

4°). On démontre que: $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2} dx \stackrel{(\text{m.2})}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{2}$.

si $x \geq a$, on a $e^{-x^2/2} \leq e^{-a^2/2} \cdot \frac{x}{a}$, en utilisant cette inégalité, montrer que: $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^\lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \leq \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-a^2/2}$.

En déduire que: $0 \leq \frac{1}{2} - F(a) \leq \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-a^2/2}$.

On montre en fait que: $\frac{1}{2} - F(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-a^2/2}}{a} \cdot \left[1 - \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^4} - \frac{15}{a^6} + E \right]$

avec: $0 \leq E \leq \frac{105}{a^8}$

En déduire des encadrements pour $F(3)$, $F(4)$ et $F(5)$

(Chercher la valeur approchée de a pour que: $\frac{1}{2} - F(a) = 10^{-6}$)

(on calculera: $F(4,76)$ et $F(4,72)$ et en considérant la fonction

$G(a) = \frac{1}{2} - F(a) - 10^{-6}$ qui est convexe; on encadrera la valeur cherchée en utilisant la méthode de Newton (à partir du point le plus intéressant) et la méthode des parties proportionnelles).