

N° 5.

Epreuve de calcul numérique.

durée 3^h.

1°. Etudier la fonction $h: x \mapsto e^{-x^2/2}$ et représenter son graphique de 0 à 4 ($x \in [0, 4]$). On prendra $\|\vec{x}\| = 5 \text{ cm}$ et $\|\vec{y}\| = 10 \text{ cm}$.

On calculera h' , h'' , $h^{(3)}$ et $h^{(4)}$; on appellera $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot h(x)$.

2°. On veut calculer les valeurs de la fonction $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$ pour (1) $x = 0,4$. R: $h \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(2) $x = 3,6$ et 4.

On calculera $I_1 = F(0,4)$; $I_2 = F(0,8) - F(0,4)$; etc..., $I_8 = F(3,2) - F(2,8)$ en utilisant la méthode des trapèzes et en divisant l'intervalle $[0, 3.2]$ en 16 parties égales. Les calculs seront fait dans un tableau:

x	$h(x)$	$f(x)$
0	1	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
0,2	$h(0,2)$	$f(0,2)$
0,4	$h(0,4)$	$f(0,4)$

$h = 1$

$$I_2 = \frac{0,4}{2} \left[\frac{1}{2} f(0) + f(0,2) + \frac{1}{2} f(0,4) \right] \text{ etc...}$$

On calculera ces valeurs avec le maximum de précision possible. (la précision sera meilleure pour I_2 que pour I_1 ...).

Pour $I_9 = F(3,6) - F(3,2)$ et $I_{10} = F(4) - F(3,6)$ on divisera l'intervalle $[3,2, 4]$ en 2 parties égales.

On rappelle que l'erreur due à la méthode dans ce cas là est inférieure à $\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \sup_{t \in [a,b]} |f''(t)|$ et que l'erreur de lecture dans une table est inférieure à 0,5 fois 10^{-n} où n est le nombre de chiffres donnés après la virgule.

3°. Refaire les calculs donnant $I_1, I_2, \dots, I_8$ en utilisant la méthode de Simpson: on aura: $I_1 = \frac{0,4}{6} [f(0) + f(0,4) + 4 \cdot f(0,2)]$; $b-a=0,4$; $n=1$ etc.

L'erreur due à la méthode est ici inférieure à $\frac{(b-a)^5}{2880n^4} \cdot \sup_{t \in [a,b]} |f^{(4)}(t)|$.

En utilisant ces calculs les plus précis, donner les valeurs approchées de $F(x)$ en indiquant un majorant de l'erreur dans chaque cas:

les résultats seront mis dans 1 tableau:

x	0,4	0,8	...	3,6	4
$F(x)$					
majoration de Δx et l'erreur					