

Lundi 13/9/82 Devoir à la maison n° 1

I. Soit (Γ) la courbe représentative dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé de la fonction : $f(x) = \frac{2x^2 - 2\lambda x + \mu}{x^2 - 1}$ (1)

On suppose par la suite $\lambda^2 > \mu$.

(Γ) coupe l'axe $x'Ox$ en 2 points A et B d'abscisse a et b .

1°) Démontrer que la pente de la tangente à (Γ) en A est : $\frac{2(a-\lambda)}{a^2-1}$

Former alors la relation entre λ et μ , nécessaire et suffisante, pour que les tangentes en A et B à (Γ) soient parallèles.

On supposera cette condition réalisée dans toute la suite. Les courbes (Γ) dépendent alors du seul paramètre λ . Entre quelles limites peut varier ce paramètre?

Démontrer que la fonction définie par (1) n'a ni maximum, ni minimum.

2°) Déterminer, en fonction de λ , la pente de la direction commune $\vec{J}$ des tangentes en A et B à (Γ) . Démontrer qu'il existe 2 autres points A' et B' de (Γ) où la tangente est parallèle à $\vec{J}$. Vérifier que, si a' est l'abscisse de A' (par exemple), son ordonnée est $2 - \lambda/a'$.

Démontrer que la droite A'B' est perpendiculaire à $\vec{J}$.

II. Résoudre l'équation : $\frac{\sin x + 2 \sin(2x) - \sin 5x}{2(\cos x - \cos 4x) \sin 3x} = 1$

III. Etude et représentation graphique de : $f(x) = (x^2 - 1) \log \frac{1+x}{1-x}$

(On pourra être amené à étudier $g(x) = \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{x}$).

N.B. : Bien lire l'énoncé et ne pas hésiter à souligner les phrases ou les mots importants.

Dans le I, beaucoup de calculs peuvent être évités en faisant appel aux fonctions symétriques élémentaires des racines de :

$$x^2 - 2\lambda x + \mu = 0 \quad (\text{i.e. : } a+b = 2\lambda \quad p = ab)$$

Dans le II, il est fortement conseillé de raisonner par équivalence pour ne pas introduire des solutions parasites.