

①. Algèbre de boole

Soit X un ensemble, on considère $E = \mathcal{F}(X, \{0, 1\})$ muni de la loi $+$ associative et commutative

telle que : $(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}) \vdash (\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{0})$

$$\forall a \in E : a + a = a ; a + 0 = a \text{ et } a + 1 = 1$$

(ou $0 : x \in X \mapsto 0$ et $1 : x \in X \mapsto 1$)

On définit aussi la loi $\cdot$ associative telle que :

$$a \cdot a = a ; a \cdot 0 = 0 ; a \cdot 1 = a$$

et $\cdot$ est distributive par rapport à $+$.

a) - Montrer alors que $+$ est distributive par rapport à $\cdot$. (c.a.d. : $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$)

b) - On définit l'application : $a \mapsto \bar{a}$ de E sur E en caractérisant $\bar{a}$ par les 2 propriétés :

$$a + \bar{a} = 1 \text{ et } a \cdot \bar{a} = 0 \quad (\bar{a} \text{ est unique}).$$

Montrer que $a \mapsto \bar{a}$ est involutive ($\overline{\bar{a}} = a$).

$$\text{On a : } \overline{0} = 1 \text{ et } \overline{1} = 0$$

$$\text{Montrer : } \begin{cases} \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b} \\ \overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \end{cases} \quad (\text{Th. de Morgan})$$

c) - On définit une troisième loi sur E par :

$$a \Delta b = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b \quad (\Delta \text{ est évidemment com.})$$

Montrer que Δ est associative ; étudier la distributivité de Δ par rapport à $\cdot$ et $+$ et réciproquement.

d) - On définit ensuite $\text{Sup}(a, b) = a + b$

$$\text{et } a < b \Leftrightarrow b = \text{Sup}(a, b).$$

Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre partiel compatible avec $+$ et $\cdot$ (et Δ ?).

$$(c.a.d. : \begin{matrix} a < b \\ c < d \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a + c < b + d \\ a \cdot c < b \cdot d \end{matrix})$$

- Montrer aussi que $a < b \Leftrightarrow \bar{b} < \bar{a}$.