CLASSE DE DEUXIÈME ANNÉE MP

OBJECTIFS DE FORMATION ET PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

I OBJECTIFS DE FORMATION

1) Objectifs généraux de la formation

Dans la filière Mathématiques et Physique, les mathématiques constituent conjointement une discipline scientifique à part entière, développant des concepts, des résultats, des méthodes et une démarche spécifiques, et une discipline fournissant des connaissances et des méthodes nécessaires à la physique, à l'informatique, à la chimie et aux sciences industrielles.

La réflexion sur les concepts et les méthodes, la pratique du raisonnement et de la démarche mathématique constituent un objectif majeur. Les étudiants doivent connaître les définitions, les énoncés et les démonstrations des théorèmes figurant au programme, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, et savoir mobiliser leurs connaissances pour l'étude de problèmes. En revanche, certains résultats puissants, mais dont la démonstration est hors de portée au niveau des classes préparatoires, sont admis.

a) *Objectifs de la formation*

La formation est conçue en fonction de quatre objectifs essentiels.
- Développer conjointement l'intuition, l'imagination, le raisonnement et la rigueur.
- Promouvoir la réflexion personnelle des étudiants sur les problèmes et les phénomènes mathématiques, sur la portée des concepts, des hypothèses, des résultats et des méthodes, au moyen d'exemples et de contre-exemples ; développer ainsi une attitude de questionnement et de recherche.
- Exploiter toute la richesse de la démarche mathématique : analyser un problème, expérimenter sur des exemples, formuler une conjecture, élaborer et mettre en œuvre des concepts et des résultats théoriques, rédiger une solution rigoureuse, contrôler les résultats obtenus et évaluer la pertinence des concepts et des résultats au regard du problème posé, sont des éléments indissociables de cette démarche ; valoriser ainsi l'interaction entre d'une part l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques, et d'autre part l'élaboration et la mise en œuvre des concepts théoriques, les phases d'abstraction et de mise en théorie interagissant donc constamment avec celles de passage aux exemples et aux applications.
- Privilégier les problèmes mathématiques susceptibles de développer la réflexion personnelle des étudiants et les capacités de synthèse. En particulier, on ne saurait en aucun cas se limiter à l'étude de problèmes dont les énoncés sont fermés et d'exercices mettant en œuvre des techniques bien répertoriées. Il est nécessaire d'entraîner les étudiants à se poser eux–mêmes des questions, c'est–à–dire à prendre en compte une problématique mathématique ; l'effort de synthèse doit constituer l'aboutissement de cette démarche. Les travaux d'initiative personnelle encadrés (TIPE) permettent de renforcer cette attitude, essentielle pour la formation scientifique, laquelle est par nature d'abord un questionnement.

b) *Unité de la formation scientifique*

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme d'une même discipline, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. Plus largement, l'enseignement d'une discipline scientifique est à relier à celui des autres disciplines sous deux aspects principaux : organisation concertée des activités d'enseignement d'une même classe ; étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les champs de connaissances (mathématiques et physique, mathématiques et informatique, mathématiques et sciences industrielles. . .).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, y contribue de façon efficace, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés.

Il importe aussi que le contenu culturel des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, les textes et les références historiques permettent d'analyser l'interaction entre les problèmes mathématiques et la construction des concepts, mettent en évidence le rôle central joué par le questionnement scientifique pour le développement théorique et montrent en outre que les sciences, et les mathématiques en particulier, sont en perpétuelle évolution et que le dogmatisme n'est pas la référence en la matière.

2) Architecture et contenus des programmes

a) *Intentions majeures*

Les contenus sont organisés autour de trois intentions majeures.

- Organiser les programmes autour de quelques notions essentielles, en dégageant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle.

- Donner un rôle très important à la résolution de problèmes et d'exercices d'application, en particulier en mettant en œuvre l'outil informatique. Le but est d'indiquer le champ des problèmes et phénomènes mathématiques à étudier en relation avec les concepts figurant au programme et de préciser les méthodes et les techniques usuelles exigibles des étudiants. En revanche, ces études de problèmes et d'exercices ne doivent pas conduire à des dépassements de programme prenant la forme d'une anthologie d'exemples dont la connaissance serait exigible des étudiants.

- Réaliser un équilibre global entre l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Il va de soi, d'ailleurs, que cette séparation traditionnelle n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre ces trois grands domaines des mathématiques. Dans cette intention, les programmes sont présentés selon deux grandes parties : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie, mais le plan du programme n'est pas un plan de cours.

C'est en fonction des objectifs précédents que les programmes sont conçus et que l'horaire hebdomadaire doit être géré. Dans les classes MPSI et MP, il est de 12 heures (10 heures de cours et 2 heures de travaux dirigés). Pour valoriser les concepts essentiels et les principales méthodes (comprenant les exemples et contre-exemples qui illustrent leur portée et leurs conditions de validité), il convient de consacrer à leur étude environ au plus 8 heures de cours. Le temps restant est à consacrer à l'étude de problèmes mathématiques de difficulté variée ; à cet égard, toute technicité gratuite est à éviter.

b) *Secteur de l'analyse et de ses interventions*

Dans ce secteur, le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de fonction, qui permet de modéliser le comportement des phénomènes continus, et de suite (ou de série), qui permet de modéliser le comportement des phénomènes discrets. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur, notamment en seconde année.
Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle des problèmes quantitatifs ; il développe conjointement l'étude du comportement global des suites et des fonctions avec celle de leur comportement local ou asymptotique. Pour l'étude des solutions des équations, il combine les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact, les méthodes d'approximation et les algorithmes de mise en œuvre. Pour l'ensemble de l'analyse, il met l'accent sur les techniques de majoration.
En première année, la maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle plane constitue un objectif essentiel.
En seconde année, le programme introduit le concept d'espace vectoriel normé et d'application linéaire continue, afin de fournir un cadre cohérent pour l'étude des suites, des séries et des fonctions et celle des suites et des séries de fonctions. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'approximation des fonctions, l'étude des équations différentielles (notamment des systèmes linéaires), l'étude des fonctions de plusieurs variables (en interaction étroite avec la géométrie différentielle) tiennent une place majeure.

c) *Secteur de l'algèbre et de ses interventions*

Dans ce secteur, le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (points de vue géométrique et matriciel), tandis que l'étude systématique des anneaux et des corps en a été écartée. Il met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie. Il met en valeur l'importance du concept de groupe pour les méthodes de la géométrie.
En première année, le programme d'algèbre et géométrie combine l'étude de l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, applications linéaires, algèbres, dimension, rang, calcul matriciel, espaces vectoriels euclidiens, automorphismes orthogonaux) et de ses interventions en algèbre, en analyse et en géométrie affine et euclidienne ; il comporte en outre l'étude de l'arithmétique élémentaire et des polynômes à une indéterminée.
En seconde année, le programme développe de nouveaux concepts (dualité, polynômes d'endomorphismes, valeurs propres et sous-espaces propres, réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel et des

endomorphismes symétriques d'un espace vectoriel euclidien, réduction des matrices). Il comporte en outre quelques compléments d'algèbre générale (arithmétique, polynômes).

d) *Secteur de la géométrie et de ses interventions*

Une vision géométrique des problèmes imprégne l'ensemble du programme de mathématiques car les méthodes de la géométrie et les apports de son langage (figures, représentations graphiques, interprétations géométriques...) jouent un rôle capital en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'intervention.

e) *Articulation avec la physique, la chimie et les sciences industrielles*

En relation étroite avec les concepts propres à la physique, à la chimie et aux sciences industrielles, le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire et de la géométrie en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques (mouvement, vitesse et accélération, trajectoires et lignes de niveau, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques...). Ces interprétations, avec les interprétations graphiques et géométriques, viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse et de l'algèbre linéaire.

3) Conception et organisation de la formation

a) *Organisation du travail de la classe*

Il convient de centrer l'enseignement autour de l'étude de phénomènes et de problèmes mathématiques. En particulier, il est essentiel que l'approfondissement théorique ne soit coupé ni des problématiques qui le sous–tendent, ni des secteurs d'intervention qui le mettent en jeu. Deux objectifs essentiels sont à poursuivre :
- Promouvoir l'acquisition de méthodes et entraîner les étudiants à exploiter toute la richesse de la démarche mathématique ; la classe est donc un lieu de découverte et d'exploitation de problématiques, un lieu d'analyse des phénomènes et des concepts, un lieu de réflexion et de débats sur l'architecture des contenus, les démarches suivies, les hypothèses d'un théorème, la portée des concepts mis en jeu et des résultats obtenus. Elle est aussi un lieu d'élaboration de synthèses ayant pour triple objectif de dégager clairement les idées et méthodes essentielles, de préciser leur portée pour la résolution de problèmes et, inversement, d'identifier les principales méthodes dont on dispose pour étudier un type donné de problème. Dans cette perspective, les enseignements combinent la formulation et l'analyse de problèmes, l'élaboration de concepts, la présentation, la démonstration et la mise en œuvre de résultats, ainsi que la mise en valeur de méthodes.
- Développer les capacités de communication. La pertinence des indications écrites et orales données par le professeur et la qualité de structuration des échanges jouent ici un rôle essentiel : qualités d'écoute et d'expression orale (formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée...), qualités de lecture et d'expression écrite (maîtrise du tableau, prise de notes, analyse d'un énoncé, mise au point de la rédaction d'un énoncé ou d'un raisonnement...). La communication utilise des moyens diversifiés : non seulement le tableau, dont la maîtrise est un élément important, mais aussi le rétroprojecteur, l'ordinateur connecté à un videoprojecteur.

b) *Organisation du travail personnel des étudiants*

Les travaux effectués en dehors du temps d'enseignement, à la maison ou au lycée, ont une importance capitale ; leurs fonctions sont diversifiées :
- L'étude du cours joue un rôle central. Son objectif est triple ; connaître les concepts et les résultats essentiels, acquérir la maîtrise des méthodes d'étude des problèmes, savoir analyser la portée des hypothèses et des résultats, les démarches et les techniques de raisonnement mises en jeu dans les démonstrations. L'étude du cours est donc indissociable de celle des problèmes.
- La résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude du cours, a pour fonction d'affermir les connaissances de base des étudiants et d'évaluer leur capacité à les mettre en œuvre sur des exemples simples. La résolution de tels exercices n'est donc pas un objectif en soi, et tout excès de technicité doit être évité. La maîtrise de ce type de questions est une exigence valable pour l'ensemble des étudiants.
- L'étude de questions plus complexes, sous forme de préparation d'activités en classe ou de problèmes à résoudre et à rédiger, alimente le travail de recherche, individuel ou en équipe, et permet aux étudiants d'évaluer leur capacité à mobiliser leurs connaissances de façon coordonnée. Au sein d'une même classe, les thèmes d'étude peuvent être diversifiés en fonction du projet de formation des étudiants.
- Les travaux individuels de rédaction en temps libre (solution d'un problème, mise au point d'exercices étudiés en classe, rapport de synthèse sur un thème d'étude, analyse critique d'un texte...) visent essentiellement à développer les capacités d'expression écrite et de mise au point d'un raisonnement. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. Ces travaux de rédaction doivent donc être fréquents, mais leur longueur doit rester raisonnable. Leur contenu peut être diversifié en fonction du projet de formation des étudiants.

- La recherche et l'exploitation (individuelle ou en équipe) de documents scientifiques contribue au développement des capacités d'autonomie. Elle permet aussi de développer l'ouverture d'esprit, grâce à la prise de connaissance de points de vue diversifiés sur une même question, et les capacités d'analyse et de synthèse, grâce à une étude comparée de ces points de vue. Elle permet enfin aux étudiants d'approfondir leurs connaissances en complément des travaux menés en classe ou en fonction de leurs centres d'intérêt et de leur projet de formation.
- La préparation et la mise en œuvre d'exposés vise à développer les capacités d'organisation de la pensée et les qualités d'expression orale.

c) *Les épreuves écrites en temps limité*

– En première année, ces épreuves doivent être de taille raisonnable et de difficulté progressive, afin de ne pas décourager les étudiants et de leur permettre de rédiger clairement une solution ;

– en seconde année, leur longueur doit être augmentée, pour permettre un préparation efficace aux épreuves écrites des concours.

Les connaissances exigibles dans ces épreuves ne doivent en aucun cas dépasser celles qui figurent au programme ; si d'autres connaissances sont à mettre en œuvre, toutes les indications utiles doivent être fournies aux étudiants. Quand il s'agit d'épreuves de concours de longueur importante, le barème doit en tenir compte.

d) *Évaluation et notation des étudiants*

La communication des objectifs à atteindre et la mise en œuvre de formes diversifiées d'évaluation peuvent aider de manière efficace les étudiants à progresser, à se situer et à affiner un choix d'orientation.
La pertinence du calibrage de la notation constitue un objectif important ; ce calibrage doit être établi en relation avec les performances attendues des étudiants des classes de première année en début de seconde année ou celles attendues des étudiants de seconde année dans les épreuves de concours. Il convient d'éviter tant la surnotation, génératrice d'illusion, que la sousnotation, génératrice de découragement.

e) *Interprétation et délimitation des programmes*

Pour chacune des classes, les connaissances et les capacités exigibles des étudiants sont indiquées avec précision, de façon à combattre l'inflation théorique autant que l'excès de technicité. Il importe de souligner la nécessité impérieuse de respecter les limites du programme, tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation. Un encyclopédisme relayé par la pratique du bachotage irait totalement à l'encontre du but recherché, qui tend à privilégier une formation de l'esprit scientifique fondée sur l'approfondissement d'un noyau limité de connaissances fondamentales. Il importe que cet état d'esprit trouve sa traduction dans les sujets des épreuves d'évaluation.

II PROGRAMME DES CLASSES MP ET MP*

AVERTISSEMENT

1) Organisation du texte des programmes

Ce texte est organisé en deux titres : analyse et géométrie différentielle, algèbre et géométrie. Chacun de ces titres comporte des parties (numérotées I, II, ...), elles-mêmes subdivisées en chapitres (numérotés 1, 2, ...), puis en paragraphes (repérés a, b, ...). Chacune des parties comporte :
- En tête de partie ou de chapitre, un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre général d'étude des notions relatives à cette partie ou à ce chapitre.
- Pour chaque paragraphe, un texte présenté en deux colonnes ; à gauche sont fixées les connaissances et les méthodes figurant au programme, à droite un commentaire indique les exemples fondamentaux à connaître et les méthodes à maîtriser, précise le sens ou les limites à donner à certaines questions, et repère le cas échéant l'interaction du sujet étudié avec d'autres parties du programme.

2) Connaissances et capacités exigibles des étudiants

Le programme de mathématiques de la filière Mathématiques et Physique comporte conjointement celui des classes de seconde année MP et MP*, fixé par le présent texte, et celui de la classe de première année MPSI.

Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, exemples, contre-exemples, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mise en œuvre de ces connaissances, le texte du programme délimite de manière précise trois catégories.

a) *Celles qui sont exigibles des étudiants :* il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents paragraphes, des points qui sont repérés comme tels dans la colonne de droite ou dans les bandeaux. Les démonstrations des résultats concernés sont exigibles des étudiants, sauf mention expresse du contraire. Enfin, aucun développement ne doit être donné aux notions figurant au programme lorsqu'elles sont uniquement repérées par la locution «définition de ...» ; seule cette définition est alors exigible des étudiants.

b) *Celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants :* il s'agit de tous les travaux dont l'énoncé commence par la locution «Exemples de ...» et des points repérés dans les bandeaux ou dans la colonne de droite par la locution «aucune connaissance spécifique sur ... n'est exigible des étudiants». Lorsqu'une épreuve d'évaluation fait intervenir de telles connaissances ou de telles capacités, toutes les indications utiles doivent être fournies aux étudiants.
En ce qui concerne les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérés dans la colonne de droite par la locution «la démonstration n'est pas exigible des étudiants», le professeur peut, suivant les cas, démontrer en détail le résultat considéré, indiquer l'idée de sa démonstration ou l'admettre.

c) *Celles qui sont indiquées comme étant «hors programme»* dans les bandeaux ou dans la colonne de droite. Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation.
En particulier, la locution «la démonstration est hors programme» signifie qu'il est demandé d'admettre le résultat ; aucune épreuve d'évaluation ne peut comporter une telle démonstration.
Enfin, lorsqu'une question est repérée dans les bandeaux par la locution «En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient ... mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants», aucune épreuve d'évaluation en mathématiques ne peut porter sur cette question.

3) Différentiation de l'enseignement entre les classes MP et MP*

Le programme de deuxième année est commun aux classes MP et MP*. En revanche, le niveau d'approfondissement peut varier en tenant compte des objectifs de formation des élèves.

ACTIVITÉS ALGORITHMIQUES ET INFORMATIQUE

1- Intégration de l'outil informatique

a) La démarche algorithmique

En relation avec le programme d'informatique, l'ensemble du programme de mathématiques valorise la démarche algorithmique ; il intègre la construction et la mise en forme d'algorithmes. Les algorithmes associés aux notions étudiées dans le programme de mathématiques en font partie. En revanche, en mathématiques, aucune connaissance sur la théorie des algorithmes, aucun résultat général sur leurs performances n'est exigible des étudiants.

b) Le calcul symbolique et formel. Emploi des calculatrices.

Les étudiants doivent être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution de problèmes, la formulation de conjectures, ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel évite des calculs fastidieux, et permet l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. Ils doivent pareillement savoir utiliser une calculatrice possédant des fonctionnalités de calcul formel.

Ils doivent également savoir utiliser une calculatrice programmable, dans les situations liées au programme de mathématiques. Cette utilisation permet notamment la mise en œuvre d'une partie des algorithmes du programme, à l'occasion des travaux pratiques de mathématiques.

Ils doivent savoir programmer une instruction séquentielle, une instruction conditionnelle et une instruction itérative comportant éventuellement un test d'arrêt.

2- Propositions d'activités algorithmiques

À titre d'illustration (les seules compétences exigibles des étudiants sont celles ci-dessus décrites) le professeur pourra aborder certains des exemples indiqués ci-dessous. Il s'agit d'exemples, qui ne constituent en aucun cas une extension du programme.

a) Algèbre générale, Arithmétique

Algorithme d'exponentiation rapide.
Algorithme d'Euclide.

b) Algèbre linéaire

Résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.	Lissage par moindres carrés. Résolution de systèmes linéaires sur-déterminés. Calcul du déterminant d'une matrice par factorisation LU. Inversion d'une matrice.
Résolution de systèmes linéaires tri-diagonaux.	Détermination d'une fonction spline cubique. Résolution approchée de certaines équations aux dérivées partielles.
Détermination des éléments propres d'une matrice symétrique.	Méthode de Jacobi. Méthodes de tri-diagonalisation de Givens et de Lanczos-Householder.
Détermination d'éléments propres pour des matrices de grande dimension. Méthode de la puissance itérée.	Détermination des fréquences et modes de vibration d'une structure.

c) Analyse

Approximation du point fixe d'une application scalaire par itération.	Résolution d'équations numériques. Méthode de Newton.
Approximation du point fixe d'une application vectorielle par itération.	Résolution de systèmes d'équations numériques. Méthode de Newton.
Résolution approchée d'équations différentielles et de systèmes d'équations différentielles du premier ordre.	Cas de l'oscillateur amorti.

3- Propositions d'utilisation du logiciel de calcul formel

En plus des points énumérés aux a) et b) ci-dessus, le logiciel de calcul formel pourra être utilisé en analyse, en particulier dans les domaines suivants :

Représentation des surfaces.	Lignes de niveau.
Étude d'équations différentielles.	Tracé des courbes intégrales.
Approximation des fonctions.	Séries de Fourier.

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes, projecteurs ; bases, dimension et rang ; formes linéaires, formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques ; valeurs propres et sous-espaces propres d'un endomorphisme. Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie. Il comporte en outre quelques compléments d'algèbre et d'arithmétique : groupes cycliques, idéaux de l'anneau $\mathbf{Z}$*, anneau* $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$*, idéaux de l'anneau* $K[X]$*.*

La maîtrise de l'algèbre linéaire en dimension finie et, notamment, de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel, constitue un objectif essentiel. Le programme combine, de façon indissociable, l'étude des concepts de l'algèbre linéaire avec celle des problèmes linéaires (indépendance linéaire, équations linéaires, réduction des endomorphismes et des matrices, approximation des fonctions, propriétés affines et métriques des configurations et des transformations géométriques...).

Le programme d'algèbre et géométrie comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (issus de l'arithmétique ou de l'algèbre linéaire) ainsi que l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel.

I. ALGÈBRE GÉNÉRALE

1- Groupes

a) Groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

Structure des sous-groupes de $\mathbf{Z}$.

Relation de congruence modulo un entier $n > 0$, notation $a \equiv b$ modulo n. Compatibilité avec l'addition ; groupe quotient $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, morphisme canonique de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Générateurs du groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Tout autre exemple de groupe quotient est hors programme.

Étant donné un élément a d'un groupe G, morphisme $k \mapsto ka$ (ou $k \mapsto a^k$) du groupe $\mathbf{Z}$ dans G ; noyau et image d'un tel morphisme. Le sous-groupe de G engendré par a est isomorphe à $\mathbf{Z}$ si ce noyau est réduit à $\{0\}$; il est isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si ce noyau est $n\mathbf{Z}$.

Définition d'un groupe cyclique G (groupe fini admettant un générateur a) ; isomorphisme de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sur G, où n est l'ordre de G. Application au groupe $\mathbf{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité.

b) Groupes

Il s'agit d'introduire quelques notions de base sur les groupes et de les mettre en œuvre sur les groupes figurant au programme (groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$*, groupe linéaire, groupe orthogonal et leurs sous-groupes), en relation étroite avec l'algèbre linéaire et la géométrie. Il convient notamment d'étudier des exemples simples de réalisations géométriques de groupes finis par des groupes d'isométries.*

Définition du produit de deux groupes.
Définition d'une partie génératrice d'un groupe.

L'étude générale des groupes, ainsi que celle des groupes finis, est hors programme.
On donnera des exemples de parties génératrices issus de l'algèbre et de la géométrie.

2- Anneaux et corps

Les notions d'anneau quotient et d'anneau principal sont hors programme.

a) Idéaux d'un anneau commutatif

Définition d'un morphisme d'anneaux, d'un isomorphisme.

Noyau et image d'un morphisme d'anneaux commutatifs.
Définition d'un idéal d'un anneau commutatif A.

Définition de l'idéal Ax (ou xA) engendré par un élément x de A.

Dans un anneau intègre A, définition de la relation de divisibilité $x|y$.

Pour que x divise y, il faut et il suffit que $Ay \subset Ax$.

b) Idéaux de $\mathbf{Z}$, anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$

Structure des idéaux de $\mathbf{Z}$. Application au théorème de Bézout et au théorème de Gauss.

Caractérisation du PGCD et du PPCM de deux entiers.

Dans l'anneau $\mathbf{Z}$, compatibilité de la relation de congruence modulo n avec la multiplication ; anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, morphisme canonique de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Caractérisation des éléments inversibles de l'anneau $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
Indicatrice d'Euler.

L'anneau $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps si et seulement si p est un nombre premier.
On pourra donner des exemples d'applications à la cryptographie.

Factorisation du morphisme de l'anneau $\mathbf{Z}$ dans un anneau A, de noyau $n\mathbf{Z}$.

Définition de la caractéristique d'un corps.

c) Idéaux de $K[X]$

Dans ce paragraphe, on suppose que le corps de base K est un sous-corps de $\mathbf{C}$.
Les anneaux quotients de l'anneau $K[X]$ sont hors programme.

Structure des idéaux de $K[X]$. Application au théorème de Bézout et au théorème de Gauss.

Caractérisation du PGCD et du PPCM de deux polynômes.

II. ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE AFFINE

Le programme est organisé autour de quatre objectifs.
- Consolider les acquis de la classe de première année : étude des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs, algèbres) ; étude des concepts fondamentaux relatifs aux espaces vectoriels de dimension finie (bases, dimension, rang, déterminants, calcul matriciel) et à la géométrie affine réelle (sous-espaces affines, barycentres, applications affines).
- Étudier de nouveaux concepts : somme directe de sous-espaces vectoriels, dualité, trace d'un endomorphisme, équivalence des matrices, formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques.
- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes linéaires issus de l'algèbre (étude des systèmes linéaires, des polynômes, des algèbres ; interpolation, équations aux différences finies) et de l'analyse (récurrences linéaires et équations différentielles linéaires, en relation avec l'étude des systèmes dynamiques linéaires).
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires, points et applications affines) et le point de vue matriciel.
Il convient d'étudier conjointement l'algèbre linéaire et la géométrie affine et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

Espaces vectoriels, applications linéaires

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont définis sur un corps K de caractéristique 0. On ne soulèvera pas de difficulté sur l'extension à ces espaces vectoriels des résultats vus en première année.
En MP*, on pourra donner des exemples de situations où le corps est de caractéristique non nulle.

a) Bases, sommes directes

Définition d'une combinaison linéaire de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel E indexés par un ensemble I.
Définition d'une famille libre, d'une famille liée, d'une famille génératrice, d'une base de E ; coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base.

Il s'agit d'une brève extension des notions limitées en première année au cas d'un ensemble I fini. Tout théorème général d'existence de bases et de sous-espaces supplémentaires en dimension quelconque est hors programme.

Base canonique de l'espace vectoriel $K[X]$.
Définition d'une application bilinéaire. Notion d'algèbre.
Algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$; base canonique de cette algèbre.

Étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $(e_i)_{i\in I}$ et une famille $(f_i)_{i\in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel F, il existe une application linéaire u de E dans F et une seule telle que $u(e_i) = f_i$.

La donnée d'une famille de p vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'un K-espace vectoriel E détermine une application linéaire u de K^p dans E ; noyau et image de cette application ; caractérisation de la bijectivité, de l'injectivité et de la surjectivité de u.

Somme directe de sous-espaces vectoriels : définition de la somme $\sum E_i$ d'une famille finie $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E ; définition d'une somme directe $\oplus E_i$ d'une telle famille. Cas des sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Dans l'espace vectoriel $K[X]$, le sous-espace vectoriel $K[X]\,P$ constitué des multiples d'un polynôme P de degré $n+1$ admet pour supplémentaire le sous-espace vectoriel $K_n[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Lorsque E est de dimension finie et que la somme $\sum E_i$ est directe,

$$\dim \bigoplus_i E_i = \sum_i \dim E_i.$$

Alors, pour que $E = \oplus E_i$, il faut et il suffit que

$$\dim E = \sum_i \dim E_i.$$

Lorsque $E = \oplus E_i$ alors, pour toute famille u_i d'appplications linéaires de E_i dans un espace vectoriel F, il existe une application linéaire u de E dans F et une seule telle que, pour tout i, u_i soit la restriction de u à E_i.

Famille (p_i) de projecteurs de E associée à une décomposition $E = \oplus E_i$; relations $p_i^2 = p_i$, $p_i p_j = 0$ si $j \neq i$ et $\mathrm{I}_E = \sum p_i$.

Définition d'une base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel F de E, à une décomposition en somme directe $E = \oplus E_i$.

b) Image et noyau d'une application linéaire

Une application linéaire u de E dans F définit un isomorphisme de tout supplémentaire E' de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$.

Application à l'interpolation de Lagrange : détermination des polynômes P prenant des valeurs données sur une famille $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ d'éléments de K distincts deux à deux.

Étant donnés un sous-espace vectoriel E' de E et deux sous-espaces supplémentaires F_1 et F_2 de E' dans E, le projecteur de E sur F_1 parallèlement à E' définit un isomorphisme de F_2 sur F_1.

Définition d'un sous-espace vectoriel E' de codimension finie dans E, d'un hyperplan. Lorsque E est de dimension finie,

$$\dim E' + \operatorname{codim} E' = \dim E.$$

Lorsque F est de dimension finie, définition du rang d'une application linéaire u de E dans F. Alors $\operatorname{Ker} u$ est de codimension finie dans E et

$$\operatorname{rg}(u) = \dim \operatorname{Im} u = \operatorname{codim} \operatorname{Ker} u.$$

Lorsque E est de dimension finie, relation

$$\dim \operatorname{Im} u + \dim \operatorname{Ker} u = \dim E;$$

caractérisation des isomorphismes à l'aide du rang. Invariance du rang par composition avec un isomorphisme.

Définition de l'espace dual E^* d'un espace vectoriel E.

Étant donnée une forme linéaire φ sur E non nulle, le sous-espace vectoriel $H = \operatorname{Ker} \varphi$ est un hyperplan de E ; toute forme linéaire ψ nulle sur H est colinéaire à φ.

Équations d'un hyperplan.

c) Dualité en dimension finie

Les espaces vectoriels considérés dans ce paragraphe sont de dimension finie. La notion d'espace bidual est hors programme.

Étant donné un vecteur e non nul d'un espace vectoriel E de dimension finie n, il existe une forme linéaire φ sur E telle que $\varphi(e) = 1$.

Le vecteur nul est le seul vecteur de E sur lequel toute forme linéaire s'annule.

Formes linéaires coordonnées $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ associées à une base $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E. Les formes linéaires coordonnées constituent une base B^* de E^*, appelée base duale de B. La dimension de E^* est égale à n.

Dans ces conditions, B et B^* vérifient les relations d'orthogonalité de Kronecker

$$\varphi_i(e_j) = \delta_i^j$$

où $\delta_i^j = 1$ si $j = i$ et $\delta_i^j = 0$ sinon.

Étant donnée une base L de E^*, existence d'une base B de E (base anté-duale) telle que $L = B^*$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension p, l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur F est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension $n - p$.

Si $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q)$ est une famille libre de formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension n, l'intersection des noyaux respectifs H_i des formes linéaires φ_i est un sous-espace vectoriel F de E de dimension $n - q$. Toute forme linéaire s'annulant sur F est combinaison linéaire de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$.

d) Trace d'un endomorphisme

Trace d'une matrice carrée ; linéarité de la trace, relations $\operatorname{Tr} AB = \operatorname{Tr} BA$, $\operatorname{Tr} PMP^{-1} = \operatorname{Tr} M$. Trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.

e) Calcul matriciel et systèmes d'équations linéaires

Définition des matrices équivalentes ; caractérisation de l'équivalence des matrices à l'aide du rang.

Toute matrice M de rang r est équivalente à la matrice $J_r = (\alpha_{i,j})$, où $\alpha_{j,j} = 1$ si $1 \leqslant j \leqslant r$, et $\alpha_{i,j} = 0$ sinon.

Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice ; interprétation en termes de produits matriciels. Application à la recherche du rang d'une matrice, à la résolution des systèmes linéaires, à la recherche de l'inverse d'une matrice carrée, au calcul des déterminants.

Application de la dualité à l'étude d'un système d'équations linéaires $\varphi_i(x) = b_i$.

Interprétation géométrique.

III. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :
- Étudier les polynômes d'un endomorphisme u et les sous-espaces stables par u.
- Étudier les valeurs propres et les sous-espaces propres d'un endomorphisme, en dimension finie ou non.
- Étudier les endomorphismes diagonalisables et les endomorphismes trigonalisables, en dimension finie.
- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

En outre, le programme associe étroitement le point de vue géométrique et le point de vue matriciel.

Dans cette partie, le corps de base $\mathbf{K}$ *est* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

1- Sous-espaces stables, polynômes d'un endomorphisme

a) Sous-espaces stables

Définition d'un sous-espace vectoriel F stable par un endomorphisme u d'un espace vectoriel E. Endomorphisme de F induit par u.

Si les endomorphismes u et v commutent, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont stables par v.

Si E est de dimension finie, caractérisation des endomorphismes de E stabilisant un sous-espace vectoriel F par leur matrice dans une base de E adaptée à F.

Déterminant d'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$.

Étant donné un espace vectoriel E de dimension finie et une famille $(E_1, E_2, \ldots, E_p)$ de sous-espaces vectoriels dont E est somme directe, caractérisation des endomorphismes stabilisant les sous-espaces E_j par leur matrice dans une base de E adaptée à cette décomposition. Déterminant d'un tel endomorphisme, d'une matrice diagonale par blocs.

Étant donnée une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, caractérisation géométrique des endomorphismes dont la matrice dans cette base est diagonale.

Étant donnée une base d'un espace vectoriel E de dimension finie, caractérisation géométrique des endomorphismes dont la matrice dans cette base est triangulaire supérieure.

b) Polynômes d'un endomorphisme

La donnée d'un endomorphisme u de E définit un morphisme $P \mapsto P(u)$ de l'algèbre $\mathbf{K}[X]$ dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$. Noyau et image de ce morphisme. Idéal des polynômes annulateurs de u. En dimension finie, existence du polynôme minimal de u.

Pour tout élément P de $\mathbf{K}[X]$, $\operatorname{Im} P(u)$ et $\operatorname{Ker} P(u)$ sont stables par u.

Théorème de décomposition des noyaux : si P et Q sont premiers entre eux, $\operatorname{Ker} PQ(u) = \operatorname{Ker} P(u) \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$.

Extension au cas d'une famille finie de polynômes premiers entre eux deux à deux.

2- Réduction d'un endomorphisme

a) Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Droites stables par un endomorphisme u d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Définition des valeurs propres, des vecteurs propres (le vecteur 0 n'est pas un vecteur propre), des sous-espaces propres $E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}\left(u - \lambda \mathrm{I}_E\right)$ d'un endomorphisme u de E.
Si les endomorphismes u et v commutent, les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ sont stables par v.

La notion de valeur spectrale est hors programme.
En dimension finie, λ est une valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \mathrm{I}_E$ n'est pas inversible ; l'ensemble des valeurs propres de u est alors appelé spectre de u et noté Sp (u).

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est directe.

Étant donnés un endomorphisme u de E et un élément P de $\mathbf{K}[X]$, pour toute valeur propre λ de u, $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$. Si $P(u) = 0$, alors toute valeur propre de u est un zéro du polynôme P.

Éléments propres des homothéties, des projecteurs, des affinités, des symétries.

Valeurs propres et sous-espaces propres de l'endomorphisme induit par u sur un sous-espace vectoriel stable.

En dimension finie, automorphisme $u \mapsto aua^{-1}$ de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ défini par un élément a du groupe linéaire GL(E).

Relation entre les valeurs propres (les sous-espaces propres) de u et de aua^{-1}.

b) Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée

Définition des valeurs propres, des sous-espaces propres, des vecteurs propres et du spectre d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
Un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ peut être considéré comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$; le spectre de M dans $\mathbf{R}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbf{C}$.

Les éléments propres de M sont définis comme étant ceux de l'endomorphisme u de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à M.

Automorphisme $M \mapsto PMP^{-1}$ de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Définition des matrices semblables ; interprétation géométrique.

Spectre de deux matrices semblables.

c) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie. Ordre de multiplicité d'une valeur propre.

Lorsque ce polynôme est scindé, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres.

Polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par u sur un sous-espace vectoriel stable par u.
Lien entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.

Cas où u stabilise une famille $(E_1, E_2, \ldots, E_p)$ de sous-espaces vectoriels dont E est somme directe.

Théorème de Cayley-Hamilton.

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants.

d) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Définition d'un endomorphisme u diagonalisable : l'espace vectoriel E est somme (directe) des sous-espaces propres $E_\lambda(u)$. Projecteurs p_λ associés ; relation $u = \sum_\lambda \lambda p_\lambda$.

Inversement, si E est somme directe de sous-espaces vectoriels stables E_j sur lesquels u induit une homothétie, alors u est diagonalisable.

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base formée de vecteurs propres de u, ou encore s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Pour qu'un endomorphisme u de E soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de u soit égale à $\dim E$.

Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Pour qu'un endomorphisme u de E soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé dont toutes les racines sont simples.

Si u est diagonalisable, pour tout sous-espace vectoriel F de E stable par u, l'endomorphisme de F induit par u l'est aussi.

Pour qu'un endomorphisme u de E soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.

Définition d'un endomorphisme u trigonalisable : il existe une base telle que la matrice associée à u dans cette base soit triangulaire supérieure.

Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable.

Pour qu'un endomorphisme u de E soit trigonalisable, il faut et il suffit qu'il annule un polynôme scindé.

Aucune connaissance spécifique sur la notion de sous-espace caractéristique n'est exigible des étudiants. La réduction de Jordan est hors programme.

Définition d'une matrice carrée M diagonalisable, trigonalisable. Pour que M soit diagonalisable (resp. trigonalisable), il faut et il suffit que M soit semblable à une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure).

Lorsque M est diagonalisable, M s'écrit sous la forme PDP^{-1}, où D est diagonale et où P désigne la matrice de passage de la base canonique de K^n à une base de vecteurs propres de M. Cas des matrices trigonalisables.

IV. ESPACES EUCLIDIENS, GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE, ESPACES HERMITIENS

Cette partie est organisée autour de cinq objectifs :
- Consolider les acquis de la classe de première année sur le produit scalaire, les espaces vectoriels euclidiens et la géométrie euclidienne du plan et de l'espace.
- Introduire les concepts de forme bilinéaire symétrique et de forme quadratique.
- Étudier de nouveaux concepts : somme directe orthogonale de sous-espaces vectoriels ; dans un espace euclidien, adjoint d'un endomorphisme, réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques, réduction d'une forme quadratique dans une base orthonormale ; notions sur les espaces préhilbertiens complexes et les espaces hermitiens.
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs, endomorphismes autoadjoints, automorphismes orthogonaux) et le point de vue matriciel.
- Exploiter les résultats obtenus pour l'étude de problèmes issus de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie.

Il convient d'étudier conjointement les espaces vectoriels euclidiens et la géométrie euclidienne du plan et de l'espace et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

1- Espaces préhilbertiens réels

L'objectif est de consolider et approfondir les notions de base abordées en classe de première année : produit scalaire, norme et distance associées, orthogonalité, sous-espaces supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux, sommes directes orthogonales.

a) Formes bilinéaires symétriques

Espace vectoriel des formes bilinéaires symétriques sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E. Espace vectoriel des formes quadratiques associées ; polarisation.

Définition des formes bilinéaires symétriques positives, des formes quadratiques positives ; inégalité de Cauchy-Schwarz. Cas des formes définies positives.

En dimension finie, matrice dans une base d'une forme bilinéaire symétrique, d'une forme quadratique.

b) Produit scalaire

Produit scalaire sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel ; définition d'un espace préhilbertien réel. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; norme et distance associées.
Relations entre produit scalaire et norme. Identité du parallélogramme, identité de polarisation.

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, notamment le produit scalaire canonique de $\mathbf{R}^n$ et les produits scalaires usuels sur les espaces de suites et de fonctions.

c) Orthogonalité

Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal F° (ou $F^\perp$) d'un sous-espace vectoriel F de E.

Familles orthogonales, familles orthonormales ; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux.

Somme directe orthogonale d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

Projecteurs orthogonaux associés à une décomposition de E en somme directe orthogonale.

2- Espaces euclidiens

Ce chapitre est organisé autour de quatre objectifs :
- Consolider l'étude des espaces vectoriels euclidiens (bases orthonormales, automorphismes orthogonaux, matrices orthogonales) et de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace (distances, angles, isométries, déplacements, similitudes directes du plan).
- Étudier la projection orthogonale d'un vecteur d'un espace préhilbertien réel (de dimension finie ou non) sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.
- Étudier le concept d'adjoint d'un endomorphisme.
- Étudier la réduction des endomorphismes autoadjoints d'un espace vectoriel euclidien et ses applications à la réduction des formes quadratiques sur un tel espace.

a) Bases orthonormales

Définition d'un espace vectoriel euclidien : espace préhilbertien réel de dimension finie.

Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.

Distance à un sous-espace vectoriel. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Isomorphisme de E sur l'espace dual E^*.

Toute forme linéaire f sur un espace vectoriel euclidien E s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a|x)$ où a est un vecteur de E.

Expressions dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance de deux points, de la trace et du déterminant d'un endomorphisme.

La donnée d'une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n détermine un isomorphisme de $\mathbf{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique) sur E.

b) Projections orthogonales

Dans un espace préhilbertien réel E (de dimension finie ou non), l'orthogonal F° d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie est un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel, appelé supplémentaire orthogonal de F.

Expression de $p_F(x)$ lorsque F est muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$:

$$p_F(x) = \sum_{j=1}^{n} (e_j|x)\, e_j.$$

Définition de la projection orthogonale $p_F(x)$ d'un vecteur x de E sur F ; définition de la distance $d(x, F)$ d'un élément x de E à F.

Inégalité de Bessel :

$$\sum_{j=1}^{n} |(e_j|x)|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

c) Adjoint d'un endomorphisme

Dans ce paragraphe, les espaces vectoriels considérés sont euclidiens.

Définition de l'adjoint u^* d'un endomorphisme u de E ; existence et unicité de l'adjoint. Noyau, image et rang de l'adjoint.

Relations $u^{**} = u$ $(uv)^* = v^* u^*$.
Pour qu'un sous-espace vectoriel F de E soit stable par un endomorphisme u, il faut et il suffit que F° soit stable par u^*.

Matrice associée à u^* dans une base orthonormale. Relations $\mathrm{Tr}\,(u^*) = \mathrm{Tr}\,(u)$ et $\mathrm{Det}\,(u^*) = \mathrm{Det}\,(u)$.

Définition d'un endomorphisme autoadjoint (ou symétrique).

Caractérisation des projecteurs orthogonaux par les relations $p^2 = p$ et $p^* = p$.

Définition d'un endomorphisme autoadjoint positif, d'un endomorphisme autoadjoint défini positif.

Automorphismes orthogonaux, groupe orthogonal $O(E)$. Rotations, groupe spécial orthogonal $SO(E)$.

Caractérisation des automorphismes orthogonaux par la relation $u^* u = u u^* = \mathrm{I}_E$.

Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint, d'un automorphisme orthogonal, à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale.

Cas d'un endomorphisme autoadjoint positif, défini positif ; définition des matrices symétriques positives, définies positives.

d) Réduction des endomorphismes autoadjoints

Étant donné un endomorphisme autoadjoint u d'un espace euclidien E, cet espace est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; en particulier, u est diagonalisable dans une base orthonormale.
Spectre d'un endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.

Diagonalisation d'une matrice symétrique au moyen d'une matrice orthogonale.

Endomorphisme autoadjoint associé à une forme bilinéaire symétrique (ou à une forme quadratique) sur un espace euclidien E ; réduction de cette forme dans une base orthonormale de E.

Définition du rang d'une forme bilinéaire symétrique (d'une forme quadratique) ; définition d'une forme non dégénérée.

Pour un endomorphisme u d'un espace euclidien, relations $\|u^*\| = \|u\|$ et $\|u\|^2 = \|u^*u\|$.

En outre, lorsque u est autoadjoint positif,

$$\|u\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \big(u(x)|x\big) = r(u),$$

où $r(u)$ est la plus grande valeur propre de u.

e) Application aux coniques et aux quadriques

Recherche d'une équation réduite d'une conique définie par une équation cartésienne dans un repère orthonormal ; exemples d'une telle recherche pour une quadrique.

Description des quadriques usuelles (en dimension 3) définies par une équation cartésienne réduite en repère orthonormal : ellipsoïdes, hyperboloïdes (à une nappe et à deux nappes), paraboloïdes (elliptiques et hyperboliques), cônes, cylindres (elliptiques, hyperboliques et paraboliques).

Les étudiants doivent savoir reconnaître sur l'équation réduite les éléments de symétrie et les quadriques de révolution.
Génération d'un hyperboloïde de révolution à une nappe et d'un paraboloïde hyperbolique par une famille de droites.
Aucune autre connaissance spécifique sur les quadriques n'est exigible.

3- Espaces préhilbertiens complexes, espaces hermitiens

a) Espaces préhilbertiens complexes

Produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$ sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel (linéaire à droite, semi-linéaire à gauche) ; définition d'un espace vectoriel préhilbertien complexe. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; norme et distance associées.

Relations entre produit scalaire et norme. Identité du parallélogramme, identité de polarisation.

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, et notamment :
- le produit scalaire canonique de $\mathbf{C}^n$;
- le produit scalaire canonique sur l'espace ℓ^2 des suites de carré sommable ;
- $(f, g) \mapsto (f|g) = \displaystyle\int_{[a,b]} \bar{f}g$ dans $\mathcal{C}([a, b])$;
- $(f, g) \mapsto (f|g) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{[0,2\pi]} \bar{f}g$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbf{R}$ à valeurs complexes.

Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel.

Familles orthogonales, familles orthonormales ; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux, projecteurs orthogonaux, somme directe orthogonale d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

b) Espaces vectoriels hermitiens

Définition d'un espace vectoriel hermitien : espace préhilbertien complexe de dimension finie. Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.

Dans un espace préhilbertien complexe E (de dimension finie ou non), existence du supplémentaire orthogonal F° d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie. Définition de la projection orthogonale $p_F(x)$ d'un vecteur x de E sur F ; définition de la distance $d(x, F)$ d'un élément x de E à F.

Toute forme linéaire f sur un espace vectoriel hermitien E s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a|x)$ où a est un vecteur de E.

Expression de $p_F(x)$ lorsque F est muni d'une base orthonormale :

$$p_F(x) = \sum_{j=1}^{n} (e_j|x)\, e_j.$$

Inégalité de Bessel.

ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de suite (ou de série) et de fonction, qui permettent de modéliser le comportement des phénomènes discrets et des phénomènes continus. Les interactions entre le continu et le discret sont mises en valeur.

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels normés, qui permet notamment de décrire et d'étudier les notions de limite et de continuité, ainsi que les modes de convergence usuels des suites et des séries de fonctions.

La maîtrise du calcul différentiel et intégral à une variable et de ses interventions en géométrie différentielle constitue un objectif essentiel. L'intégration, la représentation des fonctions, notamment par des séries (séries entières, séries de Fourier) et par des intégrales dépendant d'un paramètre, l'approximation des fonctions, les équations différentielles (notamment les systèmes linéaires et les systèmes autonomes, en relation avec la géométrie différentielle), le calcul différentiel à plusieurs variables (également en interaction étroite avec la géométrie différentielle et l'analyse vectorielle) tiennent une place majeure.

Le programme d'analyse combine l'étude des problèmes qualitatifs avec celle de problèmes quantitatifs. Il développe conjointement l'étude globale des suites et des fonctions et l'étude de leur comportement local ou asymptotique ; en particulier, il convient de mettre en valeur le caractère local des notions de limite, de continuité, de dérivabilité et de différentiabilité. Enfin, pour l'étude des solutions des équations, le programme associe les problèmes d'existence et d'unicité, les méthodes de calcul exact, les méthodes d'approximation et les algorithmes de mise en œuvre.

En analyse, les majorations et les encadrements jouent un rôle essentiel. Tout au long de l'année, il convient donc de dégager les méthodes usuelles d'obtention de majorations et de minorations : opérations sur les inégalités, emploi de la valeur absolue, du module ou d'une norme, emploi du calcul différentiel et intégral. Pour comparer des nombres, des suites ou des fonctions, on utilise systématiquement des inégalités larges (qui sont compatibles avec le passage à la limite), en réservant les inégalités strictes aux cas où elles sont indispensables.

En ce qui concerne l'usage des quantificateurs, il convient d'entraîner les étudiants à savoir les employer pour formuler de façon précise certains énoncés et leurs négations. En revanche, il convient d'éviter tout recours systématique aux quantificateurs. A fortiori, leur emploi abusif (notamment sous forme d'abréviations dans un texte) est exclu.

Le programme d'analyse et géométrie différentielle comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques relatifs aux suites et aux fonctions, ainsi que l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel.

I. SUITES ET FONCTIONS

Cette partie est organisée autour de quatre objectifs :
-Étudier les concepts élémentaires relatifs aux espaces vectoriels normés, en vue de fournir un cadre cohérent pour l'étude des suites, des séries et des fonctions.
- Étudier le comportement global et asymptotique d'une suite ou d'une fonction, en relation avec les systèmes dynamiques discrets ou continus.
- Décrire et mettre en œuvre des algorithmes d'approximation d'un nombre ou d'un vecteur à l'aide de suites ou de séries et comparer leurs performances. Cette étude est menée en relation avec celle des fonctions et de l'algèbre linéaire, et avec les problèmes de mesure de grandeurs géométriques ou physiques.
- Exploiter les résultats de la théorie des fonctions pour l'étude de problèmes numériques (majorations d'expressions, problèmes d'optimisation, solutions d'équations numériques,...).

1- Espaces vectoriels normés réels ou complexes

L'objectif de ce chapitre est double :
- Étudier les concepts de norme et de distance associée, de suite convergente, de topologie d'un espace vectoriel normé, de limite et de continuité d'une application.
- Introduire les notions de complétude et de compacité dans un espace vectoriel normé.
Ces notions doivent être illustrées par de nombreux exemples issus de l'espace $\mathbf{K}^n$, des espaces vectoriels d'endomorphismes, de matrices, de suites et de fonctions ; en revanche, l'étude systématique des espaces vectoriels normés n'est pas un objectif du programme.
En ce qui concerne le comportement global et asymptotique d'une suite, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, convergence, divergence...) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations,

encadrements, vitesse de convergence ou de divergence par comparaison aux suites de référence usuelles, accélération de convergence...).
De même, en ce qui concerne le comportement global et local (ou asymptotique) d'une fonction, il convient de combiner l'étude de problèmes qualitatifs (monotonie, existence de zéros, existence d'extrémums, existence de limites, continuité, dérivabilité...) avec celle de problèmes quantitatifs (majorations, encadrements, caractère lipschitzien, comparaison aux fonctions de référence au voisinage d'un point...).

Les applications étudiées dans ce chapitre sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé E et à valeurs dans un autre F. Les notions d'espace métrique et d'espace topologique sont hors programme.

Dans un souci d'unification, une propriété portant sur une fonction définie sur A est dite vraie au voisinage d'un point a si elle est vraie sur l'intersection de A avec un voisinage de a lorsque a est un point de E adhérent à A, avec le complémentaire d'une boule de centre 0 lorsque a est à l'infini, avec un intervalle $]c,+\infty[$ lorsque $E=\mathbf{R}$ et $a=+\infty$, avec un intervalle $]-\infty,c[$ lorsque $E=\mathbf{R}$ et $a=-\infty$.

a) Normes et distances

Définition d'une norme, notée $x\mapsto \\|x\\|$ ou $x\mapsto N(x)$, sur un espace vectoriel E réel ou complexe ; distance associée, notée $(x,y)\mapsto d(x,y)$. Boules. Distance d'un point x de E à une partie A de E, notée $d(x,A)$. Vecteurs unitaires ; vecteur unitaire associé à un vecteur non nul.	Les étudiants doivent connaître les normes N_1, N_2 et N_∞ sur $\mathbf{K}^n$ et sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles ou complexes, ainsi que les normes N_1, N_2 et N_∞ définies respectivement sur les espaces ℓ^1, ℓ^2 et ℓ^∞.
Norme $x\mapsto \\|x\\|=(x\vert x)^{1/2}$ associée à un produit scalaire $(x,y)\mapsto (x\vert y)$ sur un espace vectoriel réel ou complexe.	Relation $$\\|x\\|=\sup_{\\|y\\|\leqslant 1}\vert(x\vert y)\vert.$$
Définition d'une partie bornée, d'une application bornée.	Espace vectoriel normé $\mathcal{B}(A,F)$ des applications bornées f de A dans F muni de la norme $N_\infty(f)=\sup_x \\|f(x)\\|$.
Définition d'une application k-lipschitzienne, composée d'applications lipschitziennes.	Les applications $x\mapsto\\|x\\|$ et $x\mapsto d(x,A)$ sont 1-lipschitziennes.
Définition de la norme induite sur un sous-espace vectoriel de E ; définition de la distance induite sur une partie de E.	
Définition du produit d'une famille finie d'espaces normés, muni de la norme $N(x)=\sup_i N_i(x_i)$.	Les applications coordonnées sont 1-lipschitziennes.

b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

Suites convergentes, suites divergentes d'éléments d'un espace vectoriel normé E.	Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence des suites d'un sous-espace vectoriel normé, d'un espace vectoriel normé produit. Espace vectoriel normé $\ell^\infty(E)$ des suites bornées d'éléments de E, muni de la norme $N_\infty(u)=\sup\\|u_n\\|$. Sous-espace vectoriel des suites convergentes.
Comparaison de deux normes N et N' sur E. Normes équivalentes.	On fera le lien avec la convergence des suites pour chacune de ces deux normes. Les étudiants doivent savoir comparer notamment les normes usuelles mentionnées au paragraphe **a**).
Suites extraites d'une suite, définition d'une valeur d'adhérence. Valeurs d'adhérence d'une suite convergente. Toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence est divergente.	Aucune autre connaissance spécifique sur les valeurs d'adhérence n'est exigible des étudiants. Les notions de limites supérieure et inférieure sont hors programme.
Relations de comparaison entre suites : domination et négligeabilité pour une suite (u_n) à valeurs vectorielles et une suite (α_n) à valeurs réelles. Équivalence pour deux suites (u_n) et (v_n) à valeurs vectorielles.	Notations $u_n=O(\alpha_n)$, $u_n=o(\alpha_n)$, $u_n\sim v_n$.

Exemples d'étude du comportement global et asymptotique de suites de nombres réels, de nombres complexes. Exemples de méthodes d'accélération de convergence.

Il convient d'entraîner les étudiants à exploiter la comparaison aux suites de référence et à classer des ordres de grandeur.

Exemples d'étude de suites de nombres réels ou complexes définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et d'emploi d'une telle suite pour l'approximation d'un point fixe a de f.

Pour étudier la vitesse de convergence de u_n vers a, les étudiants doivent savoir exploiter le comportement local de f au voisinage de a et, notamment, une inégalité du type lipschitzien $|f(x) - f(a)| \leqslant k\,|x - a|$ où $0 \leqslant k < 1$, ou du type $|f(x) - f(a)| \leqslant \lambda\,|x - a|^2$.

c) Topologie d'un espace vectoriel normé

Définition des voisinages d'un point, des parties ouvertes, des parties fermées.

Réunion et intersection de parties ouvertes, de parties fermées.

Définition d'un point adhérent à une partie A, de l'adhérence $\bar{A}$ de A ; parties denses. Caractérisation de $\bar{A}$ comme plus petite partie fermée contenant A. En particulier, A est fermée si et seulement si $\bar{A} = A$.
Définition d'un point intérieur à une partie A, de l'intérieur de A, d'un point frontière de A, de la frontière de A.

Aucune autre connaissance spécifique sur ces notions n'est exigible des étudiants et tout excès de technicité est exclu.
La notion de point d'accumulation est hors programme.

Caractérisation séquentielle des points adhérents, des parties fermées.

Définition des voisinages d'un point, des ouverts et des fermés relatifs à une partie A.

d) Étude locale d'une application, continuité

Limite d'une application : soit f une application d'une partie A de E à valeurs dans F et a un point de E adhérent à A. Étant donné un élément b de F, on dit que f admet b comme limite au point a si, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément x de A, la relation $\|x-a\| \leqslant \delta$ implique la relation $\|f(x)-b\| \leqslant \varepsilon$; le vecteur b est alors unique, et on le note $b = \lim_a f$ ou $b = \lim_{x \to a} f(x)$. Lorsqu'un tel élément b existe, on dit que f admet une limite au point a. Interprétation en termes de voisinages.

Lorsque a appartient à A, f est dite continue au point a ; alors $b = f(a)$. Dans le cas contraire, f admet une limite en a si et seulement si f se prolonge par continuité en ce point.
Étant donnée une partie P de A et un point a de E adhérent à P, on dit que f admet une limite au point a selon P si la restriction de f à P admet une limite en a.

Dans le cas des fonctions d'une variable réelle, extension de cette définition lorsque $a = +\infty$ ou $a = -\infty$.
Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, extension lorsque $b = +\infty$ ou $b = -\infty$.

Extension au cas d'une variable vectorielle dont la norme tend vers l'infini.

Limite d'une application composée. Opérations algébriques sur les limites.

Limite d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé produit.

Limite de l'image d'une suite (u_n) admettant une limite a par une application f admettant une limite au point a.

Caractérisation séquentielle de l'existence d'une limite, de la continuité en un point.

Relations de comparaison en un point : domination et négligeabilité pour une fonction f à valeurs vectorielles et une fonction φ à valeurs réelles. Équivalence pour deux fonctions f et g à valeurs vectorielles.

Notations $f = O\,(\varphi)$, $f = o\,(\varphi)$, $f \sim g$.

Applications continues. Continuité de la composée de deux applications continues, de la restriction d'une application continue, d'une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé produit. Opérations algébriques sur les applications continues.

Espace vectoriel $\mathcal{C}(A, F)$ des applications continues de A dans F, algèbre $\mathcal{C}(A)$ des fonctions à valeurs réelles ou complexes continues sur A.

Deux applications continues f et g de A dans F coïncidant sur une partie B de A dense dans A sont égales.

Les étudiants doivent savoir exploiter des raisonnements par densité pour établir des relations entre fonctions continues.

Image réciproque d'une partie ouverte, d'une partie fermée par une application continue.	Il convient de souligner l'intérêt de ces résultats pour démontrer qu'une partie est ouverte (ou fermée).

e) Applications linéaires continues

Caractérisation des applications linéaires continues d'un espace normé (E, N) dans un espace normé (F, N'). Caractérisation de l'équivalence de normes par la bicontinuité de l'application identique, par la conservation des parties ouvertes.	Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe un nombre réel $k > 0$ tel que, pour tout x, $N'\big(u(x)\big) \leqslant k\,N(x)$; dans ces conditions, u est k-lipschitzienne.
Norme subordonnée à N et N' d'une application linéaire continue u de E dans F : $$\|u\| = \sup_{N(x)\leqslant 1} N'\big(u(x)\big).$$	Espace vectoriel normé $\mathcal{LC}(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F.
Si u et v sont des applications linéaires continues, $v \circ u$ l'est aussi, et $$\|v \circ u\| \leqslant \|v\|\,\|u\|.$$	
Définition d'une algèbre normée unitaire. Algèbre normée $\mathcal{B}(A, \mathbf{C})$ des applications bornées de A dans $\mathbf{C}$.	Algèbre normée $\mathcal{LC}(E)$ des endomorphismes continus d'un espace vectoriel normé E.
Continuité d'une application bilinéaire B de $E \times F$ dans G satisfaisant à la relation $$\|B(x, y)\| \leqslant k\,\|x\|\,\|y\|.$$	La notion de norme d'une application bilinéaire est hors programme.
Continuité de l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbf{K}\times E$ dans E, du produit scalaire sur un espace préhilbertien, de l'application $(u, v) \mapsto uv$ dans une algèbre normée.	Continuité de $(u, v) \mapsto uv$ dans l'algèbre normée $\mathcal{LC}(E)$.

f) Complétude, compacité

L'étude de la compacité en dimension quelconque n'est pas un objectif du programme ; pour la pratique, il convient de se limiter aux espaces vectoriels de dimension finie.

Définition d'une suite de Cauchy d'éléments d'un espace normé. Définition d'un espace de Banach, d'un espace de Hilbert.	Les corps $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ (munis de la valeur absolue) sont complets ; les espaces produits $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{C}^n$ le sont aussi.
Parties complètes d'un espace vectoriel normé.	Les parties complètes d'un espace de Banach sont les parties fermées.
Critère de Cauchy d'existence d'une limite en un point pour une application à valeurs dans un tel espace.	
Définition (séquentielle) d'une partie compacte A d'un espace vectoriel normé E. Une telle partie est fermée bornée. Toute partie fermée d'une partie compacte est compacte. Si A est une partie compacte de E et B une partie compacte de F, alors $A \times B$ est une partie compacte de $E \times F$.	
Théorème de Bolzano-Weierstrass : de toute suite bornée d'éléments de $\mathbf{R}$, de $\mathbf{C}$, de $\mathbf{R}^n$, de $\mathbf{C}^n$ on peut extraire une suite convergente.	Dans ces espaces, les parties compactes sont les parties fermées bornées.
Étant donnée une application continue f de A dans F, l'image par f d'une partie compacte de E incluse dans A est une partie compacte de F. Cas d'une fonction numérique continue sur un compact : existence d'extrémums.	Toute application continue sur un compact est bornée, et la borne supérieure de sa norme est atteinte.
Définition des applications uniformément continues. Continuité uniforme d'une application continue sur un compact.	La continuité uniforme constitue un outil important en analyse ; en revanche, l'étude de ce concept n'est pas un objectif en soi.

2- Espaces vectoriels normés de dimension finie

L'objectif de ce chapitre est d'établir l'équivalence des normes sur un espace vectoriel normé de dimension finie, et d'en déduire les propriétés de complétude et de compacité de tels espaces.

L'équivalence des normes montre que de nombreux concepts importants sont indépendants du choix d'une norme : parties bornées, applications bornées, applications lipschitziennes ; parties ouvertes, parties fermées, adhérence, intérieur, limite et continuité d'une application, continuité uniforme ; suites convergentes, parties compactes ; suites de Cauchy, parties complètes. Par conséquent, pour toutes ces notions, il est légitime de se placer dans le cadre des espaces vectoriels de dimension finie (sans préciser une norme particulière).

a) Topologie d'un espace vectoriel de dimension finie

Équivalence des normes sur un espace vectoriel E de dimension finie ; parties bornées et topologie d'un tel espace.

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.

Continuité des applications linéaires et multilinéaires définies sur de tels espaces. Caractérisation des applications continues à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie à l'aide d'une base de F.

Pour qu'une suite d'éléments de E converge, il faut et il suffit que ses coordonnées dans une base de E convergent ; les coordonnées de la limite sont alors les limites des coordonnées.

Tout espace vectoriel normé E de dimension finie est un espace de Banach.

Les parties complètes de E sont les parties fermées.

Théorème de Bolzano-Weierstrass : dans un espace vectoriel normé E de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées bornées.

La partie constituée des élements d'une suite convergente et de sa limite est compacte.

b) Connexité par arcs

Définition d'une partie connexe par arcs d'un espace normé E de dimension finie. Les parties connexes par arcs de $\mathbf{R}$ sont les intervalles ; toute partie convexe de E est connexe par arcs. Image continue d'une partie connexe par arcs.

Cas des fonctions à valeurs réelles continues sur une partie connexe par arcs : théorème des valeurs intermédiaires.
L'étude générale de la connexité est hors programme.

3- Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé

L'objectif de ce chapitre est douple :
- Étudier la convergence des séries de nombres réels positifs.
- Étudier la convergence des séries absolument convergentes à partir des résultats obtenus pour les séries de nombres réels positifs.

Dans ce chapitre, le programme se place dans le cadre des séries d'éléments d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.

a) Suites et séries

Série $\sum u_n$ associée à une suite (u_n) d'éléments d'un espace vectoriel normé E de dimension finie, suite (s_p) des sommes partielles de cette série.

Il convient de mettre en valeur et d'exploiter la correspondance bijective entre suites et séries.

Définition d'une série convergente et de sa somme, notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Espace vectoriel des séries convergentes.
Caractérisation de la convergence à l'aide d'une base de E.

Si la série $\sum u_n$ converge, u_n tend vers 0 ; la réciproque est fausse.

Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers zéro ; majoration du reste.

Aucune autre connaissance spécifique sur les séries semi-convergentes n'est exigible des étudiants.

b) Séries de nombres réels positifs

Pour qu'une série $\sum u_n$ de nombres réels positifs converge, il faut et il suffit que la suite (s_p) des sommes partielles soit majorée. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_p s_p = \sup_p s_p$.

Convergence des séries géométriques de nombres réels positifs, convergence des séries de Riemann.

Théorème de comparaison des séries de nombres réels positifs : soient (u_n) et (α_n) des suites de nombres réels positifs telles que $u_n = O(\alpha_n)$; alors la convergence de $\sum \alpha_n$ implique la convergence de $\sum u_n$.

Comparaison d'une série de nombres réels positifs à une série géométrique, à une série de Riemann.
Développement décimal d'un nombre réel positif.

Comparaison à une série géométrique : règle de d'Alembert.

c) Sommation des relations de comparaison

Étant données deux suites (a_n) et (b_n) de nombres réels positifs, sommation des relations de comparaison : domination $b_n = O(a_n)$, négligeabilité $b_n = o(a_n)$, équivalence $b_n \sim a_n$ (cas des séries convergentes, cas des séries divergentes).

Étant données une suite (u_n) de nombres complexes et une suite (a_n) de nombres réels positifs telle que $\sum a_n$ converge, sommation des relations de domination $u_n = O(a_n)$ et de négligeabilité $u_n = o(a_n)$.

d) Comparaison d'une série à une intégrale

Comparaison d'une série de nombres réels positifs à une intégrale : étant donnée une fonction f continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles positives décroissante, la série de terme général

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$$

est convergente. En particulier, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

La relation $w_n = \int_{n-1}^{n} [f(t) - f(n)]\,\mathrm{d}t$ permet d'encadrer w_n ; un encadrement analogue peut être obtenu lorsque f est croissante.

Équivalent de $n!$ (formule de Stirling).

La démonstration de la formule de Stirling n'est pas exigible des étudiants.

e) Séries d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie

Critère de Cauchy pour la convergence d'une série d'éléments d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.

Séries absolument convergentes d'éléments de E (c'est-à-dire telles que $\sum \|u_n\| < +\infty$). Toute série absolument convergente est convergente.

Définition de l'espace vectoriel ℓ^1 muni de la norme

$u \mapsto N_1(u) = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Définition de l'espace préhilbertien ℓ^2, muni du produit scalaire

$(u, v) \mapsto (u|v) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{u}_n v_n$ et de la norme N_2 associée.

Série géométrique : étant donné une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie ayant e pour élément unité et u un élément de $\mathcal{A}$ tel que $\|u\| < 1$, la série $\sum u^n$ est absolument convergente, $e - u$ est inversible dans $\mathcal{A}$ et $(e - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

La série géométrique $\sum z^n$, où z appartient à $\mathbf{C}$, est absolument convergente si et seulement si $|z| < 1$; sa somme est alors égale à $\frac{1}{1-z}$. En outre, si $|z| \geqslant 1$, cette série diverge.

Série exponentielle : étant donné une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie ayant e pour élément unité alors, pour tout élément u de $\mathcal{A}$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente ; par définition,

$$\exp u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

Exponentielle d'un nombre complexe, d'un endomorphisme d'espace vectoriel normé E de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe.

Définition du produit de Cauchy de deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de nombres complexes :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p \, v_q.$$

Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, la série $\sum w_n$ l'est aussi.

Dans ces conditions,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\Big).$$

Séries doubles. Interversion des sommations (théorème de Fubini).

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants.
La sommation par paquets n'est pas au programme.

4- Suites et séries de fonctions

L'objectif de ce chapitre est de définir les modes usuels de convergence ponctuelle des suites et séries de fonctions (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur tout compact, convergence normale d'une série) et d'exploiter ces types de convergence pour étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite et l'approximation d'une fonction par des fonctions plus simples.

Il convient de souligner que, le plus souvent, la convergence simple ne suffit pas pour assurer la régularité de la limite d'une suite de fonctions. En revanche, l'étude systématique des différents modes de convergence des suites et des séries d'applications n'est pas un objectif du programme.

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie sur le corps **R** *ou* **C** *et, sauf mention explicite du contraire, à valeurs réelles ou complexes.*

a) Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale

Étant donnée une suite (f_n) de fonctions définies sur une partie A de E à valeurs réelles ou complexes, définition de la convergence simple sur A et de la convergence uniforme sur A.

Définitions correspondantes pour une série de fonctions.

Si (f_n) converge vers f uniformément sur A et si, pour tout n, f_n est bornée sur A, alors f l'est aussi.

Pour les fonctions bornées, la convergence uniforme peut être interprétée à l'aide de la norme N_∞ sur l'espace $\mathcal{B}(A)$.

Soit a un point de A ; si (f_n) converge vers f uniformément sur A et si, pour tout n, f_n est continue au point a, alors f l'est aussi.

Extension de ce résultat au cas où a est adhérent à A (ou, lorsque $E = \mathbf{R}$, aux cas où $a = +\infty$ et $a = -\infty$) et où, pour tout n, f_n admet une limite b_n en a.

Lorsque A est une partie compacte de E, l'espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$ des applications continues sur A est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}(A)$ muni de la norme N_∞.

Une série $\sum f_n$ de fonctions définies sur A est dite normalement convergente sur A si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Pour établir la convergence normale de $\sum f_n$, il convient d'utiliser une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ majorante, c'est-à-dire telle que, pour tout n, $\|f_n\|_\infty \leqslant \alpha_n$.

Toute série $\sum f_n$ normalement convergente sur A est absolument et uniformément convergente sur A.

Alors, $\quad N_\infty\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} N_\infty(f_n).$

Extension des notions et résultats précédents au cas des suites et séries d'applications d'une partie A de E à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

Dans une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie, continuité de $u \mapsto (e-u)^{-1}$ sur la boule unité $\|u\| < 1$; continuité de $u \mapsto \exp u$ sur $\mathcal{A}$.

b) Liens avec l'intégration et la dérivation

Norme de la convergence en moyenne $f \mapsto N_1(f) = \int_{[a,b]} |f|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b], \mathbf{K})$ des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbf{K}$. La convergence uniforme de (f_n) sur $[a,b]$ implique la convergence en moyenne et, en outre,

$$\int_{[a,b]} \lim_n f_n = \lim_n \int_{[a,b]} f_n.$$

Inégalités

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant N_1(f) \leqslant (b-a)\, N_\infty(f).$$

Produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_{[a,b]} \bar{f} g$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs complexes ; inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme de la convergence en moyenne quadratique $f \mapsto N_2(f) = \left(\int_{[a,b]} |f|^2\right)^{1/2}$. La convergence uniforme de (f_n) sur $[a,b]$ implique la convergence en moyenne quadratique, qui implique elle-même la convergence en moyenne.

Inégalités

$$N_2(f) \leqslant \sqrt{b-a}\; N_\infty(f),$$
$$N_1(f) \leqslant \sqrt{b-a}\; N_2(f).$$

Intégration terme à terme d'une série d'applications continues : soit (f_n) une suite d'applications continues sur $[a,b]$. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, la série des intégrales est convergente et

$$\int_{[a,b]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[a,b]} f_n.$$

Lorsque la convergence est normale sur $[a,b]$, la série $\sum N_1(f_n)$ est convergente et

$$N_1\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n).$$

Primitivation de la limite d'une suite de fonctions : soit a un point de I, (f_n) une suite d'applications continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbf{K}$ et, pour tout n, h_n la primitive de f_n sur I telle que $h_n(a) = 0$. Si (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers f, alors (h_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la primitive h de f telle que $h(a) = 0$.
Application aux séries de fonctions continues.

Il convient de mettre en valeur le fait que, pour tout segment $[a,b]$ de I, pour toute application f continue par morceaux sur I et toute primitive h de f,

$$N_\infty(h) \leqslant \|h(a)\| + \int_{[a,b]} \|f\|.$$

Dérivation de la limite d'une suite de fonctions : soit (f_n) une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I convergeant simplement sur I vers f et telle que (f_n') converge uniformément sur tout segment de I vers h. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = h$.

Il convient de mettre en valeur le fait que, pour tout segment $[a,b]$ de I et pour toute application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I,

$$N_\infty(f) \leqslant \|f(a)\| + \int_{[a,b]} \|f'\|.$$

Dérivation terme à terme d'une série de fonctions : soit (f_n) une suite d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$. Si la série $\sum f_n$ converge simplement sur I et si la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I, alors la somme de la série $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et

$$\mathrm{D}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{D}\, f_n.$$

Brève extension de la dérivation aux fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
Étant donné un élément a d'une algèbre normée $\mathcal{A}$ de dimension finie, l'application $e_a : t \mapsto \exp ta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et $\mathrm{D}e_a = a\, e_a = e_a\, a$.

Application à l'exponentielle d'un nombre complexe, d'un endomorphisme, d'une matrice.

c) Approximation des fonctions d'une variable réelle

Dans ce paragraphe, les applications considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie.

Définition d'une fonction φ à valeurs dans F en escalier sur $[a, b]$, d'une subdivision de $[a, b]$ subordonnée à φ. Espace vectoriel des fonctions en escalier sur un segment.	Espace vectoriel des fonctions en escalier sur $\mathbf{R}$ (par définition, ces fonctions sont nulles en dehors d'un segment).
Définition d'une fonction à valeurs dans F continue par morceaux sur $[a, b]$. Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.	Une fonction est dite continue par morceaux sur un intervalle I quelconque si sa restriction à tout segment est continue par morceaux.
Approximation uniforme sur $[a, b]$ des fonctions à valeurs dans F continues par morceaux sur $[a, b]$ par des fonctions en escalier sur $[a, b]$, des fonctions continues sur $[a, b]$ par des fonctions continues affines par morceaux sur $[a, b]$.	
Approximation uniforme sur $[a, b]$ des fonctions à valeurs complexes continues sur $[a, b]$ par des fonctions polynomiales. Approximation uniforme sur $\mathbf{R}$ des fonctions à valeurs complexes continues périodiques par des polynômes trigonométriques (complexes).	La démonstration des théorèmes de Weierstrass n'est pas exigible des étudiants.

II. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE : DÉRIVATION ET INTÉGRATION

Le programme est organisé autour de quatre objectifs :
- Consolider les acquis de première année concernant la dérivation et l'intégration des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes.
- Étendre ces résultats au cas des fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles.
- Étudier l'intégration et la dérivation des suites et séries de fonctions à valeurs vectorielles.
- Effectuer une étude élémentaire des fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

Aussi bien pour l'étude locale que pour l'étude globale des fonctions, le programme combine de manière indissociable les outils du calcul différentiel et du calcul intégral.

1- Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

L'objectif de ce chapitre est double :
- Consolider les acquis de première année concernant la dérivation des fonctions à valeurs réelles ou complexes : dérivation en un point, propriétés globales des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, fonctions convexes.
- Étudier la dérivation des fonctions à valeurs vectorielles.

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$.

a) Dérivée en un point, fonctions de classe C^1

Définition de la dérivabilité d'une fonction f définie sur un intervalle I en un point a de I : dérivée, dérivée à gauche, à droite.	Les étudiants doivent connaître et savoir exploiter l'interprétation cinématique et graphique de la notion de dérivée en un point.
Définition de la dérivabilité d'une fonction f sur un intervalle I, application dérivée ; application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.	Notations f', $\mathrm{D}f$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.
Espace vectoriel $\mathcal{C}^1(I,F)$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, linéarité de la dérivation, dérivée d'une application de la forme $u(f)$ où u est une application linéaire, dérivée d'une application de la forme $B(f,g)$, où B est une application bilinéaire.	Lorsque F est un espace préhilbertien, dérivation du produit scalaire $(f\|g)$, du carré de la norme $\\|f\\|_2$; lorsque e est un vecteur unitaire, orthogonalité de e et de $\mathrm{D}e$.
Caractérisation de la dérivabilité d'une fonction f à valeurs dans F à l'aide d'une base de F.	Les coordonnées de $\mathrm{D}f$ sont les dérivées des coordonnées de f.
Inégalité des accroissements finis.	
Caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions continues sur I et dérivables sur l'intérieur de I.	

b) Fonctions de classe C^k

Définition des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I (k entier naturel ou $k=+\infty$).	Notations $f^{(k)}$, $\mathrm{D}^k f$, $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.
Espace vectoriel $\mathcal{C}^k(I,F)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs dans F, où $0 \leqslant k \leqslant +\infty$. Algèbre $\mathcal{C}^k(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur I à valeurs réelles ou complexes.	Dérivée k-ième du produit de deux fonctions (formule de Leibniz).
La composée $f\circ\varphi$ d'une application f de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et d'une fonction φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle J à valeurs dans I est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J. Définition d'un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J sur I ($k \geqslant 1$).	Une fonction φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle J ($k \geqslant 1$) est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J sur $I=\varphi(J)$ si et seulement si, pour tout élément t de J, $\varphi'(t)\neq 0$.
Extension aux applications de classe $\mathcal{C}^k$ des théorèmes de dérivation de suites et séries de fonctions.	

2- Intégration sur un intervalle quelconque

Ce chapitre est organisé autour de cinq objectifs :
- Étudier l'intégrabilité d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle, d'abord dans le cas des fonctions à valeurs positives, puis dans le cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes.
- Étudier les suites et séries de fonctions intégrables, grâce au théorème e convergence dominée, qui constitue un outil puissant.
- Appliquer les résultats obtenus à l'étude des fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre.
- Exploiter la représentation des fonctions par des séries et des intégrales, en relation avec l'enseignement des autres disciplines scientifiques.
- Donner quelques résultats sur les intégrales doubles permettant notamment d'appliquer le théorème de Fubini dans des situations simples.

Le programme se limite à l'intégration des fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de **R** *à valeurs réelles ou complexes.*

a) Fonctions intégrables à valeurs positives

Une fonction f à valeurs réelles positives continue par morceaux sur un intervalle I est dite intégrable (ou sommable) sur I s'il existe un nombre réel positif M tel que, pour tout segment J contenu dans I, $\displaystyle\int_J f \leqslant M$. On pose alors

$$\int_I f = \sup_J \int_J f.$$

S'il existe une suite croissante (J_n) de segments dont la réunion est égale à I et telle que, pour tout n, $\displaystyle\int_{J_n} f \leqslant M$, alors f est intégrable sur I. Dans ces conditions, pour toute suite (J_n) du type précédent

$$\int_I f = \sup_n \int_{J_n} f = \lim_n \int_{J_n} f.$$

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, f est intégrable sur $[a,b]$.

En outre, elle est intégrable sur $]a,b]$, $[a,b[$ et $]a,b[$, et les quatre intégrales sont égales.

Opérations sur les fonctions continues par morceaux intégrables positives : somme, produit par un scalaire positif. Croissance : si f et g sont continues par morceaux sur I, si $0 \leqslant f \leqslant g$ et si g est intégrable, f l'est aussi et $\displaystyle\int_I f \leqslant \int_I g$.

Une fonction f continue, positive et intégrable sur I est nulle si et seulement si son intégrale est nulle.

Si a appartient à I, f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $I \cap]-\infty, a]$ et sur $I \cap [a, +\infty[$.

Additivité de l'intégrale.

Caractérisation de l'intégrabilité de f sur $[a,b[$ à l'aide de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Cas des fonctions définies sur $]a,b]$.

Intégrabilité de $t \mapsto t^\alpha$ sur $[a,+\infty[$, sur $]0,a]$.

b) Fonctions intégrables à valeurs complexes

Une fonction f à valeurs réelles ou complexes continue par morceaux sur I est dite intégrable (ou sommable) sur I si $|f|$ est intégrable.

Si f et φ sont continues par morceaux sur I, si $|f| \leqslant \varphi$ et si φ est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

Espace vectoriel des fonctions continues par morceaux intégrables sur I.

Une fonction f à valeurs réelles continue par morceaux est intégrable sur I si et seulement si $f^+ = \max(f,0)$ et $f^- = \max(-f,0)$ le sont ; on pose alors

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-.$$

Dans ces conditions, pour toute suite (J_n) du type précédent

$$\int_I f = \lim_n \int_{J_n} f.$$

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, f est intégrable sur $[a,b]$. En outre, elle est intégrable sur $]a,b]$, $[a,b[$ et $]a,b[$, et les quatre intégrales sont égales.

Une fonction f à valeurs complexes continue par morceaux est intégrable sur I si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont ; on pose alors

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \int_I \operatorname{Im} f.$$

Linéarité de l'intégrale.

Si f est continue par morceaux intégrable, $|\int_I f| \leqslant \int_I |f|$.

Si I' est un intervalle contenu dans I et si f est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I' et $\int_{I'} f = \int_I \chi_{I'} f$.

Additivité de l'intégrale par rapport à l'intervalle d'intégration.

Définition de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, où a et b appartiennent à $\overline{\mathbf{R}}$ et $a < b$, lorsque f est intégrable sur $]a, b[$. Cas où $b < a$. Relation de Chasles.

Si $f = O(\varphi)$ où f et φ sont continues par morceaux sur $[a, b[$, et si φ est intégrable positive, alors f est intégrable.

Changement de variable : étant données une fonction f intégrable sur I et une bijection φ d'un intervalle I' sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I',

$$\int_I f = \int_{I'} f \circ \varphi \cdot |\varphi'|.$$

Si I' a pour extrémités a et b :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Étant donnée une fonction f à valeurs réelles ou complexes continue par morceaux sur $[a, b[$, il peut arriver que la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admette une limite au point b ; cette limite est encore notée $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, et appelée intégrale impropre (ou généralisée) de f entre a et b.

On dit alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
Aucune connaissance spécifique sur les intégrales impropres des fonctions non intégrables n'est exigible des étudiants.

c) Convergence en moyenne, en moyenne quadratique

Les fonctions continues et intégrables sur I à valeurs complexes constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$; norme de la convergence en moyenne $f \mapsto N_1(f) = \int_I |f|$.

Une fonction continue à valeurs complexes f est dite de carré intégrable sur I si $|f|^2$ est intégrable sur I. Ces fonctions constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I)$.

Le produit de deux fonctions continues f et g de carré intégrable sur I est intégrable sur I.

L'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \int_I \bar{f}g$ est un produit scalaire, inégalité de Cauchy-Schwarz, norme de la convergence en moyenne quadratique $f \mapsto N_2(f) = (\int_I |f|^2)^{1/2}$.

Inégalités

$$|(f|g)| \leqslant N_1(fg) \leqslant N_2(f)\,N_2(g);$$

continuité du produit scalaire.

d) Théorème de convergence dominée

Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux sur I. Si (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I, telle que pour tout entier n, $|f_n| \leqslant \varphi$ (hypothèse de domination), alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et

$$\int_I f = \lim_n \int_I f_n.$$

La démonstration de ce théorème est hors programme.

e) Intégration terme à terme d'une série de fonctions.

Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes continues par morceaux et intégrables sur I, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et telle que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge. Alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f = \sum_{n=0}^{\infty} \int_I f_n.$$

La démonstration de ce théorème est hors programme.

f) Intégrales dépendant d'un paramètre

Continuité sous le signe $\int$: soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$, où A est une partie de $\mathbf{R}^m$, continue par rapport à la première variable, continue par morceaux par rapport à la deuxième variable et telle que, pour tout élément x de A, la fonction $f(x,\cdot)\ :\ t \mapsto f(x,t)$ soit intégrable sur I ; et s'il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I, telle que pour tout élément x de A, $|f(x,\cdot)| \leqslant \varphi$ (hypothèse de domination), la fonction g définie sur A par la relation $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur A.

Extension au cas où l'hypothèse de domination est vérifiée sur toute partie compacte de A.

Dérivation sous le signe $\int$ (formule de Leibniz) : soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$, où A est un intervalle de $\mathbf{R}$, telle que pour tout élément x de A la fonction $f(x,\cdot)\ :\ t \mapsto f(x,t)$ soit continue par morceaux et intégrable sur I, et admettant une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifiant les hypothèses du théorème précédent. Alors la fonction g définie sur A par la relation $g(x) = \displaystyle\int_I f(x,\cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, et

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot).$$

Définition de la fonction Γ sur $]0,+\infty[$ par la relation

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

Relation fonctionnelle $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

Relations $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et, pour tout entier k,

$$\mathrm{D}^k\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k\, \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

La démonstration de la relation $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ n'est pas exigible des étudiants.

g) Intégrales doubles

Soit f une application continue sur $[a,b] \times [c,d]$ à valeurs complexes, alors

$$\int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\Big]\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x.$$

La valeur commune de ces intégrales est par définition l'intégrale double $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f$

Interprétation géométrique par un volume dans le cas où f est positive.
Aucune démonstration n'est exigible des étudiants à ce sujet.

Une fonction f à valeurs réelles positives continue sur un produit $I \times I'$ de deux intervalles est dite intégrable sur $I \times I'$ s'il existe un nombre réel positif M tel que, pour tout segment J contenu dans I et tout segment J' contenu dans I', $\iint_{J\times J'} f \leqslant M$. On pose alors

$$\iint_{I\times I'} f = \sup_{J,J'} \iint_{J\times J'} f.$$

C'est le cas en particulier lorsque pour tout x de I la fonction $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I' et que l'application $x \mapsto \int_{I'} f(x,\cdot)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
On soulignera le rôle symétrique joué par les variables.
On fera remarquer que les intégrales de f sur $I \times I'$ et sur $\overset{\circ}{I} \times \overset{\circ}{I}{}'$ sont égales.

Une fonction f à valeurs réelles ou complexes continue sur $I \times I'$ est dite intégrable (ou sommable) sur $I\times I'$ si $|f|$ est intégrable.

Une fonction f à valeurs réelles continue est intégrable sur $I \times I'$ si et seulement si f^+ et f^- le sont ; on pose alors

$$\iint_{I\times I'} f = \iint_{I\times I'} f^+ - \iint_{I\times I'} f^-.$$

Une fonction f à valeurs complexes continue est intégrable sur $I \times I'$ si et seulement si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont ; on pose alors

$$\iint_{I\times I'} f = \iint_{I\times I'} \operatorname{Re} f + \mathrm{i} \iint_{I\times I'} \operatorname{Im} f.$$

Linéarité de l'intégrale.

Formule de Fubini : Soit f une fonction à valeurs complexes continue et intégrable sur $I \times I'$. Si, pour tout x de I, la fonction $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I', et si l'application $g\,:\, x \mapsto \int_{I'} f(x,\cdot)$ est continue par morceaux et intégrable sur I, on a :

$$\iint_{I\times I'} f = \int_I g.$$

Si de plus la fonction $f(\cdot,y)$ est intégrable sur I pour tout y de I' et si l'application $h\,:\, y \mapsto \int_I f(\cdot,y)$ est continue par morceaux et intégrable sur I', on a :

$$\int_I g = \int_{I'} h.$$

La démonstration de ces propriétés est hors programme.

Passage en coordonnées polaires.

h) Intégrale sur une partie simple du plan, notion d'aire

Une partie A du plan $\mathbf{R}^2$ est dite élémentaire si elle admet les deux définitions suivantes :

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\big\}$$

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbf{R}^2,\ c \leqslant y \leqslant d,\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\big\}$$

où φ_1, φ_2 (respectivement ψ_1, ψ_2) sont des fonctions continues sur $[a,b]$ (resp. $[c,d]$) vérifiant $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ pour tout x de $]a,b[$ (resp. $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ pour tout y de $]c,d[$).

Soient f une fonction à valeurs réelles ou complexes continue sur A, $\widehat{f}$ la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ obtenue en prolongeant f par 0 sur le complémentaire de A, alors les intégrales $\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}\,y \right) \mathrm{d}\,x$ et $\int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(x,y)\,\mathrm{d}\,x \right) \mathrm{d}\,y$ ont un sens et prennent la même valeur. Cette valeur est par définition l'intégrale double de f sur A, notée $\iint_A f$.

On pourra remarquer, par exemple, que pour tout réel strictement positif ε il existe des fonctions α et β définies et continues sur $\mathbf{R}^2$, nulles en dehors d'une partie bornée et telles que l'on ait $\alpha \leqslant \mathbf{1}_A \leqslant \beta$ et $\iint_{\mathbf{R}^2} \beta - \alpha \leqslant \varepsilon$.

L'aire de la partie élémentaire A est le réel $v_2(A) = \iint_A \mathbf{1}$.

Extension au cas où A est une partie simple, c'est à dire la réunion d'une famille finie de parties élémentaires dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.	
Additivité de l'aire pour une réunion finie de parties simples dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.	
Formule de changement de variables. Cas des coordonnées polaires	Aucune difficulté théorique ne sera soulevée sur ce point.

3- Courbes d'un espace vectoriel normé de dimension finie

L'objectif de ce chapitre est double :
- Consolider l'étude des courbes planes abordée en classe de première année, tant du point de vue affine (étude locale et asymptotique) que métrique (abscisse curviligne, repère de Frenet, courbure). Aucune connaissance sur l'expression de la courbure en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires n'est exigible des étudiants.
- Exploiter les résultats obtenus sur les fonctions à valeurs vectorielles pour l'étude cinématique et géométrique des courbes d'un espace vectoriel F de dimension finie. Dans l'espace de dimension 3, le repère de Frenet, la courbure et la torsion sont hors programme ; il en est de même pour la cinématique du solide, dans le plan ou dans l'espace.

La démarche du programme est de partir du point de vue cinématique (donnée d'un paramétrage) et d'introduire ensuite la notion de propriété géométrique en étudiant l'effet d'un changement de paramétrage.

Dans ce chapitre, on considère des fonctions f à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie, de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I, où $1 \leqslant k \leqslant +\infty$.

a) Courbes paramétrées

Courbes paramétrées (ou arcs paramétrés) de classe $\mathcal{C}^k$.	Interprétation cinématique : mouvement, vitesse, accélération.
Effet d'un changement de paramétrage, paramétrage admissible. Trajectoire d'un mouvement, orientation. Point régulier (à l'ordre 1).	Les changements de paramétrage sont supposés de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que leurs applications réciproques.

b) Étude locale d'un arc orienté Γ de classe $\mathcal{C}^k$

Définition des demi-tangentes en un point A de Γ, de la tangente en un point A. Existence d'une tangente en un point régulier.	
Dans le cas d'une courbe plane, cas d'un point A où l'un au moins des vecteurs dérivés successifs est non nul.	L'étude locale en un point où tous les vecteurs dérivés successifs sont nuls est hors programme.

c) Étude des branches infinies

Recherche d'asymptotes pour une courbe plane.	Cas particulier des courbes définies par une équation polaire $\rho = f(\theta)$.

d) Théorème de relèvement

L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ définit une bijection continue de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbf{U}$ privé de -1, dont l'application réciproque $u \mapsto \operatorname{Arg} u$ est continue ; relation $\operatorname{Arg} u = 2 \operatorname{Arctg} \dfrac{y}{1+x}$ où $u = x + iy$, $x^2 + y^2 = 1$, $x \neq -1$.	Lorsque u tend vers -1 en restant tel que $\operatorname{Im} u > 0$ (resp. $\operatorname{Im} u < 0$), $\operatorname{Arg} u$ admet pour limite π (resp. $-\pi$). En particulier, l'application $u \mapsto \operatorname{Arg} u$ ne se prolonge pas en une application continue sur $\mathbf{U}$.
Théorème de relèvement d'une application de classe $\mathcal{C}^k$ à valeurs dans $\mathbf{U}$, où $k \geqslant 1$.	Le cas des fonctions continues est hors programme.

e) Étude métrique d'un arc orienté

Dans ce paragraphe, on suppose que F est un espace vectoriel euclidien dont la norme est notée $\| \ \|$.

Pour un arc orienté Γ régulier à l'ordre 1, vecteur unitaire de la tangente. Définition d'une abscisse curviligne : fonction s de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que

$$s' = \|f'\|.$$

L'abscisse curviligne est un paramétrage admissible. Paramétrage normal d'un arc.

La longueur d'un arc est définie à l'aide de l'abscisse curviligne. Aucune connaissance spécifique sur une définition géométrique de cette longueur n'est exigible des étudiants.

III. SÉRIES ENTIÈRES, SÉRIES DE FOURIER

Cette partie est organisée autour de deux objectifs :
- Étudier les propriétés élémentaires des séries entières et des séries de Fourier.
- Exploiter la représentation des fonctions par des séries entières ou des séries de Fourier pour l'étude de fonctions définies comme solutions d'une équation, en relation avec l'enseignement des autres disciplines scientifiques.

1- Séries entières

L'objectif de ce chapitre est double :
- Étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme, grâce au concept fondamental de rayon de convergence.
- Introduire la notion de développement d'une fonction en série de Taylor, notamment pour le développement en série entière des fonctions élémentaires.
En ce qui concerne le développement de $t \mapsto \mathrm{e}^{tz}$ où t est réel et z complexe, il s'agit d'établir que cette fonction, déjà étudiée en première année, est aussi égale à $t \mapsto \exp tz$, définie à partir de la série exponentielle d'un nombre complexe.

Les coefficients des séries entières considérées dans ce paragraphe sont réels ou complexes.

a) Rayon de convergence d'une série entière

Série entière $\sum a_n z^n$ d'une variable complexe z associée à une suite (a_n) de nombres complexes : définition du rayon de convergence R (fini ou non).

Lemme d'Abel : Étant donné un nombre réel $\rho > 0$ tel que $|a_n|\rho^n$ soit borné, alors pour tout nombre complexe z tel que $|z| < \rho$, $|a_n z^n|$ est dominé par $\left(\dfrac{|z|}{\rho}\right)^n$.
La série est absolument convergente sur le disque (ouvert) de convergence. Elle est normalement convergente sur tout compact du disque de convergence ; continuité de la somme sur le disque de convergence.

En dehors du cas où $\sum |a_n| R^n$ converge, tout énoncé général sur la convergence de la série en un point du cercle $|z| = R$ et sur les propriétés de la somme de la série en un tel point est hors programme.

Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières. Linéarité de la somme, somme du produit de Cauchy.

Relation

$$\exp(z + z') = \exp z \, \exp z'.$$

b) Séries entières d'une variable réelle

Étant donnée une série entière $\sum a_n t^n$ d'une variable réelle t dont le rayon de convergence R est strictement positif, une primitive sur l'intervalle $]-R, R[$ de la somme f de cette série s'obtient en intégrant terme à terme.

Invariance du rayon de convergence d'une série entière par intégration terme à terme, par dérivation terme à terme.

La somme f d'une série entière $\sum a_n t^n$ dont le rayon de convergence R est strictement positif est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. En outre, pour tout $k \geqslant 1$, $\mathrm{D}^k f$ s'obtient par dérivation terme à terme.

En particulier, pour tout entier k positif ou nul,

$$a_k = \frac{1}{k!}\,\mathrm{D}^k f(0).$$

Définition d'une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$, où $r > 0$.
Définition de la série de Taylor d'une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-r, r[$, où $r > 0$.

Développement en série de Taylor de e^{tz} où z est complexe, de $\sin t$, de $\cos t$. Développement de $\ln(1+t)$, de $(1+t)^\alpha$ où α est réel.

2- Séries de Fourier

L'objectif de ce chapitre est triple :
- Étudier les coefficients de Fourier d'une fonction f périodique, et notamment leur comportement asymptotique en fonction de la régularité de f.
- Étudier la convergence en moyenne quadratique des sommes partielles $S_p(f)$ de la série de Fourier de f en utilisant la structure d'espace préhilbertien.
- Étudier la convergence ponctuelle des sommes $S_p(f)$: convergence normale, théorème de Dirichlet.

Il convient d'exploiter l'interprétation en termes d'analyse harmonique des signaux périodiques.

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont à valeurs complexes, 2π-périodiques et continues par morceaux sur $\mathbf{R}$. Le cas des fonctions T-périodiques s'y ramène par changement de variable.

a) Coefficients de Fourier

Espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes 2π-périodiques continues par morceaux sur $\mathbf{R}$.

Définition d'une fonction 2π-périodique continue par morceaux f à partir d'une fonction g continue par morceaux sur un segment de longueur 2π.

Intégrale sur une période d'une fonction f à valeurs complexes 2π-périodique continue par morceaux sur $\mathbf{R}$.

Définition des coefficients de Fourier d'une telle fonction :
$$\hat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}\,t.$$
Expression des coefficients de Fourier sous forme de cosinus et de sinus.

Coefficients de Fourier de $\bar{f}$; cas d'une fonction à valeurs réelles. Coefficients de Fourier de $t \mapsto f(-t)$; cas d'une fonction paire, d'une fonction impaire. Effet d'une translation : coefficients de Fourier de $t \mapsto f(t+a)$.

Pour tout entier naturel p, définition de la somme partielle :
$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

Lorsque qu'en un point x de $\mathbf{R}$ les sommes partielles $S_p(f)$ convergent, la série de Fourier est dite convergente au point x et la somme de la série de Fourier est, par définition, la limite des sommes $S_p(f)(x)$.

L'application $\mathcal{F}$ qui à f associe $\hat{f}$ est linéaire. La suite $\hat{f}$ est bornée et $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_1$.

Par définition $\|f\|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}\,t.$

En outre, $c_n(f)$ tend vers 0 au voisinage de l'infini.

Coefficients de Fourier d'une dérivée : si f est 2π-périodique continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, alors
$$c_n(\mathrm{D}f) = in\,c_n(f).$$
Si f est 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbf{R}$, alors $c_n(f)$ est négligeable devant $|n|^{-k}$ au voisinage de l'infini.

On donnera la définition des fonctions 2π-périodiques de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, et on étendra à ces fonctions (pour $k = 1$) la formule d'intégration par parties.

b) Convergence en moyenne quadratique.

Dans ce paragraphe, on considère des fonctions 2π-périodiques continues sur $\mathbf{R}$. Il convient d'effectuer une brève extension au cas des fonctions continues par morceaux ; les démonstrations concernant cette extension ne sont pas exigibles des étudiants.

Produit scalaire $(f, g) \mapsto (f|g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t)\,g(t)\,\mathrm{d}\,t$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions 2π-périodiques continues sur $\mathbf{R}$; norme associée $f \mapsto \|f\|_2$.

Les fonctions $t \mapsto e_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$, où n parcourt $\mathbf{Z}$, forment une famille orthonormale et, pour tout n, $c_n(f) = (e_n|f)$.

La projection orthogonale d'un élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}$ sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_p$ engendré par les e_n, où $|n| \leqslant p$, est la somme partielle $S_p(f)$.
Relation
$$\|f\|^2 = (\|S_p(f)\|_2)^2 + d\,(f, \mathcal{P}_p)^2.$$

En particulier, l'application qui à tout élément P de $\mathcal{P}_p$ associe $\|f - P\|_2$ atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $S_p(f)$.

Inégalité de Bessel :
$$\sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \leqslant (\|f\|_2)^2.$$

Les séries $\sum |c_n(f)|^2$ et $\sum |c_{-n}(f)|^2$ sont convergentes.

Convergence en moyenne quadratique : pour tout élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}$, les sommes partielles $S_p(f)$ convergent en moyenne quadratique vers f.
L'application linéaire $f \mapsto \hat{f}$ de $\mathcal{C}_{2\pi}$ dans $\ell^2(\mathbf{Z})$ conserve le produit scalaire ; elle est donc injective.

Formule de Parseval : expressions du carré de la norme et du produit scalaire à l'aide des coefficients de Fourier.

c) Convergence ponctuelle

Convergence normale : lorsque f est 2π-périodique continue sur $\mathbf{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, les séries $\sum c_n(f)$ et $\sum c_{-n}(f)$ sont absolument convergentes. Dans ces conditions, les sommes partielles $S_p(f)$ de la série de Fourier de f convergent uniformément vers f sur $\mathbf{R}$.

En particulier, pour tout nombre réel x, la série de Fourier de f converge en ce point, et sa somme est égale à $f(x)$.

Théorème de Dirichlet : soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbf{R}$, alors pour tout nombre réel x, la série de Fourier de f converge en ce point et sa somme est égale à $\dfrac{1}{2} \lim\limits_{h} \big[f(x+h) + f(x-h)\big]$ où h tend vers 0, $h > 0$. En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est égale à $f(x)$.

La démonstration du théorème de Dirichlet n'est pas exigible des étudiants.

IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

L'objectif de cette partie est d'étudier les systèmes différentiels linéaires et d'introduire quelques notions sur le cas non linéaire, en relation étroite avec la géométrie différentielle et les systèmes dynamiques continus.

Il convient de relier cette étude à l'enseignement des autres disciplines scientifiques (systèmes mécaniques ou électriques gouvernés par une loi d'évolution et une condition initiale, traitement du signal). Il convient d'étudier le comportement du signal de sortie associé à différents types de signaux d'entrée et de dégager la signification de certains paramètres ou comportements : stabilité, régime permanent, oscillation, amortissement, fréquences propres, résonance. On peut alors être amené à étendre la notion de solution (fonction $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ par morceaux).

1- Équations différentielles linéaires

L'objectif de ce chapitre est triple :
- Étudier les équations linéaires d'ordre 1 à valeurs vectorielles, et leurs traductions en termes de systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1.
- Étudier le cas particulier d'une équation linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, en relation avec l'exponentielle d'un endomorphisme et avec la réduction des endomorphismes.
- Étudier le cas particulier des équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2.

Les applications considérées dans cette partie sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

a) Compléments de calcul intégral

Brève extension de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux sur un intervalle compact, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie.

b) Équations linéaires d'ordre 1

Définition d'une solution sur I de l'équation différentielle linéaire $x' = a(t)\,x + b(t)$ où a désigne une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$ et b une application continue de I dans F.

Traduction en termes matriciels, en termes de systèmes d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1.

Existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible des étudiants.

Les solutions sur I de l'équation $x' = a(t)\,x$ constituent un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ de $\mathcal{C}^1(I)$. En outre, étant donné un élément α de I, l'application qui à tout élément f de $\mathcal{E}$ associe $f(\alpha)$ est un isomorphisme de $\mathcal{E}$ sur F.

En particulier, la dimension de $\mathcal{E}$ est égale à $n = \dim F$.

Définition d'un système fondamental de solutions de l'équation $x' = a(t)\,x$. Wronskien.

Application à la résolution de l'équation différentielle $x' = a(t)\,x + b(t)$ par la méthode de variation des constantes.

c) Équations linéaires à coefficients constants

Étude de l'équation $x' = a\,x$, où a est un endomorphisme de F. L'unique solution sur $\mathbf{R}$ du problème de Cauchy $x' = a\,x$, $x(0) = e$ où e est un vecteur de F, est la fonction $t \mapsto (\exp ta)\,e$. Relation $\exp sa . \exp ta = \exp(s+t)a$.
Expression intégrale de la solution de $x' = a\,x + b(t)$.

Traduction matricielle $X' = A\,X$, où A est une matrice à éléments réels ou complexes.

d) Équations linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2

Équation $a(t)\,x' + b(t)\,x = c(t)$ où a, b et c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes.

Structure de l'espace des solutions lorsque a ne s'annule pas sur I.

Équation $a(t)\,x'' + b(t)\,x' + c(t)\,x = d(t)$ où a, b, c et d sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes. Lorsque a ne s'annule pas sur I, système d'ordre 1 associé, existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy, structure de l'espace des solutions de l'équation homogène, systèmes fondamentaux de solutions, wronskien.

Application à la résolution de l'équation par la méthode de variation des constantes.
Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène associée ne s'annulant pas sur I.

2- Notions sur les équations différentielles non linéaires

L'objectif de ce chapitre est d'introduire quelques notions de base sur les équations différentielles non linéaires, et d'introduire la notion de solution maximale.
Il s'agit également de familiariser les étudiants avec le concept de système autonome et de mettre en œuvre les résultats du cours sur des exemples simples.

Aucune connaissance spécifique sur les propriétés des solutions maximales et des courbes intégrales n'est exigible des étudiants.

Il convient de valoriser les interprétations géométriques, en termes de courbes intégrales de champs de vecteurs du plan, en relation avec l'étude des systèmes dynamiques continus issus des autres sciences, et notamment la mécanique, la physique et l'automatique.

a) Équations non linéaires

Définition d'une solution d'une équation différentielle de la forme $x' = f(t,x)$ où f est à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$.

Existence et unicité locale d'une solution du problème de Cauchy.

La démonstration de ce théorème est hors programme.

Prolongement d'une solution φ en une borne a de son intervalle de définition lorsque φ admet une limite b au point a, et $(a,b) \in U$.

Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy ; son intervalle de définition est ouvert.

Exemples d'équations à variables séparables.

b) Systèmes différentiels autonomes

Définition d'une solution d'un système différentiel autonome d'ordre 2, de la forme $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ où f et g sont des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$. Invariance par translation.
Définition d'une solution maximale.
Existence et unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy.
Interprétation géométrique : courbe intégrale d'un champ de vecteurs.

Cas d'une équation différentielle autonome d'ordre 1, de la forme $x' = f(x)$ où f est une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.
Système autonome d'ordre 2 associé à une équation différentielle autonome d'ordre 2, de la forme $x'' = f(x, x')$, où f est à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$.

V. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

L'objectif de cette partie est triple :
- Consolider les acquis de première année portant sur les fonctions numériques de deux variables réelles.
- Étendre les notions de base du calcul différentiel aux applications continûment différentiables sur un ouvert de $\mathbf{R}^p$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, en relation avec la géométrie différentielle et l'analyse vectorielle.
- Effectuer une étude élémentaire des formes différentielles de degré 1 (intégrales curvilignes, primitives) en relation avec l'étude des champs de vecteurs,la mécanique et la physique.

1- Calcul différentiel

L'objectif essentiel est d'étudier quelques notions de base : différentielle en un point, dérivée selon un vecteur, dérivées partielles, applications continûment différentiables, difféomorphismes, gradient, points critiques, dérivées partielles d'ordre supérieur.

Les applications f considérées dans ce chapitre sont définies sur un ouvert U de E à valeurs dans F, où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie. Pour la pratique, le programme se limite au cas où $\dim E \leqslant 3$, $\dim F \leqslant 3$ et où f est de classe $\mathcal{C}^1$. L'étude de fonctions différentiables non de classe $\mathcal{C}^1$ est hors programme.

Pour l'étude d'une fonction f de plusieurs variables, il convient de mettre en valeur le fait que la plupart des problèmes peuvent se ramener au problème correspondant pour une fonction d'une variable en paramétrant le segment $[a, a+h]$, ce qui permet d'écrire $f(a+h)-f(a) = \varphi_h(1)-\varphi_h(0)$ où, pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi_h(t) = f(a+th)$.

a) Applications continûment différentiables

Définition d'une fonction f différentiable en un point a de U et de l'application linéaire tangente à f en a, appelée aussi différentielle de f au point a et notée $\mathrm{d}f(a)$.

Interprétation en termes de développement limité de f à l'ordre 1.

Définition de la dérivée de f en un point a de U selon un vecteur h, notée $\mathrm{D}_h f(a)$. Définition des dérivées partielles dans une base de E, notées $\mathrm{D}_j f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in [-\delta, \delta]$, $a + th$ appartienne à U ; on pose alors $\varphi_h(t) = f(a + th)$. Si φ_h est dérivable à l'origine, on dit que f admet une dérivée en a selon h, et l'on pose $\mathrm{D}_h f(a) = \varphi_h'(0)$.

Si f est différentiable au point a, elle est continue en ce point et admet des dérivées selon tout vecteur h ; en outre,

$$\mathrm{d}f(a)\,(h) = \mathrm{D}_h f(a).$$

Dans toute base de E,

$$\mathrm{d}f(a)\,(h) = \mathrm{D}_h f(a) = \sum_{j=1}^{p} h_j \mathrm{D}_j f(a).$$

Définition des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (ou continûment différentiables) sur U : pour une (toute) base de E, les dérivées partielles dans cette base sont continues.

Théorème fondamental : si, dans une base de E, les dérivées partielles $\mathrm{D}_j f$ sont continues sur U, alors f est différentiable en tout point a de U. En outre, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

La démonstration de ce résultat n'est pas exigible des étudiants.
Si f est une application linéaire de E dans F, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et, pour tout point a de E, $\mathrm{d}f(a) = f$.

Si f et g sont deux applications de classe $\mathcal{C}^1$, leur composée $g \circ f$ l'est aussi ; différentielle de $g \circ f$. Définition d'un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$. Opérations algébriques sur les applications de classe $\mathcal{C}^1$.	Caractérisation d'une application f de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans F par ses coordonnées f_i dans une base de F ; alors, pour tout h, les fonctions $\mathrm{D}_h f_i$ sont les coordonnées de $\mathrm{D}_h f$.
Pour une application de classe $\mathcal{C}^1$, matrice jacobienne associée à des bases de E et de F ; lorsque $E = F$, jacobien.	Matrice jacobienne d'une application composée, d'une application réciproque.
Dérivée d'une fonction composée de la forme $f \circ \varphi$, où φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I et à valeurs dans U.	Lorsque f est un difféomorphisme, l'image $f(\Gamma)$ d'une courbe paramétrée Γ régulière à l'ordre 1 est une courbe régulière à l'ordre 1 ; détermination d'une tangente à $f(\Gamma)$.
Caractérisation à l'aide du jacobien des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe $\mathcal{C}^1$.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

b) Fonctions numériques continûment différentiables

Algèbre $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.	
Lorsque E est un espace euclidien, le gradient de f est défini par $$\mathrm{d}f(a)\,(h) = \mathrm{D}_h f(a) = (\mathrm{grad} f(a)\vert h).$$	Expression du gradient dans une base orthonormale de E. Expression en coordonnées polaires dans le cas du plan euclidien.
Lorque l'ouvert U est convexe, inégalité des accroissements finis pour une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.	Caractérisation des fonctions constantes sur l'ouvert U.
Points critiques d'une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$; condition nécessaire d'existence d'un extrémum local.	

c) Dérivées partielles d'ordre supérieur

Théorème de Schwarz pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Algèbre $\mathcal{C}^2(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Algèbre $\mathcal{C}^k(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ $(1 \leqslant k \leqslant \infty)$ sur U.	La démonstration du théorème de Schwarz est hors programme.
Pour une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$: formule de Taylor-Young ; étude de l'existence d'un extrémum local en un point critique, à l'aide de $rt - s^2$.	
Exemples d'équations aux dérivées partielles.	

d) Notions sur les courbes et les surfaces

Dans ce paragraphe, les courbes du plan ou de l'espace et les surfaces sont définies par paramétrages ou par équations cartésiennes. Aucune difficulté ne peut être soulevée sur l'équivalence de ces définitions.

Toutes les formes du théorème des fonctions implicites utiles pour traiter ce paragraphe sont admises.

L'étude des courbes d'une surface définies par des conditions différentielles est hors programme.

Définition d'un point régulier d'une courbe définie par paramétrage $t \mapsto f(t)$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^2$, ou par une équation cartésienne de la forme $F(x,y) = 0$, où F est à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$. Tangente, normale.	
Définition d'un point régulier d'une surface définie par paramétrage $(u,v) \mapsto f(u,v)$, où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ à valeurs dans $\mathbf{R}^3$, ou par une équation cartésienne de la forme $F(x,y,z) = 0$, où F est à valeurs réelles et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^3$. Plan tangent, normale. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point régulier où les deux plans tangents sont distincts.	On illustrera ces notions sur des exemples de cônes, cylindres, quadriques et surfaces de révolution.
Position d'une surface donnée par $z = f(x,y)$ par rapport au plan tangent en un point où $rt - s^2 \neq 0$.	

2- Intégrales curvilignes

Définition d'une forme différentielle ω de degré 1 de classe $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert U de $\mathbf{R}^p$. Définition d'une primitive sur U d'une telle forme ; définition d'une forme exacte sur U.

Interprétation en termes de champs de vecteurs.

Écriture $\omega = \sum_{j=1}^{p} a_j \, \mathrm{d}x_j$.

Intégrale curviligne de ω sur un arc orienté Γ de U, notation $\int_\Gamma \omega$.

Calcul de l'intégrale curviligne d'une forme exacte à l'aide d'une primitive de ω.

Définition d'une forme de classe $\mathcal{C}^1$ fermée sur U. Toute forme de classe $\mathcal{C}^1$ exacte sur U est fermée sur U. Réciproque lorsque l'ouvert U est étoilé.

La démonstration de cette réciproque n'est pas exigible des étudiants.

Formule de Green-Riemann.

À ce sujet, aucune démonstration n'est exigible des étudiants.