

Lundi 12-9-83

Exercice 1

Soient p et q deux entiers naturels, on définit :

$$F(x) = \int_0^x t^p (1-t)^q dt, \quad G(x) = \int_x^1 t^p (1-t)^q dt, \quad H(x) = G(1-x), \quad B(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q dt.$$

1°) Calculer $F'(x)$ et $H'(x)$.2°) Comparer $B(p, q)$ et $B(q, p)$.

3°) En faisant une intégration par parties, montrer la relation :

$$B(p, q) = \frac{p}{q+1} B(p-1, q+1)$$

4°) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$: $B(0, n)$, en déduire $B(p, q)$.

Exercice 2

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{C}^1$ l'ensemble des applications dérivables et à dérivée continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Si f appartient à $\mathcal{C}$ ou à $\mathcal{C}^1$, on écrit : $f(x) = \alpha(x) + i\beta(x)$ où $\alpha(x) \in \mathbb{R}$ et $\beta(x) \in \mathbb{R}$. On supposeque $f'(x) = \alpha'(x) + i\beta'(x)$ et on définit : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \alpha(t) dt + i \int_a^b \beta(t) dt$ Enfin, on pose : $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.1°) si $z \in \mathbb{C}$, $z = \lambda + i\mu$, montrer que : $\int_a^b z f(t) dt = z \int_a^b f(t) dt$.2°) Montrer que l'application $\varphi : f \rightarrow F$ est une application linéaire de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}^1$ considérées comme espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.3°) On pose : $e^{i\mu x} = \cos(\mu x) + i \sin(\mu x)$ et $e^{\lambda x} = e^{\lambda x}$; calculer $(e^{i\mu x})'$ et donner un résultat simple pour $(e^{\lambda x})'$.4°) Si $z = \lambda + i\mu \neq 0$, calculer $\int_a^b e^{(1+i\mu)t} dt$; en déduire que :

$$\int_a^b e^{\lambda t} \cos(\mu t) dt = \left[\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2 + \mu^2} (\lambda \cos \mu t + \mu \sin \mu t) \right]_a^b$$

$$\int_a^b e^{\lambda t} \sin(\mu t) dt = \left[\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2 + \mu^2} (\lambda \sin \mu t - \mu \cos \mu t) \right]_a^b$$

5°) Si $(f, g) \in (\mathcal{C}^1)^2$, démontrer que : $\int_a^b f(t)g(t) dt = \left[f(t)g(t) \right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt$ 6°) Si $z = \lambda + i\mu \neq 0$, calculer $\int_a^b t e^{(1+i\mu)t} dt$ en déduire les valeurs de :
 $\int_a^b t e^{\lambda t} \cos(\mu t) dt$ et $\int_a^b t e^{\lambda t} \sin(\mu t) dt$ (On mettra ces résultats sous une forme identique à celle du 4°).

Exercice 3

Soient m et n deux entiers vérifiant :

$$i) \quad 1 \leq m \leq 1983$$

$$1 \leq n \leq 1983$$

$$ii) \quad (m^2 + mn + n^2)^2 = 1$$

Déterminer m et n pour rendre maximum $m^2 + n^2$.