $\text{Vect}\{\varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ (diagonaliser B pour le voir) avec

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 - \alpha e_2 + 2u_1 & \text{et} \quad \varepsilon_2 = e_1 + \alpha e_2 - 2u_1 \\ \varepsilon_3 = \alpha e_1 + e_2 + 2u_2 & \text{et} \quad \varepsilon_4 = \alpha e_1 - e_2 + 2u_2 \end{cases}$$

Les vecteurs ε_k sont choisis non isotropes et formant une base orthogonale de F.

Si nous posons $G_2 = \text{Vect}\{\varepsilon_3, \varepsilon_4\}^\perp$ alors $(s_{G_2} \circ g)_{/F} = id_F$.

Passons à $F^\perp$ maintenant. F est stable par g donc $F^\perp$ aussi.

Par hypothèse de récurrence l'isométrie g'' induite par g sur $F^\perp$ est la composée d'au plus $n - 4$ réflexions $s_{H'_1}, s_{H'_2}, \ldots, s_{H'_r}$ de $F^\perp$. Posons alors pour tout $k \in [1, r]$ $H_k = H'_k + F$. H'_k et F sont non singuliers et orthogonaux ($H'_k \subset F^\perp$), donc H_k est non singulier. C'est aussi un hyperplan de E, soit donc la reflexion s_{H_k} de E d'axe H_k. et posons $h = s_{H_1} \circ s_{H_2} \circ \cdots \circ s_{H_r}$. Nous avons alors

$$! \begin{cases} \forall x \in F^\perp,\ s_{G_2} \circ g(x) = g(x) = h(x) \\ \forall x \in F,\ s_{G_2} \circ g(x) = x = h(x) \end{cases}$$

car si $x \in F^\perp$, nous avons $F^\perp \subset G_2$ et $g(x) \in F^\perp$ donc $s_{G_2} \circ g(x) = g(x)$.

Et si $x \in F$, alors pour tout $k \in [1, r]$, $x \in H_k$ donc $s_{H_k}(x) = x$ et donc $h(x) = x$.

Ainsi $s_{G_2} \circ g = h$, soit $s_{G_2} \circ s_{G_1} \circ f = s_{H_1} \circ s_{H_2} \circ \cdots \circ s_{H_r}$, ou encore

$$f = s_{G_1} \circ s_{G_2} \circ s_{H_1} \circ s_{H_2} \circ \cdots \circ s_{H_r}$$

Il suffit ensuite de voir que les symétries s_{G_1} et s_{G_2} sont chacune la composée de deux réflexions (par exemple $s_{G_2} = s_{\{\varepsilon_1\}^\perp} \circ s_{\{\varepsilon_1\}^\perp}$) pour conclure que f est la composée d'au plus n réflexions.

Making Of : Il s'agissait d'imiter la démarche suivie dans les cas précédents, donc de trouver une symétrie orthogonale s_G telle que $H = \ker(s_G \circ f - id_E)$ soit non nul et d'appliquer l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme induit par $s_G \circ f$ sur $H^\perp$ (forcément stable par $s_G \circ f$).

En aucun cas S_G ne devrait être une réflexion car dans ce cas un vecteur non nul x de H, va vérifier $s_G \circ f(x) = x$ donc $f(x) = s_G(x)$ et donc $f(x) - x \in G^\perp$, mais $f(x) - x$ est isotrope et donc $G^\perp \subset G$. G est donc non singulier et ne peut donc être l'axe d'une réflexion.

Noter que de toute façon, on aurait toujours $f(x) - x \in G^\perp$ si $s_G \circ f(x) = x$, et donc $G^\perp$ doit contenir au moins une vecteur non nul de U.

On commence par essayer d'appréhender f quand $\dim E = 4$ (la dimension minimale que peut prendre E), on confectionne dans le cas général un sous-espace de E de dimension 4 stable par f et on injecte.

N.B : la réponse est trop longue, mais après plusieurs essais infructueux, c'est le mieux que j'ai pu faire. Je suis preneur pour toute idée alternative. Mon adresse eMail se trouve dans les métadonnées du fichier PDF (menu fichier –¿ propriétés dans Adobe Reader$^{\text{TM}}$) ou au début du fichier source LaTeX.
Le corrigé est inachevé.

en**Fin.**presque